Inhaltlicher Leitfaden für den Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

Version 2015/16

Der Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger (LWA) besteht aus vier Aufgaben. Diese sind normalerweise vier verschiedenen Gebieten zuordenbar, wobei stets eine Aufgabe aus der Geometrie vertreten ist. Die übrigen drei Aufgaben stammen üblicherweise aus den Gebieten elementare Kombinatorik, Gleichungen, Ungleichungen und Zahlentheorie.
Zweck dieses Leitfadens ist es, einen Überblick darüber zu geben, welche Kenntnisse den Teilnehmerinnen und Teilnehmern beim LWA nach Meinung des Aufgabenkomitees nützlich sein können und auch sollen. Insbesondere sollten mit Hilfe dieses Leitfadens alle Angaben und bei jeder Aufgabe zumindest eine offizielle Lösung verständlich sein.
Auf die Angabe von „Ergänzungsvorschlägen“, die nicht direkte Voraussetzungen für den Wettbewerb sind, haben wir verzichtet.

1 Allgemeines und Übergreifendes

- Mathematische Sprache und Ausdrucksweise

  Bemerkung: Die Punkte der folgenden Liste sind weniger als „formeller Stoff“ zu verstehen, sondern als Begriffe, die im Kontext verstanden und korrekt verwendet werden sollten, zum Beispiel bei der Angabe von Lösungsmengen und Äquivalenzumformungen.

  - wahre und falsche Aussagen, „und“, „oder“, „wenn, dann“, „genau dann, wenn“, „notwendig“, „hinreichend“, „äquivalent“
  - Mengen, Vereinigung, Durchschnitt, Paare und Tripel (insbesondere bei Gleichungssystemen)
  - Intervallschreibweise (zum Beispiel bei Lösungsmengen)
  - „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit“, „es genügt zu zeigen“, „Abschwächung“, „Verschärfung“
  - Erkennen von Mustern, Formulierung von Vermutungen und Behauptungen

- Beweismethoden und -techniken

  - Direkter und indirekter Beweis
  - Vollständige Induktion (Deutliche Gliederung in die einzelnen Schritte)
  - Fallunterscheidung

- Rechenregeln für Potenzen $a^0 = 1, a^{b^c} = a^{(b^c)}, \left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$, Konvention $0^0 = 1$

- Wichtige Funktionen

  - Absolutbetrag $|x|$
  - Größte ganze Zahl kleiner oder gleich x. Notation: $\lfloor x \rfloor$

- ◇ Fakultät $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ und $0! = 1$

- Algebraische und sonstige Umformungen
  - ◇ Faktorisierungen $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$, $a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$
  - ◇ Binomischer Lehrsatz für „kleine“ Exponenten

    Bemerkung: Pascalsches Dreieck ohne Formel für Binomialkoeffizienten
  - ◇ Erkennen vollständiger Quadrate, auf Quadrate ergänzen

    Bemerkung: Zum Beispiel $a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2, \quad a^2 + 4a + 9 = (a+2)^2 + 5$
  - ◇ „Rechtecke erkennen“, „auf ein Rechteck ergänzen“

    Bemerkung: $ab + bc + cd + da = (a+c)(b+d), \quad 2ab + 3a + 4b = (a+2)(2b+3) - 6$

- Äquivalenzumformungen: Vorsicht beim Quadrieren und Wurzelziehen.

- Wenn $m > n$ und m, n ganze Zahlen sind, dann gilt bereits $m \geq n+1$.

2 Zahlentheorie

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$, natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

- Teilbarkeit, Rechenregeln für Teilbarkeiten

- Dezimaldarstellung einer Zahl (Basis 10), Ziffernsumme

- Teilbarkeitsregeln durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11 und durch kleine Zweier-, Fünfer- und Zehnerpotenzen

  Etwa:
  - ◇ Eine Zahl ist genau dann durch 2, 4 bzw. 8 teilbar, wenn die aus ihrer letzten, ihren letzten beiden bzw. ihren letzten drei Ziffern im Dezimalsystem gebildete Zahl durch 2, 4 bzw. 8 teilbar ist.
  - ◇ Eine Zahl ist genau dann durch 3 bzw. 9 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 bzw. 9 teilbar ist.
  - ◇ Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn sie auf 5 oder 0 endet.
  - ◇ Eine Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.
  - ◇ Eine Zahl ist genau dann durch 10 teilbar, wenn sie auf 0 endet.
  - ◇ Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre Querdifferenz durch 11 teilbar ist.

