53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Vorrunde – Lösungen

30. April 2022

Aufgabe 1. *Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen x, y und z die Doppelungleichung*

$$0 < \frac{1}{x+y+z+1} - \frac{1}{(x+1)(y+1)(z+1)} \leq \frac{1}{8}$$

gilt.

Wann gilt in der rechten Ungleichung Gleichheit?

(Walther Janous)

Antwort. Gleichheit ergibt sich einzig für $x = y = z = 1$.

Lösung 1.

- Linksseitige Ungleichung.

  Sie ergibt sich wegen

$$(x+1)(y+1)(z+1) = x+y+z+1+xy+yz+zx+xyz > x+y+z+1.$$

- Rechtsseitige Ungleichung. Wenn wir $a = x+1$, $b = y+1$ und $c = z+1$ substituieren, lautet unsere Ungleichung

$$\frac{1}{a+b+c-2} - \frac{1}{abc} \leq \frac{1}{8},$$

wobei a, b und c reelle Zahlen sind, die größer als 1 sind. Wir stellen fest, dass sich für $a = b = c = 2$ Gleichheit ergibt. Mit Hilfe der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung erhalten wir

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \iff \frac{27}{(a+b+c)^3} \leq \frac{1}{abc}$$

mit Gleichheit genau für $a = b = c$. Deshalb genügt es die schärfere Ungleichung

$$\frac{1}{a+b+c-2} - \frac{27}{(a+b+c)^3} \leq \frac{1}{8}$$

nachzuweisen. Dafür setzen wir $s = a+b+c$ und erhalten (mit $s > 3$)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s-2} - \frac{27}{s^3} \leq \frac{1}{8} \\ \iff \quad & \frac{s^3 - 27s + 54}{s^3(s-2)} \leq \frac{1}{8} \\ \iff \quad & 8s^3 - 216s + 432 \leq s^4 - 2s^3 \\ \iff \quad & s^4 - 10s^3 + 216s - 432 \geq 0. \end{aligned}$$

Wegen des festgestellten Gleichheitsfalles muss $s = 6$ eine Nullstelle des linksseitigen Polynoms sein. Ihre Abspaltung führt auf $s^4 - 10s^3 + 216s - 432 = (s-6)(s^3 - 4s^2 - 24s + 72)$. Weil auch der zweite Faktor $s = 6$ als Nullstelle hat, ergibt sich die Ungleichung

$$(s-6)^2(s^2 + 2s - 12) \geq 0,$$

die wegen $s^2 + 2s - 12 > 3^2 + 2 \cdot 3 - 12 > 0$ für alle reellen Zahlen $s > 3$ gültig ist. Gleichheit ergibt sich genau für $s = 6$. Wegen der weiter oben angegebenen Gleichheitsbedingung (die auf der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung beruht) bedeutet dies, dass in der unverschärften Ungleichung genau für $a = b = c = 2$ Gleichheit eintritt, d.h. genau für $x = y = z = 1$.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Die linke Ungleichung zeigt man wie in der vorigen Lösung.

Für die rechte Ungleichung multiplizieren wir aus. Mit etwas Geduld erhält man, dass

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 + x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z + 1 \\ \geq 4xyz + 5xy + 5xz + 5yz$$

nachzuweisen ist.

Mittels der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung ergeben sich die Ungleichungen

$$\begin{aligned} x^2yz + xy^2z + xyz^2 + 1 &\geq 4xyz \\ x^2y + xy^2 + x + y &\geq 4xy \\ x^2z + xz^2 + x + z &\geq 4xz \\ y^2z + yz^2 + y + z &\geq 4yz. \end{aligned}$$

Mit den letzten drei Ungleichungen erhält man für den Gleichheitsfall $x = y = z$ und mit der ersten Ungleichung dann $x = y = z = 1$.

Deshalb muss noch die Gültigkeit von

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

gezeigt werden. Weil diese Ungleichung äquivalent zu

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$$

ist, sind wir am Ende des Beweises. Durch Einsetzen von $x = y = z = 1$ in die ursprüngliche Ungleichung verifiziert man den Gleichheitsfall.

