



46. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

1. Teil

1. Mai 2015

1. Man zeige

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \geq (a + b)(b + c)(c + d)(d + a)$$

für alle positiven reellen Zahlen a, b, c, d .

Wann gilt Gleichheit?

(Georg Anegg)

2. Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck mit $AC < AB$ und mit Umkreisradius R . Der Punkt D sei der Fußpunkt der Höhe durch den Eckpunkt A . Der Punkt T liege so auf der Geraden AD , dass $AT = 2R$ gilt und D zwischen A und T liegt.

Der Mittelpunkt des Umkreisbogens BC , der A nicht enthält, werde mit S bezeichnet.

Man zeige: $\sphericalangle AST = 90^\circ$.

(Karl Czakler)

3. Alice und Bob spielen ein Spiel mit einer Schnur, auf der 2015 Perlen aufgereiht sind. Wer am Zug ist, zerschneidet die Schnur zwischen zwei Perlen. Der oder die andere entscheidet, welches der beiden Stücke für den Rest des Spieles verwendet wird. Das andere Stück wird entfernt.

Alice beginnt, danach wechseln sich die beiden mit dem Zerschneiden ab. Verloren hat, wer am Zug ist und nur eine einzige Perle vor sich hat, sodass kein Schnitt zwischen zwei Perlen mehr möglich ist.

Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

(Theresia Eisenkölbl)

4. Eine *Polizeinotrufzahl* sei eine positive ganze Zahl, die im Dezimalsystem auf die Ziffern 133 endet. Man beweise, dass jede Polizeinotrufzahl einen Primteiler größer als 7 besitzt.

(Robert Geretschläger)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.

Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.