- Primzahlen, Primfaktorzerlegung und ihre Eindeutigkeit, Primfaktorzerlegungen spezieller Zahlen, zum Beispiel $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, $111 = 3 \cdot 37$, aktuelle Jahreszahl.

- Größter gemeinsamer Teiler (ggT), kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV), teilerfremde Zahlen, Berechnung über die Primfaktorzerlegung

- Kongruenzen, Rechenregeln für Kongruenzen

- Argumentieren mit Kongruenzen, zum Beispiel Fallunterscheidungen und Aufzeigen von Widersprüchen

  Beispielsweise sind alle Quadratzahlen kongruent zu
  - ◇ 0 oder 1 modulo 3,

- ◇ 0 oder 1 modulo 4,
- ◇ 0, 1 oder 4 modulo 5,
- ◇ 0, 1 oder 4 modulo 8,
- ◇ 0, 1, 4, 5, 6, 9 modulo 10.

- Diophantische Gleichungen

  Eine diophantische Gleichung ist eine Gleichung, für die ganzzahlige Lösungen gesucht werden.

  Bemerkung: Hier geht es nicht um spezielle Typen diophantischer Gleichungen (zum Beispiel lineare diophantische Gleichungen), sondern vielmehr um Ad–hoc–Überlegungen mit Teilbarkeit und/oder Kongruenzen. Dabei kann es durchaus sein, dass die Lösungsmenge leer ist und trotzdem die Formulierung „Man finde alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung …“ verwendet wird.

3 Kombinatorik und Diverses

3.1 Einfaches Abzählen

Beispiel 3.1: Wieviele Elemente hat die Menge $\{4, 5, \dots, n\}$? Antwort: $n - 3$.
„Es ist immer eins mehr oder weniger als man glaubt.“

Beispiel 3.2: Wieviele Zahlen in $\{100, \dots 1000\}$ sind durch 5 teilbar? Antwort: $200-20+1 = 181$.

Beispiel 3.3: Wieviele Ziffern muss man schreiben, wenn man die Zahlen von 1 bis 100 aufschreibt? Antwort: $100 + 91 + 1 = 192$.

3.2 Abzählen anhand konkreter Beispiele

Beispiel 3.4: Wieviele natürliche Zahlen kleiner als 1000 haben nur ungerade Ziffern?
Antwort: Wir behandeln die Zahlen mit einer, zwei und drei Ziffern getrennt und müssen diese Anzahlen am Ende addieren. Es gibt fünf Möglichkeiten, eine ungerade einstellige natürliche Zahl zu wählen. Bei zweistelligen Zahlen ist die Wahl der beiden Ziffern voneinander unabhängig, wir erhalten also $5{\cdot}5 = 25$ Möglichkeiten. Bei dreistelligen Zahlen ergibt dasselbe Argument $5{\cdot}5{\cdot}5 = 125$ Möglichkeiten. Daher gibt es insgesamt $5 + 25 + 125 = 155$ solche Zahlen.

- Bei nichtüberlappenden Möglichkeiten für die Wahl des gesuchten Objektes sind die Anzahlen für die verschiedenen Möglichkeiten zu addieren.
- Bei unabhängigen Möglichkeiten für die Wahl von Teilaspekten des gesuchten Objektes sind die Anzahlen für diese Möglichkeiten zu multiplizieren.
- Siebformel für zwei Mengen: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Beispiel 3.5 (LWA 2013/2)**:** (Abzählen von Wegen im Quadratgitter)

Beispiel 3.6: Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \le n \le 30$ sind durch 2 oder 3 (oder beides) teilbar? Antwort: $15 + 10 - 5 = 20$.

3.3 Vollständige Induktion (auch bei formelfreier Angabe)

Beispiel 3.7 (LWA 2006)**:** Sei n eine gerade positive ganze Zahl. Wir betrachten Rechtecke mit den Seitenlängen k und $k + 1$, wobei k größer als $n/2$ und höchstens gleich n ist. Man zeige: Für alle geraden natürlichen Zahlen n ist die Summe der Flächen der jeweils betrachteten Rechtecke gleich

$$\frac{n(n+2)(7n+4)}{24}.$$

Beispiel 3.8: Türme von Hanoi

Beispiel 3.9: Gegeben seien endliche viele Kreise, die die Ebene in Gebiete zerlegen. Zeige, dass es möglich ist, jedes Gebiet mit einer von zwei Farben (schwarz oder weiß) zu färben, sodass keine zwei benachbarten Gebiete gleich gefärbt sind. (Zwei Gebiete heißen „benachbart", wenn ihre Ränder ein Kreisbogenstück positiver Länge gemeinsam haben.)