(Clemens Heuberger) □

Aufgabe 2. *Die Punkte A, B, C, D liegen in dieser Reihenfolge auf einem Kreis mit Mittelpunkt O. Weiters sollen die Geraden AC und BD aufeinander normal stehen. Der Fußpunkt des Lotes von O auf AB sei F.*

Man beweise $CD = 2 \cdot OF$.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Sei E der Fußpunkt des Lotes von O auf CD. Wir betrachten die Dreiecke FOA und EDO. Beide Dreiecke sind rechtwinklig, und ihre Hypotenusen AO bzw. OD sind Radien desselben Kreises, also gleich lang. Nach dem Zentriwinkelsatz gilt $\sphericalangle AOF = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB$ sowie $\sphericalangle EOD = \frac{1}{2}\sphericalangle COD = \sphericalangle CBD$. Weil AC und BD aufeinander normal stehen, gilt $\sphericalangle ACB = 90° - \sphericalangle CBD$. Wir erhalten $\sphericalangle AOF = 90° - \sphericalangle EOD = \sphericalangle ODE$. Die Dreiecke FOA und EDO sind also kongruent, und die Strecken ED und OF somit gleich lang. Weil E der Mittelpunkt der Strecke CD ist, folgt $CD = 2 \cdot OF$.

(Josef Greilhuber) □

Lösung 2. Sei R der Radius des gegebenen Kreises. Es gilt

$$CD = 2R \sin \sphericalangle CAD$$

nach dem Sinussatz sowie

$$OF = R \sin \sphericalangle FAO$$

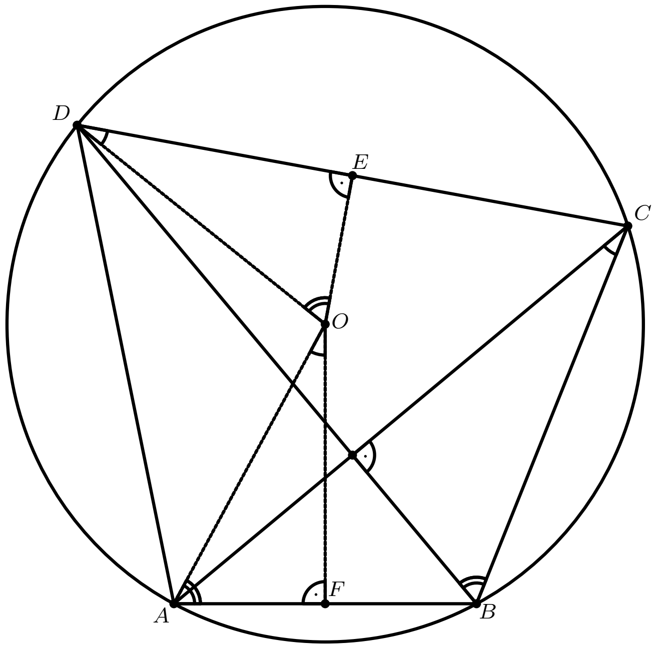
im rechtwinkligen Dreieck FAO.

Andererseits gilt $\sphericalangle FOA = \sphericalangle BDA$ nach dem Zentriwinkelsatz und somit wegen den gegebenen rechten Winkeln auch

$$\sphericalangle FAO = \sphericalangle CAD,$$

womit alles bewiesen ist.

(Theresia Eisenkölbl) □



Aufgabe 3. *Bei jeder ganzen Zahl auf dem Zahlenstrahl von 0 bis 2022 steht zu Beginn eine Person.*

In jedem Zug werden zwei Personen mit Abstand mindestens 2 ausgewählt. Diese gehen jeweils um 1 aufeinander zu.

Wenn kein solcher Zug mehr möglich ist, endet der Vorgang.

Man zeige, dass dieser Vorgang immer nach endlich vielen Zügen endet, und bestimme alle möglichen Konfigurationen, wo die Personen am Ende stehen können. (Dabei ist für jede Konfiguration nur von Interesse, wie viele Personen bei jeder Zahl stehen.)

(Birgit Vera Schmidt)

Antwort. Am Ende stehen alle Personen bei 1011.

Lösung 1. Wir geben jeder Position x ein Gewicht von 2^x. Zu Beginn beträgt das Gesamtgewicht aller Personen daher $1+2+4+\cdots+2^{2022}$ und bleibt während des ganzen Vorgangs eine positive ganze Zahl.

