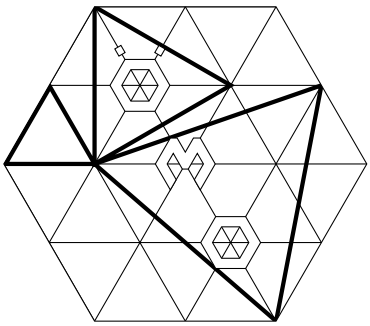
Zahlentheorie für den Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene der Österreichischen Mathematik-Olympiade

Clemens Heuberger*

Version September 2019

Inhaltsverzeichnis



* *Clemens Heuberger, Institut für Mathematik, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Universitätsstraße 65–67, 9020 Klagenfurt am Wörthersee,* `clemens.heuberger@aau.at`.

Dieser Text mit Ausnahme der zitierten Olympiadeaufgaben steht unter der CC-BY 4.0 Lizenz (`https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/`)

1 Zifferndarstellungen in anderen Basen

Satz 1.1. *Sei $b \geq 2$. Dann besitzt jede positive ganze Zahl n eine eindeutige Zifferndarstellung*

$$n = a_\ell b^\ell + \cdots + a_1 b^1 + a_0$$

zur Basis b mit $a_j \in \{0, \ldots, b-1\}$ und $a_\ell \neq 0$. Wir schreiben

$$n = (a_\ell a_{\ell-1} \ldots a_1 a_0)_b.$$

Im Fall $b = 2$ spricht man auch von der Binärdarstellung *von n.*

2 „Aufeinanderfolgende Quadrate“

Diese Methode, um zu zeigen, dass eine diophantische Gleichung unlösbar ist (bzw. um deren Lösungen zu beschränken), beruht auf dem folgenden einfachen Satz.

Satz 2.1. *Seien b und x ganze Zahlen mit $b^2 < x < (b+1)^2$. Dann ist x kein vollständiges Quadrat.*

Dieser Satz stellt eine Möglichkeit dar, folgende Aufgabe zu lösen.

Beispiel 2.2 (LWA 2014/1, Walther Janous)**.** Man bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$a^2 = b \cdot (b+7)$$

mit ganzen Zahlen $a \geq 0$ und $b \geq 0$.

3 Vertiefung Teilbarkeit

Der folgende Satz gibt beispielhaft einige Anwendungen der eindeutigen Primfaktordarstellung an.

Satz 3.1. *Seien a, b und c ganze Zahlen und p eine Primzahl.*

1. *Wenn $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$ und $ab = c^2$, so sind auch a und b vollständige Quadrate.*
2. *Wenn $p \mid a^2$, dann gilt auch $p^2 \mid a^2$.*
3. *Es gilt $a^3 \mid (3a)!$.*
4. *Für $1 \leq a \leq p-1$ ist der Binomialkoeffient $\binom{p}{a}$ durch p teilbar.*

Beispiel 3.2 (LWA 2014/1, Walther Janous)**.** Man bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$a^2 = b \cdot (b+7)$$

mit ganzen Zahlen $a \geq 0$ und $b \geq 0$.

Beispiel 3.3. Man bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$x^3 - y^3 = 19$$

in ganzen Zahlen x und y.

4 Elementare quadratische diophantische Gleichungen in zwei Variablen

Das folgende Beispiel soll aufzeigen, welcher Typ von Gleichungen und Umformungen in diesem Abschnitt behandelt werden.