3.4 Grundlegende Beweisstrategien

Bemerkung: Die Unmöglichkeit einer gewissen Situation zeigt man oft indirekt. Um hingegen zu zeigen, dass eine Situation tatsächlich auftreten kann, muss man ein konkretes Beispiel angeben. Zum Beispiel besteht eine wichtige Methode zur Bestimmung einer Maximal–/Minimalzahl darin, durch Angabe eines Beispiels zu zeigen, dass das Ergebnis tatsächlich erreichbar ist und weiters (zum Beispiel indirekt), dass eine Verbesserung nicht möglich ist.

Beispiel 3.10: Können zwei Personen drei (eventuell verschieden große) Stück Käse immer so aufteilen, dass jeder ein ganzes Stück bekommt, das dritte Stück geschickt geteilt wird und dann jeder gleich viel Käse hat?
Antwort: Ja, es ist immer möglich. Wir müssen daher eine Methode angeben, die immer funktioniert: Das größte Stück Käse ist immer größer als die Differenz zwischen den Größen der beiden anderen Käsestücke. Wir können daher zunächst die beiden kleinsten Käsestücke im Ganzen verteilen, dann vom größten Käsestück die Differenz der beiden anderen Stücke abschneiden und der Person mit weniger Käse geben und schließlich den Rest vom größten Käsestück halbieren und gerecht aufteilen.

Beispiel 3.11 (LWA 2012/2)**:** Ein Briefträger will n Pakete mit Gewichten $1, 2, 3, \ldots, n$ in drei genau gleich schwere Gruppen aufteilen. Kann ihm das gelingen, falls

1. $n = 2011$
2. $n = 2012$

gilt?

Beispiel 3.12: Unter neun Münzen befindet sich genau eine falsche Münze, die leichter als die anderen ist, die alle gleich schwer sind.
Wieviele Wägungen auf einer Balkenwaage sind mindestens notwendig, um die eine falsche Münze sicher finden zu können?
Antwort: Zwei Wägungen. Wir geben zuerst eine Vorgangsweise an, die immer mit zwei Wägungen funktioniert und begründen dann, dass eine Wägung nicht immer ausreichen kann.
Zunächst lege man auf jede Schale der Balkenwaage drei Münzen. Ist eine Waagschale nun leichter als die andere, so befindet sich die falsche Münze unter den drei Münzen auf dieser Waagschale. Sind die beiden Waagschalen aber gleich schwer, so befindet sich die falsche Münze unter den drei noch nicht verwendeten Münzen.
Von den entsprechenden drei Münzen lege man nun eine Münze auf die linke Waagschale und eine Münze auf die rechte Waagschale. Ist eine der beiden Waagschalen leichter als die andere, so befindet sich dort die falsche Münze. Sind die beiden Waagschalen aber gleich schwer, so ist die falsche Münze, diejenige der drei Münzen, die in der zweiten Wägung nicht verwendet wurde.
Zwei Wägungen sind also immer ausreichend.
Andererseits ergibt aber eine einzige Wägung nur drei mögliche Antworten: Die linke Waagschale ist leichter, die rechte Waagschale ist leichter oder die beiden Waagschalen sind gleich schwer. Drei mögliche Antworten sind aber nicht ausreichend, um zwischen den neun Möglichkeiten für die falsche Münze zu entscheiden.

3.5 Einfache Spiele

Hier können als Spiel formulierte Aufgaben vorkommen, für deren Lösung nur Wissen nötig ist, das ohnehin bereits Stoff ist. Es geht also in erster Linie darum, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer mit der Einkleidung einer Aufgabe als Spiel vertraut sind. Es ist hier jedenfalls nicht gemeint, Spieltheorie mit Gewinn- und Verlustpositionen einzuführen.

Beispiel 3.13: Auf einer Tafel stehen die Zahlen von 1 bis 100. Alice darf in jedem Spielzug zwei Zahlen durch deren Summe ersetzen. Kann sie erreichen, dass am Schluss eine einzige ungerade Zahl auf der Tafel steht?

