Inhaltlicher Leitfaden für den Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

Version 2015/16

Der Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene (GWF) besteht aus vier Aufgaben. Diese sind normalerweise vier verschiedenen Gebieten zuordenbar, wobei stets eine Aufgabe aus der Geometrie vertreten ist. Bisher gab es meistens dazu noch drei Aufgaben aus den Gebieten Folgen/Reihen, Gleichungen/Gleichungssysteme, Ungleichungen und Zahlentheorie. Ab sofort sollen gemäß den Gebräuchen der Internationalen Wettbewerbe (IMO/MEMO) auch Aufgaben aus der Kombinatorik vorkommen. Zweck dieses Leitfadens ist es, einen Überblick darüber zu geben, welche Kenntnisse den Teilnehmerinnen und Teilnehmern beim GWF nach Meinung des Aufgabenkomitees nützlich sein können und auch sollen. Insbesondere sollten mit Hilfe dieses Leitfadens alle Angaben und bei jeder Aufgabe zumindest eine offizielle Lösung verständlich sein.
Alle Themen des Leitfadens zum LWA gehören – auch wo dies nicht extra erwähnt ist – zum Stoff für den GWF und sollen daher geübt bzw. weiter vertieft werden. Auf die Angabe von „Ergänzungsvorschlägen“, die nicht direkte Voraussetzungen für den Wettbewerb sind, haben wir verzichtet.

1 Allgemeines und Übergreifendes

1.1 Begriffe und Beweismethoden

- Teilmengen, Potenzmenge, kartesisches Produkt
- Fakultät, Binomialkoeffizient
- Abbruch eines Verfahrens durch Kleinerwerden, zum Beispiel Euklidischer Algorithmus
- Bedeutung und Verwendung von „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ (o. B. d. A.)
- Einfache Teleskopsummen und -produkte, zum Beispiel

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Bemerkung: Summen- und Produktzeichen werden beim GWF in der Angabe vermieden, können aber doch für die Lösung nützlich oder erforderlich sein, insb. für klare und eindeutige Notation.

1.2 Heuristik

- Extremalprinzip: Es ist oft sinnvoll, das größte/kleinste Element zu betrachten.
- Es ist oft sinnvoll, Zahlen der Reihe nach anzuordnen.
- Es ist oft sinnvoll, kleine Fälle zu betrachten, speziell auch dann, wenn in der Angabe nicht n steht, sondern 100 oder 2014.

Beispiel 1.1: Finde alle positiven ganzen Zahlen a, b, c mit

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Beispiel 1.2: In Beispiel 3.8 (siehe Seite 4) ist es vollkommen ausreichend, statt einer Zahl mit 2015 Stellen eine Zahl mit drei Stellen zu betrachten, um zu verstehen, wie Alice vorgehen muss.

2 Zahlentheorie

- „Aufeinanderfolgende Quadrate"

  Falls für ganze Zahlen a und x die Ungleichung $a^2 < x < (a+1)^2$ gilt, so kann x keine Quadratzahl sein. Zum Beispiel ist $x = b^2 + 2b + 3$ für $b \in \mathbb{Z}$ „selten" eine Quadratzahl (und Überprüfen der kleinen Fälle zeigt, dass x nie eine ist).

- Vertiefung Teilbarkeit, zum Beispiel Teiler und Vielfache (zum Beispiel $(3n)!/n^3$ ist ganz; wenn p ein Quadrat teilt, so auch p^2).

- Elementare quadratische diophantische Gleichungen in zwei Variablen, bei denen man nach quadratischem Ergänzen (bzw. Substitution mit der quadratischen Lösungsformel) einen der drei elementaren Typen

  ◇ $x^2 + ky^2 = a$ für positives k: nur endlich viele Lösungen durch Probieren aller Werte von x oder y.