Beispiel 4.1. Man bestimme alle natürlichen Zahlen x und y mit

$$9x^2 - 6xy - 15y^2 - 12x - 28y = 29.$$

Lösung 1. Wir fassen zunächst derart zu einem vollständigen Quadrat zusammen, dass alle Vorkommnisse von x in einem Quadrat zusammengefasst werden. Es geht also darum, die Terme $9x^2$, $-6xy$ sowie $-12x$ zu behandeln. Glücklicherweise ist $9 = 3^2$ und 3 sowohl in $-6xy$ als auch in $-12x$ enthalten, sodass wir direkt zusammenfassen können:

$$9x^2 - 6xy - 12x = (3x - y - 2)^2 - y^2 - 4 - 4y.$$

Wir setzen $3x - y - 2 = a$ und erhalten damit aus der ursprünglichen Gleichung

$$a^2 - 16y^2 - 32y = 33.$$

Wir fassen neuerlich zu einem vollständigen Quadrat zusammen:

$$16y^2 + 32y = 16(y + 1)^2 - 16$$

Wir erhalten deshalb mit der Substitution $b = y + 1$ die Gleichung

$$a^2 - 16b^2 = 17.$$

Glücklicherweise ist 16 ein vollständiges Quadrat, wir können damit die linke Seite faktorisieren:

$$(a - 4b)(a + 4b) = 17.$$

Da $b = y + 1$ und $y \geq 0$, ist $b \geq 1$, somit gilt $a - 4b < a + 4b$. Weiters ist 17 eine Primzahl, wir können damit 17 nur als Produkt $17 = 1 \cdot 17$ oder $17 = (-1)(-17)$ schreiben.

Im ersten Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} a - 4b &= 1 \\ a + 4b &= 17 \end{aligned}$$

und nach Addition der beiden Gleichungen $2a = 18$, also $a = 9$ und damit aus der ersten Gleichung $b = 2$. Es ergibt sich $y + 1 = b = 2$ und damit $y = 1$ und $3x - y - 2 = a = 9$ und damit $3x = 12$ und $x = 4$. Wir haben somit das Lösungspaar $(x, y) = (4, 1)$ erhalten.

Im zweiten Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} a - 4b &= -17 \\ a + 4b &= -1, \end{aligned}$$

$2a = -18$, $a = -9$ und daraus $b = 2$ und $y = 1$. Es ergibt sich $3x - y - 2 = -9$ und daraus $3x = -6$, Widerspruch zu $x \geq 0$.

Wir haben damit genau eine Lösung $(x, y) = (4, 1)$ erhalten. □

Lösung 2. Alternativ kann man die ursprüngliche Gleichung als quadratische Gleichung

$$9x^2 + (-6y - 12)x + (-15y^2 - 28y - 29) = 0$$

in x sehen und diese über die Lösungsformel lösen:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-6y-12) \pm \sqrt{(-6y-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-15y^2 - 28y - 29)}}{18} \\ &= \frac{6y + 12 \pm \sqrt{36(y^2 + 4y + 4 + 15y^2 + 28y + 29}}{18} = \frac{y + 2 \pm \sqrt{16y^2 + 32y + 33}}{3}. \end{aligned} \tag{1}$$

Da x eine ganze Zahl ist, ist $16y^2 + 32y + 33$ ein vollständiges Quadrat, also

$$16y^2 + 32y + 33 = a^2$$

für eine natürliche Zahl a.

Wir sehen nun diese Gleichung als quadratische Gleichung in y, lösen sie mit der quadratischen Lösungsformel und erhalten

$$y = \frac{-32 \pm \sqrt{(32)^2 - 4 \cdot 16 \cdot (33 - a^2)}}{32} = \frac{-32 \pm \sqrt{64(16 - 33 + a^2)}}{32} = \frac{-4 \pm \sqrt{a^2 - 17}}{4}.$$

Da y eine ganze Zahl ist, ist $a^2 - 17$ ein vollständiges Quadrat, es gibt somit eine natürliche Zahl c mit $a^2 - 17 = c^2$. Wir schreiben diese Gleichung als

$$(a - c)(a + c) = a^2 - c^2 = 17$$

um. Da a und c natürliche Zahlen sind und 17 eine Primzahl ist, sind $a + c \geq 0$ und $a + c \geq a - c$, somit folgen $a + c = 17$ und $a - c = 1$, somit $2a = 18$, $a = 9$ und $c = 8$.

Wir erhalten

$$y = \frac{-4 \pm 8}{4}$$

und damit wegen $y \geq 0$ den Wert $y = 1$. Aus (1) folgt dann

$$x = \frac{3 \pm 9}{3}$$

und damit wegen $x \geq 0$ der Wert $x = 4$.