In jedem Zug sinkt das Gesamtgewicht: Seien x und y die Positionen der beiden Personen, die aufeinander zugehen, und o. B. d. A. sei $x < y$, und damit wegen des Mindestabstandes sogar $x+1 \leq y-1$. Dann ist $2^{x+1} + 2^{y-1} \leq 2^{y-1} + 2^{y-1} = 2^y < 2^x + 2^y$.

Da das Gesamtgewicht in jedem Zug um mindestens 1 sinkt, aber immer positiv und ganz bleibt, muss der Vorgang enden.

Betrachten wir nun die Summe der Zahlen, bei denen die Personen stehen, so sehen wir, dass diese Summe invariant ist. Sie beträgt $2023 \cdot 2022/2 = 2023 \cdot 1011$, also im Durchschnitt 1011 pro Person.

Wenn der Vorgang endet, können maximal noch auf zwei benachbarten Feldern Personen stehen, andernfalls gäbe es ja noch mögliche Züge. Eines dieser Felder muss 1011 sein, da andernfalls alle kleiner oder alle größer als 1011 wären und somit 1011 nicht deren Durchschnitt sein könnte. Ebenso sehen wir aber auch, dass keines der beiden Nachbarfelder 1010 oder 1012 beteiligt sein kann, da wieder der Durchschnitt kleiner oder größer als 1011 wäre. Also müssen am Ende alle auf 1011 stehen.

Bemerkung: Dasselbe Prinzip funktioniert auch, wenn wir jeder Position x ein Gewicht von x^2 zuweisen, da $y - x \geq 2$ und somit

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + (y-1)^2 &= x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \\ &= x^2 + y^2 - 2(y-x) + 2 \\ &< x^2 + y^2.\end{aligned}$$

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 2. Wir betrachten als Monovariante die Summe aller Abstände, d.h. $\sum_{i,j} |p_i - p_j|$, wenn die Positionen $p_1, p_2, \ldots$ sind.

Wenn zwei ausgewählte Personen in den Positionen a und b mit $a < b$ aufeinander zugehen, dann bleiben natürlich die Abstände unter allen anderen Personen unverändert. Zu den Personen in Positionen $\geq b$ wird sich der Abstand der einen ausgewählten Person um eins vergrößern und der anderen um eins verkleinern, sodass keine Veränderung bei der Summe der Abstände zu dieser Personengruppe eintritt. Das gilt ebenso für die Personen in Positionen $\leq a$.

Der Abstand von den ausgewählten Personen zu den Personen in der Mitte und zueinander verkleinert sich natürlich. Somit ist die Summe der Abstände strikt monoton fallend, aber auch immer eine ganze Zahl, die positiv oder Null ist. Somit muss der Prozess enden.

Wir sehen weiters auch, dass der Durchschnitt aller Positionen von Personen in jedem Schritt unverändert bleibt und somit am Ende immer noch 1011 ist. Da am Ende höchstens zwei benachbarte Positionen benutzt werden können (sonst könnte man noch einen Zug machen) und der Durchschnitt der Positionen auf zwei wirklich benutzten benachbarten ganzen Zahlen keine ganze Zahl ist, müssen alle auf der selben Position, nämlich 1011, stehen.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 4. *Man bestimme alle Tripel (p, q, r) von Primzahlen, für die $4q - 1$ eine Primzahl ist und*

$$\frac{p+q}{p+r} = r - p$$

erfüllt ist.

(Walther Janous)

Antwort. Es gibt genau ein Lösungstripel, nämlich $(p, q, r) = (2, 3, 3)$.

Lösung. Die Gleichung lautet in äquivalenter Form

$$q = r^2 - p^2 - p,$$

bzw.

$$4q - 1 = 4r^2 - (4p^2 + 4p + 1)$$

oder

$$4q - 1 = (2r - 2p - 1)(2r + 2p + 1).$$

Da $4q - 1$ eine Primzahl ist und $2r + 2p + 1 > 1$ ist, muss für den ersten Faktor

$$2r - 2p - 1 = 1$$

gelten, d.h.

$$r = p + 1.$$

Die einzigen Primzahlen, für die so eine Beziehung möglich ist, sind $p = 2$ und $r = 3$. Tatsächlich ist für diese Wahl

$$(2r - 2p - 1)(2r + 2p + 1) = 11$$

eine Primzahl und es muss wegen $4q - 1 = 11$ auch $q = 3$ gelten.

Daher ist die einzige Lösung $(p, q, r) = (2, 3, 3)$.

(Walther Janous) □