Beispiel 3.14: Alice und Bob wählen gemeinsam eine Zahl mit 2015 Stellen, indem sie abwechselnd eine bestimmte Ziffer festlegen, wobei Alice beginnt.
Kann Alice immer erreichen, dass diese Zahl durch 30 teilbar ist?

4 Gleichungen

- Grundmenge, Definitionsmenge, Lösungsmenge
- Lineare Gleichungen
- Quadratische Gleichungen
  - ◇ Lösungsformel
  - ◇ Vietasche Sätze
  - ◇ Diskriminante und Charakterisierung der Anzahl der reellen Lösungen
- Produkt–Null–Gleichungen: Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.
- Gleichungen mit rationalen Funktionen (Rationale Funktionen sind Quotienten von Polynomen.)
- Einfache Gleichungssysteme

  Beispiel 4.1 (LWA 2005)**:** Man bestimme alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die gleichzeitig die folgenden drei Gleichungen erfüllen.

  $$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \{y\} &= z, \\ \lfloor y \rfloor + \{z\} &= x, \\ \lfloor z \rfloor + \{x\} &= y. \end{aligned}$$

  (Dabei bedeutet $\{a\}$ den gebrochenen Anteil von $a \in \mathbb{R}$, also $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$.)
- Einfache Exponentialgleichungen

  Beispiel 4.2 (LWA 2002)**:** Man zeige: Es gibt keine positive rationale Zahl x mit $x^{\lfloor x \rfloor} = \frac{9}{2}$.
- Gleichungen mit Quadratwurzeln, $\lfloor \cdot \rfloor$–Funktion, Absolutbetrag, ... (Fallunterscheidung!)
- Gleichungen mit Parametern (Fallunterscheidungen!)

5 Ungleichungen

- Rechnen mit Ungleichungen – Äquivalenzumformungen

  Addieren und Subtrahieren eines Terms. Multiplikation einer Ungleichung mit einer positiven Zahl erhält das Ungleichheitszeichen, Multiplikation mit einer negativen Zahlen kehrt das Ungleichheitszeichen um. Vorsicht beim Quadrieren und Wurzelziehen, falls die auftretenden Terme negative Werte annehmen können.

- Lösen von linearen Ungleichungen, quadratischen Ungleichungen, rationalen Ungleichungen, Ungleichungen mit Quadratwurzeln, Absolutbetrag, $\lfloor \cdot \rfloor$–Funktion und Fakultäten, sowie mit Parametern (vgl. Gleichungen). Fallunterscheidungen!

  Beispiel 5.1: Man bestimme alle reellen Zahlen x, für die $\lfloor x \rfloor \leq 3x$ gilt.

- Beweis von allgemeingültigen Ungleichungen

  Beispiel 5.2 (LWA 2009)**:** Es seien x und y nichtnegative reelle Zahlen. Man zeige:

  $$(x + y^3)(x^3 + y) \geq 4x^2y^2.$$

  Wann gilt Gleichheit?

  Die Ungleichungen können auch über ganzen oder natürlichen Zahlen zu beweisen sein, zum Beispiel mit vollständiger Induktion.

  Beispiel 5.3: Man zeige, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ gilt: $n! > 2^n$

- Grundlegende Ungleichungen (mit Kenntnis des Gleichheitsfalls)
  - Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$.
  - Die Summe und das Produkt von Quadraten ist immer größer gleich Null. Auf Quadrate ergänzen.

    Beispiel 5.4: Es seien a, b, c, d positive reelle Zahlen. Beweise:

    $$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a + b + c)d$$

  - Mittelungleichung für zwei Variablen: Für $x,\ y > 0$ gilt

    $$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

    Gleichheit genau für $x = y$.
  - Für $x,\ y > 0$ gilt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.
  - $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz,\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$
  - $x^2 \pm xy + y^2 \geq 0,\ x,\ y \in \mathbb{R}$.
  - $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4,\ x,\ y > 0$.
  - $|x + y| \leq |x| + |y|$ mit Gleichheit genau für $xy \geq 0$.

- Äquivalenzumformungen, Verschärfung und Abschwächung, klare Unterscheidung von bereits Bewiesenem (bzw. Bekanntem) und noch zu Beweisendem

  Beispiel 5.5: Man beweise für alle reellen Zahlen x, y die Ungleichung

  $$\frac{x^2 + 1}{y} + \frac{y^2 + 1}{x} \geq 4$$

  Mit $x^2 + 1 \geq 2x$ und $y^2 + 1 \geq 2y$ kann man diese Ungleichung zu der bekannten Basisungleichung

  $$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \qquad x, y > 0$$

  verschärfen.