Somit haben wir das Lösungspaar $(x, y) = (4, 1)$ erhalten. □

Analog kann man jede quadratische diophantische Gleichung in zwei Unbekannten

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{2}$$

mit bekannten ganzzahligen a, ..., e und f und Unbekannten x und y umformen. Man erhält schließlich die Gleichung

$$X^2 + AY^2 = B \tag{3}$$

oder die Gleichung

$$X^2 + CY = B \tag{4}$$

für passende ganze Zahlen A, B und C.

Die Gleichung (4) ist äquivalent zur Kongruenz $X^2 \equiv B \pmod{C}$, damit gibt es entweder keine Lösung oder endlich viele Lösungen modulo C.

Wenn $A > 0$, so ist die Gleichung (3) offensichtlich nur für $B \geq 0$ lösbar. In diesem Fall gibt es endlich viele Lösungen, weil $|Y|$ durch $\sqrt{B/A}$ beschränkt ist.

Wenn $A < 0$ und $A = -E^2$ für eine ganze Zahl E ist, so kann die linke Seite von (3) faktorisiert werden. Man erhält aus der Primfaktorzerlegung von B endlich viele Lösungen.

Wenn schließlich $A = -D$ für eine positive ganze Zahl D ist, die kein Quadrat ist, so nennt man die Gleichung *Pellsche Gleichung*. Diese gehört aber nicht zum Curriculum eines Regionalwettbewerbs.

Beispiel 4.2 (LWA 2014/1, Walther Janous)**.** Man bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$a^2 = b \cdot (b + 7)$$

mit ganzen Zahlen $a \geq 0$ und $b \geq 0$.

Manche dieser Methoden lassen sich auch auf mehr als zwei Variablen verallgemeinern:

Beispiel 4.3. Man bestimme alle ganzen Zahlen x, y und z mit $x^2 + y^2 + z^2 = 10$.

5 Vertiefung Kongruenzen

5.1 Division von Kongruenzen

Bekanntlich darf man Kongruenzen addieren, subtrahieren und multiplizieren. Hier soll geklärt werden, wie mit der Division von Kongruenzen umzugehen ist.

Satz 5.1. *Seien a, b, c und m ganze Zahlen.*

1. *Wenn $\operatorname{ggT}(c, m) = 1$, so sind $ac \equiv bc \pmod{m}$ und $a \equiv b \pmod{m}$ äquivalent.*
2. *Wenn $c \neq 0$, so sind $ac \equiv bc \pmod{mc}$ und $a \equiv b \pmod{m}$ äquivalent.*
3. *Wenn $c \neq 0$, so sind $ac \equiv bc \pmod{m}$ und $a \equiv b \pmod{m'}$ mit $m' = m/\operatorname{ggT}(m, c)$ äquivalent.*

Beweis. 1. Da $\operatorname{ggT}(m, c) = 1$, sind die folgenden Aussagen äquivalent:

$$ac \equiv bc \pmod{m} \iff m \mid c(a-b) \iff m \mid (a-b) \iff a \equiv b \pmod{m}.$$

2. Für $c \neq 0$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

$$ac \equiv bc \pmod{mc} \iff mc \mid c(a-b) \iff m \mid (a-b) \iff a \equiv b \pmod{m}.$$

3. Für $c \neq 0$ setzen wir $d = \operatorname{ggT}(c, m)$ sowie $c = dc'$ und $m = dm'$. Dann ist $\operatorname{ggT}(c', m') = 1$. Es gilt

$$\begin{aligned} ac \equiv bc \pmod{m} &\iff adc' \equiv bdc' \pmod{dm'} \iff ac' \equiv bc' \pmod{m'} \\ &\iff a \equiv b \pmod{m'}, \end{aligned}$$

wobei nacheinander der zweite und der erste Punkt verwendet wurden.