  ◇ $x^2 - k^2y^2 = a$: faktorisieren und Fälle unterscheiden

  ◇ $x^2 = ky + d$: quadratische Reste modulo k

  erhält. Nicht zum GWF–Stoff gehören also Aufgaben, die auf eine Pellsche Gleichung $x^2 - Dy^2 = a$ führen, wo D kein Quadrat ist.

- Ad–hoc–Methoden für andere einfache diophantische Gleichungen wie $x^3 - y^3 = 19$ oder $x^2 + y^2 + z^2 = 10$.

- Vertiefung Kongruenzen

  Wenn $ac \equiv bc \pmod{m}$ und $\mathrm{ggT}(m, c) = 1$, so gilt auch $a \equiv b \pmod{m}$. Wenn $ac \equiv bc \pmod{mc}$ und $c \neq 0$, so gilt auch $a \equiv b \pmod{m}$.

- Periodizität von $a^k \bmod m$ (ohne Ordnung)

  Beispiel 2.1: Bestimme die Einerziffer der Zahl $2^{3^{2015}}$.

- Kleiner Satz von Fermat

  Wenn p eine Primzahl und a eine ganze Zahl ist, die nicht durch p teilbar ist, so gilt $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

3 Kombinatorik

3.1 Abzählen, Zählregeln (auch mit Variablen)

- Bei nichtüberlappenden Möglichkeiten für die Wahl des gesuchten Objektes sind die Anzahlen für die verschiedenen Möglichkeiten zu addieren.

- Bei unabhängigen Möglichkeiten für die Wahl von Teilaspekten des gesuchten Objektes sind die Anzahlen für diese Möglichkeiten zu multiplizieren.

- Symmetriefaktoren: Wurde jedes Objekt mehrfach (gleich oft) gezählt, muss am Schluss durch den entsprechenden Symmetriefaktor dividiert werden.

- Schubfachschluss

Beispiel 3.1: Wieviele Möglichkeiten gibt es, in einem Eisgeschäft mit 12 Eissorten drei verschiedene Eiskugeln auszuwählen, wenn es auf die Reihenfolge ankommt / nicht ankommt ?
Antwort: $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$ bzw. $1320/6 = 220$.

Beispiel 3.2: Einführung der Fakultät: Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Zahlen 1 bis n in einer Reihe anzuordnen?
Antwort: Es gibt n Möglichkeiten, die erste Zahl zu wählen, $n - 1$ Möglichkeiten, die zweite Zahl zu wählen, usw, bis schließlich nur mehr eine Möglichkeit bleibt, die letzte Zahl zu wählen. Die verbleibenden Möglichkeiten hängen zwar von den schon gewählten Zahlen ab, die Anzahl der verbleibenden Möglichkeiten ist aber unabhängig von den gewählten Zahlen. Daher können wir die Anzahlen der Möglichkeiten einfach multiplizieren, um die Antwort

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$$

zu erhalten. Diese Zahl wird mit $n!$ bezeichnet (gesprochen „n Fakultät“ oder „n Faktorielle“).

Beispiel 3.3: Einführung des Binomialkoeffizienten: Auswahl einer Teilmenge, Pascalsches Dreieck, Formel mit Fakultäten

Beispiel 3.4: Zeige, dass unter 11 natürlichen Zahlen immer zwei Zahlen mit derselben Einerstelle sind.
Antwort: Da es nur 10 verschiedene Möglichkeiten für die Einerstelle einer ganzen Zahl gibt, kann es nicht 11 verschiedene Einerstellen geben. Also müssen zwei davon gleich sein.

Beispiel 3.5: Wieviele verschiedene ganze Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10$ muss man mindestens zufällig wählen, damit sicher eine gerade Zahl dabei ist?
Antwort: Da es nur fünf ungerade derartige Zahlen gibt, ist bei sechs gewählten Zahlen sicher eine gerade Zahl dabei. Umgekehrt ist es möglich, die fünf Zahlen $1, 3, 5, 7, 9$ zu wählen, ohne eine gerade Zahl zu erwischen. Man muss also mindestens sechs Zahlen wählen, um sicher eine gerade Zahl zu erhalten.