6 Geometrie

- Winkelschreibweise $\angle ABC$ verstehen und verwenden können
- Supplementär- (oder Ergänzungs-), Scheitel- und Parallelwinkel erkennen können
- Die Winkelsumme im Dreieck ist $180°$, die Winkelsumme im Viereck ist $360°$,...
- Definition und Eigenschaften spezieller Dreiecke kennen:
    - ◇ Rechtwinkeliges Dreieck
    - ◇ Gleichseitiges Dreieck
    - ◇ Gleichschenkeliges Dreieck
- Eine „Winkeljagd" durchführen und strukturiert aufschreiben können

  Bemerkung: Insbesondere heißt das, dass die einzelnen Schritte der Winkeljagd im Text der Reihenfolge nach erklärt und beschrieben werden, und nicht nur in der Skizze eingezeichnet werden.
- Definition der Strecken- und Winkelsymmetrale
    - ◇ Ein Punkt auf der Streckensymmetrale hat zu den beiden Endpunkten der Strecke den gleichen Abstand.
    - ◇ Ein Punkt auf der Winkelsymmetrale hat zu den beiden Schenkeln des Winkels den gleichen Abstand.
- Satzgruppe des Pythagoras: Satz von Pythagoras, Höhensatz, Kathetensatz
- Thaleskreise erkennen
- Kongruente Dreiecke mit Hilfe der Kongruenzsätze erkennen können
- Definition und Eigenschaften spezieller Vierecke und deren Zusammenhang untereinander (zum Beispiel ein Rechteck ist ein Parallelogramm, aber nicht umgekehrt):
    - ◇ Rechteck
    - ◇ Quadrat
    - ◇ Parallelogramm
    - ◇ Raute, Rhombus
    - ◇ Trapez
    - ◇ Deltoid oder Drachenviereck
    - ◇ konvexes Viereck:
        - ∗ Alle (Innen-)Winkel sind kleiner als $180°$.
- Merkwürdige Punkte im Dreieck:
    - ◇ Höhenschnittpunkt
    - ◇ Umkreismittelpunkt
    - ◇ Inkreismittelpunkt
    - ◇ Schwerpunkt
        - ∗ Die Schwerlinien teilen das Dreieck in sechs flächengleiche Dreiecke.
        - ∗ Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinie im Verhältnis $1 : 2$.
- Umkreis und Inkreis eines Dreiecks

- Peripheriewinkelsatz inkl. Zentriwinkel
- Erkennen von Sehnenvierecken: Gegenüberliegende Winkel ergänzen sich auf 180° oder über Peripheriewinkelsatz.
- Berührende Kreise: Abstand der Mittelpunkte ist Summe bzw. Differenz der Radien.
- Strahlensatz in allen Varianten
- Ähnliche Dreiecke in folgenden Situationen
  - Zwei Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn die einander entsprechenden Winkel gleich groß sind.
  - Zwei Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn die Seitenverhältnisse gleich sind.
- Spiegelung an einer Geraden verstehen, konstruieren und folgende Eigenschaft kennen:

  Die Längen von Strecken und die Größen von Winkeln bleiben erhalten.
- Sehne und Tangente an einen Kreis
  - Die Tangente steht im Berührpunkt normal auf den Radius.
  - Seien A ein Punkt außerhalb des Kreises und P und Q die Berührpunkte der zwei Tangenten durch A an den Kreis. Dann sind die Tangentenabschnitte AP und AQ gleich lang.
- Flächenformeln für das Dreieck: $A = \frac{a \cdot h_a}{2} = r \cdot s$ und für spezielle Vierecke: Rechteck, Parallelogramm, Trapez, Deltoid. Eine gegebene Fläche so in Dreiecke zerlegen, dass die Fläche einfach berechnet werden kann.
- Teilverhältnis bei innerer Teilung
- Für positive reelle Zahlen a, b, c gilt: Es gibt genau dann ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c wenn $a + b > c$, $b + c > a$, $a + c > b$ gelten.

Aufgabenkomitee für den LWA und den GWF 2016

Karl Czakler
Richard Henner
Gerhard Kirchner
Gottfried Perz