□

5.2 Periodizität von Potenzen modulo m

Wir betrachten hier eine positive ganze Zahl m und für eine ganze Zahl a die Folge der Potenzen a^n modulo m.

Als Beispiel betrachten wir $m = 12$ und $a \in \{3, 5\}$.

n	0	1	2	3	4	$\cdots$
$3^n \bmod 12$	1	3	9	3	9	$\cdots$
$5^n \bmod 12$	1	5	1	5	1	$\cdots$

Wir sehen hier, dass 3^n mod 12 gemischt periodisch mit Vorperiodenlänge 1 und Periodenlänge 2 ist, wohingegen 5^n rein periodisch mit Periodenlänge 2 ist.

Dass dies ein allgemeines Phänomen ist, lehrt der folgende Satz.

Satz 5.2. *Seien $a \in \mathbb{Z}$ und m eine positive ganze Zahl.*

1. *Die Folge $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist periodisch modulo m, d.h., es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\ell > 0$, sodass*

$$a^{n+\ell} \equiv a^n \pmod{m}$$

für alle $n \geq N$ gilt.

2. *Falls $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$, so ist die Folge rein periodisch, d.h. es gibt ein $\ell > 0$, sodass*

$$a^{n+\ell} \equiv a^n \pmod{m}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (das entspricht $N = 0$ in obiger Notation).

Beweis. 1. Da es nur endlich viele Reste modulo m gibt, muss es ein $\ell > 0$ und ein $N \geq 0$ geben, sodass

$$a^{N+\ell} \equiv a^N \pmod{m} \tag{5}$$

gilt. Für alle $n \geq N$ gilt dann (durch Multiplikation mit a^{n-N}), dass $a^{n+\ell} \equiv a^n \pmod{m}$.

2. Da $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$, gilt auch $\mathrm{ggT}(a^N, m) = 1$ und wir dürfen a^N aus (5) kürzen. Somit gilt $a^\ell \equiv a^0 = 1 \pmod{m}$. Durch Multiplikation mit a^n erhalten wir das gewünschte Resultat.

□

Beispiel 5.3. Man bestimme die Einerziffer von $2^{3^{2015}}$.

5.3 Kleiner Satz von Fermat

Satz (5) zeigt, dass es für $\mathrm{ggT}(a, m)$ ein $\ell > 0$ gibt, sodass $a^\ell \equiv a^0 = 1 \pmod{m}$ gilt, macht aber keinerlei Aussage über dieses ℓ. Wir zeigen nun, dass im Fall eines Primzahlmoduls mehr ausgesagt werden kann.

Satz 5.4 (Fermat)**.** *Seien p eine Primzahl und a eine nicht durch p teilbare ganze Zahl. Dann gilt*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{6}$$

Beweis. Wir betrachten die Zahlen $1a$, $2a$, $3a$, …, $(p-1)a$. Diese sind zu p teilerfremd, weil $\mathrm{ggT}(a, p) = 1$ nach Voraussetzung und $\mathrm{ggT}(j, p) = 1$ für $1 \leq j \leq p-1$ gilt. Weiters sind die gennanten Zahlen paarweise inkongruent modulo p: gälte nämlich $ja \equiv ka \pmod{p}$ für gewisse $0 < j < k < p$, so wäre $j \equiv k \pmod{p}$ nach Satz 5.1, ein Widerspruch zum gewählten Bereich von j und k.

Da nun die $p-1$ Zahlen $1a$, $2a$, …, $(p-1)a$ paarweise inkongruent modulo p und zu p teilerfremd sind, müssen sie alle Reste modulo p außer 0 durchlaufen.

Multipliziert man alle diese Zahlen zusammen, so erhält man

$$(1a)(2a)(3a)\ldots((p-1)a) \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) \pmod{p},$$

weil ja links und rechts die gleichen Reste modulo p (lediglich in unterschiedlicher Reihenfolge) stehen.