Beispiel 3.6: Unter sechs Personen sind manche miteinander befreundet und manche nicht miteinander befreundet. Zeige, dass es drei Personen gibt, die entweder alle drei miteinander befreundet sind oder alle drei nicht miteinander befreundet sind.
Antwort: Diese Aufgabe sollte unbedingt als (informell eingeführter) Graph (mit Kanten in zwei Farben) auf der Tafel dargestellt werden, um darauf hinzuweisen, dass die Einkleidung der Aufgabe für den mathematischen Inhalt unerheblich ist.
Für eine beliebig ausgewählte Person muss es unter den fünf anderen Personen entweder drei geben, mit denen sie befreundet ist oder drei geben, mit denen sie nicht befreundet ist. Sie sei daher o. B. d. A. mit drei anderen Personen befreundet.
Sind nun zwei dieser drei Personen auch miteinander befreundet, haben wir zusammen mit der ursprünglich ausgewählten Person drei befreundete Personen gefunden. Sind hingegen diese drei Personen alle nicht miteinander befreundet, so haben wir drei Personen gefunden, die nicht miteinander befreundet sind.
In beiden Fällen haben wir also das Gewünschte gezeigt.

3.2 Einfache Spiele

Hier sollen als Spiel formulierte Aufgaben behandelt werden, für deren Lösung nur Wissen nötig ist, das ohnehin bereits Stoff ist. Es geht also in erster Linie darum, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer mit der Einkleidung einer Aufgabe als Spiel vertraut sind. Es ist hier jedenfalls nicht gemeint, Spieltheorie mit Gewinn- und Verlustpositionen einzuführen.

Beispiel 3.7: Auf einer Tafel stehen die Zahlen von 1 bis 100. Alice darf in jedem Spielzug zwei Zahlen durch deren Summe ersetzen. Kann sie erreichen, dass am Schluss eine einzige ungerade Zahl auf der Tafel steht?

Beispiel 3.8: Alice und Bob wählen gemeinsam eine Zahl mit 2015 Stellen, indem sie abwechselnd eine bestimmte Ziffer festlegen, wobei Alice beginnt.
Kann Alice immer erreichen, dass diese Zahl durch 30 teilbar ist?

4 Algebra

4.1 Gleichungen – Polynome

Polynomiale Gleichungen höheren Grades

- Erraten von Lösungen: Eine ganzzahlige Nullstelle teilt das konstante Glied des Polynoms
- Abspalten von Linearfaktoren
- Substitutionen, zum Beispiel $x^2 = u$ bei geraden Polynomen, $x + \frac{1}{x} = u$ bei symmetrischen Polynomen
- Horner–Schema
- Vietasche Sätze für Gleichungen höheren Grades

Einfache Faktorenzerlegungen von Polynomen

- $x - y \mid x^n - y^n$
- $x + y \mid x^n + y^n$ für ungerades n
- Mittleren Term quadratisch ergänzen

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Lösen verschiedener Gleichungen

Einüben und Ausbau der Techniken aus dem Anfängerkurs.

Beispiel 4.1 (GWF 2004)**:** Man löse im Bereich der reellen Zahlen die Gleichung

$$\sqrt{4 - x\sqrt{4 - (x-2)\sqrt{1 + (x-5)(x-7)}}} = \frac{5x - 6 - x^2}{2}$$

4.2 Ungleichungen

Einüben und Ausbau der Techniken aus dem Anfängerkurs.

