

Primzahlen

A1 Zwei Primzahlen p_1 und p_2 (mit $p_1 > p_2$) heißen Primzahlzwillinge, wenn $p_1 - p_2 = 2$ gilt. Beweise, dass für alle Primzahlzwillinge p_1 und p_2 , für die $p_2 > 3$ ist, stets die Summe $p_1 + p_2$ durch 12 teilbar ist!

A2 Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $4n - 1, n \in \mathbb{N}$ gibt.

A3+ Es seien p, q, r und s vier Primzahlen, für die

$$5 < p < q < r < s < p + 10$$

gilt. Man beweise, dass die Summe der vier Primzahlen durch 60 teilbar ist.

F1 Falls $2^s - 1$ eine Primzahl ist, dann ist auch s eine Primzahl. Gilt hier auch die Umkehrung?

Anmerkung: Primzahlen der Form $2^s - 1$ nennt man Mersenne-Primzahlen. Alle modernen Primzahl-Rekorde sind Mersenne-Primzahlen, diese werden im GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) Projekt gesucht, an dem sich jeder/jede mit dem eigenen Computer beteiligen kann.

F2 Zeige, dass $p^q + q^p$ durch $p + q$ teilbar ist, wenn p und q Primzahlzwillinge sind.

F3+ Sei $n \in \mathbb{N}$, zeige, dass

$$19 \cdot 8^n + 17$$

keine Primzahl ist!