Wir fassen die Faktoren a auf der linken Seite zusammen und erhalten

$$a^{p-1}(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)) \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) \pmod{p}.$$

Da $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)$ zu p teilerfremd ist, dürfen wir dieses Produkt nach Satz 5.1 kürzen und erhalten wie gefordert

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

□

Multipliziert man (6) mit a, erhält man folgende Folgerung, die offensichtlich auch für $a \equiv 0 \pmod{p}$ gilt.

Korollar 5.5. *Seien p eine Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$, so gilt*

$$a^p \equiv a \pmod{p}. \tag{7}$$

Tatsächlich ist diese Folgerung äquivalent zur Aussage des kleinen Satzes von Fermat, da für $p \nmid a$ der Faktor a auch wieder gekürzt werden darf.

Wir geben einen unabhängigen Beweis des Korollars (und damit des kleinen Satzes von Fermat).

Beweis 2 von Korollar 5.5. Wir beweisen das Korollar durch Induktion nach a.

Für $a = 0$ ist $0^p \equiv 0 \pmod{p}$ zu zeigen, was jedenfalls wahr ist.

Wir nehmen nun an, dass (7) für ein $a \in \mathbb{N}$ gelte. Dann gilt nach dem binomischen Lehrsatz und Satz 3.1, dass

$$(a+1)^p \equiv \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} a^j 1^{p-j} \equiv a^0 + a^p \equiv 1 + a \pmod{p},$$

weil ja $\binom{p}{j}$ für alle bis auf den ersten und letzten Summanden modulo p wegfällt und $a^p \equiv a \pmod{p}$ laut Induktionsannahme gilt. Damit gilt (7) auch für $a+1$.

Die Erweiterung auf $a \in \mathbb{Z}$ folgt daraus, dass es bei der Aussage nur um Reste modulo p geht. □

A Lösungen

Lösung von Beispiel 2.2. Für $b \geq 10$ gilt

$$(b+3)^2 = b^2 + 6b + 9 < b^2 + 7b < b^2 + 8b + 16 = (b+4)^2,$$

somit kann $b^2 + 7b$ kein Quadrat sein und die Gleichung $a^2 = b(b+7)$ hat somit keine Lösungen $b \geq 10$.

Für $b \in \{0, \ldots, 9\}$ erhält man

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9,
$b(b+7)$	0	8	18	30	44	60	78	98	120	144,
a	0	–	–	–	–	–	–	–	–	12.

Die einzigen Lösungen sind damit $(a, b) \in \{(0, 0), (12, 9)\}$. □

Lösung von Beispiel 3.2. Sei $d = \mathrm{ggT}(b, b+7)$. Da $d \mid (b+7)$ und $d \mid b$, gilt auch $d \mid ((b+7)-b) = 7$, somit $d = \mathrm{ggT}(b, b+7) \in \{1, 7\}$. Wir unterscheiden diese beiden Fälle.

1. Es gelte $\mathrm{ggT}(b, b+7) = 1$. Dann folgt

   $$b = x^2,$$
   $$b + 7 = y^2$$

   für passende ganze Zahlen x und y mit $0 \leq x < y$. Es folgt

   $$7 = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x).$$

   Da beide Faktoren der rechten Seite positiv sind und 7 eine Primzahl ist, folgt $y - x = 1$ und $y + x = 7$ und somit $y = 4$, $x = 3$, $b = 9$, $b + 7 = 16$ und $a = xy = 12$.

2. Es gelte $\mathrm{ggT}(b, b+7) = 7$. Dann folgt

   $$b = 7x^2,$$
   $$b + 7 = 7y^2$$

für passende ganze Zahlen x und y mit $0 \leq x < y$. Es folgt

$$7 = 7y^2 - 7x^2 = 7(y-x)(y+x) \iff 1 = (y-x)(y+x).$$

Die einzige mögliche Faktorisierung ist $y - x = y + x = 1$, also $x = 0$ und $y = 1$, woraus sich $b = 0$ und $a = 0$ ergeben.

Die einzigen beiden Lösungen (a, b) sind somit $(0, 0)$ und $(12, 9)$. □

Lösung von Beispiel 3.3. Aus $x^3 - y^3 = 19$ ergibt sich wegen der Monotonie der dritten Potenz sofort $x > y$.