- Anwenden einer monoton wachsenden Funktion auf beiden Seiten einer Ungleichung bzw. Anwenden einer monoton fallenden Funktion auf beiden Seiten einer Ungleichung mit Umkehren des Ungleichheitszeichens, als Schlussfolgerung. (Bei streng monotonen Funktionen als Äquivalenzumformungen)
- Polynomiale Ungleichungen

Beispiel 4.2 (GWF 2012)**:** Man beweise für alle reellen Zahlen x die Ungleichung

$$x + x^3 - x^4 - x^6 < 1$$

Einfache Substitutionen

Allgemeingültige Ungleichungen:

- Die Mittelungleichung für mehrere Variablen: Für $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ gilt:

  $$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

  Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

- Die Ungleichung $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ $(a, b \in \mathbb{R}, x, y > 0)$ sowie die mit Induktion zu beweisende Verallgemeinerung

  $$\frac{a_1^2}{x_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{x_1 + \ldots + x_n}, \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ x_1, \ldots, x_n > 0.$$

  Gleichheit genau für $\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \ldots = \frac{a_n}{x_n}$

- Speziell

  $$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\Big(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\Big) \geq n^2, \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$$

  Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

- Betragsungleichung

  $$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

Bestimmung von bestmöglichen Konstanten

Beispiel 4.3: Man bestimme die kleinste Konstante C und die größte Konstante c, sodass für alle $x, y \geq 0$ die folgende Ungleichungskette gilt:

$$C(x + y) \geq \sqrt{x^2 + 3xy + y^2} \geq c(x + y)$$

Bemerkung: Wie in diesem Beispiel sollen dabei die bestmöglichen Konstanten durch Einsetzen spezieller Werte ($x = y = 1$ für C bzw. $x = 0$, $y = 1$ für c) bestimmbar sein, Stetigkeits– bzw. Grenzwert–Argumente sollen nicht nötig sein.

4.3 Folgen und Reihen

- Schreibweise für Folgen: etwa $(a_n)_{n \geq 0} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$
- Explizite und rekursive Definition einer Folge
- Arithmetische Folge und Reihe
- Geometrische Folge und Reihe
- Potenzsummen

  $$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- Die Fibonacci–Folge
- Lösen von elementaren Rekursionen erster Ordnung

5 Geometrie

- Peripheriewinkelsatz (auch Randwinkelsatz) samt Umkehrung, Zentriwinkelsatz und Tangentenwinkelsatz
- Sehnenvierecke erkennen mit der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes.
- Der Umkreisradius R eines Dreiecks mit Seiten a, b und c und Fläche A ist $\frac{a \cdot b \cdot c}{4A}$.
- Der Schnittpunkt der Innenwinkelsymmetrale mit der gegenüberliegenden Seite teilt diese innen im Verhältnis der anliegenden Seiten.
- Eigenschaften des Höhenschnittpunkts und der Höhenfußpunkte, beispielsweise
  - ◇ Der Höhenschnittpunkt gespiegelt an den Seiten des Dreiecks liegt auf dem Umkreis.
  - ◇ Zwei Eckpunkte eines Dreiecks und die zwei Höhenfußpunkte der Höhen durch diese beiden Eckpunkt liegen auf einem Kreis.
  - ◇ Der Höhenschnittpunkt, ein Eckpunkt und die zwei Höhenfußpunkte der Höhen durch die beiden anderen Eckpunkt liegen auf einem Kreis.
  - ◇ Der Höhenschnittpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks ist der Inkreismittelpunkt des Höhenfußpunktdreiecks.
- Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seitenverhältnisse und die eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (SWS).

  Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seitenverhältnisse übereinstimmen und jener der längeren Seite gegenüberliegende Winkel übereinstimmt.
- Ankreise eines Dreiecks
- Süd-, Nordpolsatz
- Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seitenlängen.
- Tangentenviereck: Die Summen von je zwei gegenüberliegenden Seitenlängen ist gleich groß.
- Dreiecksungleichungen: In jedem Dreieck gilt $a + b > c > |a - b|$ für die Seiten a, b, c.

Beispiel 5.1: In einem konvexen Viereck sei D die Summe der Diagonalenlängen und U der Umfang. Man zeige: $\frac{1}{2} < \frac{D}{U} < 1$.

Aufgabenkomitee für den LWA und den GWF 2016

Karl Czakler
Richard Henner
Gerhard Kirchner
Gottfried Perz