Faktorisieren der linken Seite ergibt

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 19.$$

Da 19 eine Primzahl ist und $x > y$, folgt $x - y \in \{1, 19\}$.

Für $x - y = 19$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 = x^2 + xy + y^2 &= (y+19)^2 + y(y+19) + y^2 = 3y^2 + 57y + 361 \\ &= 3\left(y + \frac{19}{2}\right)^2 + \frac{361}{4} \geq \frac{361}{4} > 1, \end{aligned}$$

ein Widerspruch.

Daher muss $x - y = 1$ gelten. Es ergibt sich

$$19 = x^2 + xy + y^2 = (y+1)^2 + y(y+1) + y^2 = 3y^2 + 3y + 1,$$

was zu

$$y^2 + y - 6 = 0$$

äquivalent ist. Es ergeben sich $y = -3$ und $y = 2$ und daraus die Lösungspaare $(x, y) \in \{(-2, -3), (3, 2)\}$. □

Lösung von Beispiel 4.2. Löst man $b^2 + 7b - a^2 = 0$ nach b auf, erhält man

$$b = -\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{49 + 4a^2}}{2}$$

Daher muss $49 + 4a^2$ eine Quadratzahl sein. Sei $49 + 4a^2 = x^2$ für ein $x > 0$, dann gilt

$$49 = x^2 - 4a^2 = (x + 2a) \cdot (x - 2a).$$

Da $x > 0$ und $a \geq 0$, ist auch $x + 2a > 0$ und damit auch $x - 2a = 49/(x + 2a) > 0$. Man kann 49 auf zwei Arten in positive Faktoren zerlegen ($7 \cdot 7$ oder $49 \cdot 1$). Außerdem gilt wegen $a \geq 0$, dass $x + 2a \geq x - 2a$. Im ersten Fall erhält man $a = 0$, im zweiten $a = 12$. Insgesamt erhält man die Lösungspaare $(a, b) = (0, 0)$ bzw. $(12, 9)$. □

Lösung von Beispiel 4.3. Mit (x, y, z) ist auch $(\pm x, \pm y, \pm z)$ (mit unabhängigen Vorzeichen) eine Lösung der gegebenen Gleichung. Weiters ist die Gleichung symmetrisch in x, y, z. Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 \leq x \leq y \leq z$ voraussetzen.

Es ergibt sich

$$z^2 \leq 10 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 3z^2,$$

woraus $2 \leq z \leq 3$ folgt.

Im Fall $z = 3$ ergibt sich $x^2 + y^2 = 1$, woraus sich sofort $x = 0$ und $y = 1$ ergeben.

Im Fall $z = 2$ ergibt sich $x^2 + y^2 = 6$. Wir erhalten wie vorhin

$$y^2 \leq 6 = x^2 + y^2 \leq 2y^2$$

und damit $2 \leq y \leq 2$, also $y = 2$ und $x^2 = 2$, ein Widerspruch.

Wir erhalten damit die Lösungstripel

$$(x, y, z) \in \{(0, \pm 1, \pm 3), (\pm 1, 0, \pm 3), (0, \pm 3, \pm 1), (\pm 1, \pm 3, 0), (\pm 3, 0, \pm 1), (\pm 3, \pm 1, 0)\},$$

wobei alle Vorzeichen unabhängig sind. □

Lösung von Beispiel 5.3. Wir betrachten 2^k modulo 10:

k		0	1	2	3	4	5
2^k	mod 10	1	2	4	8	6	2

Die Zweierpotenzen sind daher modulo 10 gemischt periodisch mit Periodenlänge 4 und Vorperiodenlänge 1.

Wir müssen daher 3^{2015} modulo 4 bestimmen. Da $3 \equiv -1 \pmod 4$, ist $3^{2015} \equiv -1 \pmod 4 \equiv 3 \pmod 4$. Daher gilt

$$2^{3^{2015}} \equiv 2^3 = 8 \pmod{10}.$$

□