IMO 2022 Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 1: Die Osloer Bank gibt Münzen aus Aluminium (mit A bezeichnet) und aus Bronze (mit B bezeichnet) heraus. Marianne hat n Aluminiummünzen und n Bronzemünzen beliebig in einer Reihe angeordnet. Eine *Kette* sei eine Teilfolge aufeinanderfolgender Münzen aus gleichem Material. Für eine gegebene positive ganze Zahl $k \leqslant 2n$ führt Marianne wiederholt die folgende Operation durch: Sie identifiziert die längste Kette, die die k-te Münze von links enthält, und verschiebt alle Münzen dieser Kette an das linke Ende der Reihe. Zum Beispiel erhält sie für $n = 4$ und $k = 4$ ausgehend von der Konfiguration $AABBBABA$ nacheinander

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots.$$

Man bestimme alle Paare (n, k) mit $1 \leqslant k \leqslant 2n$, sodass für jede Ausgangskonfiguration zu irgendeinem Zeitpunkt im Verlauf des Prozesses die n am weitesten links liegenden Münzen aus dem gleichen Material sind.

Lösung: Dies gilt genau für Paare $(n.k)$ mit $n \le k \le \frac{3n+1}{2}$.
Wir bezeichnen als *Block* eine aufeinanderfolgende Gruppe von Münzen aus demselben Material mit jeweils lokal maximaler Länge. Es bezeichne M^b einen Block der Länge b aus dem Metall M.
Wir bemerken, dass die Anordnung $A^{n-1}C^{n-1}A^1C^1$ für $k < n$ bei der Operation unverändert bleibt, womit es in diesem Fall niemals eine Konfiguration mit n linkerseits aufeinanderfolgenden Münzen gleicher Art geben wird.
Gilt nun $k > \frac{3n+1}{2}$, so definieren wir $a = k - n - 1$ und $b = 2n - k + 1$. Dann gilt

$$2a + b = k - 1 < k$$

und

$$2b + a = 3n - k + 1 = \frac{2(3n+1)}{2} - k < 2k - k = k.$$

In diesem Fall hat die Konfiguration $A^aB^bA^bB^a$ wegen

$$A^aB^bA^bB^a \to B^aA^aB^bA^b \to A^bB^aA^aB^b \to B^bA^bB^aA^a \to A^aB^bA^bB^a \to \dots$$

auch nach beliebig vielen Operationsschritten immer vier Blöcke, und somit niemals eine Konfiguration mit n linkerseits aufeinanderfolgenden Münzen gleicher Art.
Ein Paar (n, k) kann also nur dann die gewünschte Eigenschaft haben, wenn $n \le k \le \frac{3n+1}{2}$ gilt. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Eigenschaft für derartige Paare jedenfalls erfüllt ist.
Die Anzahl der Blöcke in einer Konfiguration kann bei Ausführung der Operation offensichtlich niemals ansteigen. Wir wollen nun zeigen, dass ihr Anzahl unter der gegebenen Voraussetzung nach einer endlichen Anzahl von Operationen sicher kleiner wird, wenn es mehr als zwei Blöcke gibt. Daraus folgt dann unmittelbar die Gültigkeit der Behauptung.
Wir betrachten zu diesem Zweck eine beliebige Konfiguration mit $c \ge 3$ Blöcken. Wegen $n \ge k$ ist der zu bewegende Block sicher nicht der links liegende, da dieser aus höchstens n Münzen besteht. (Mit $k = n$ könnte der linke Block aus n Münzen bestehen, aber in diesem Fall ist die gewünschte Eigenschaft bereits erfüllt.) Bewegt man einen Block, der nicht ganz links oder

ganz rechts liegt, vereinigen sich die beiden angrenzenden Blöcke, womit sich die Anzahl der Blöcke, wie behauptet, verringert. Es bleibt also nur mehr der Fall zu betrachten, in dem der Block ganz rechts zu bewegen ist.

Ist c ungerade, so sind die Münzen des linken und rechten Blocks aus demselben Material, und diese Blöcke werden daher durch die Operation zusammengeführt, was wiederum die Anzahl der Blöcke verringert. Nun sei $c \geq 4$ gerade. Wir nehmen an, es würde in weiterer Folge immer eine Konfiguration entstehen, in der der i-te Block die Länge a_i hat, und jede Operation nur den rechts liegenden Block bewegt. Dann haben wir

$$A^{a_1} \dots A^{a_{c-1}} B^{a_c} \to B^{a_c} A^{a_1} \dots A^{a_{c-1}} \to A^{a_{c-1}} B^{a_c} A^{a_1} \dots B^{a_{c-2}} \to \cdots .$$

Da immer nur der rechte Block bewegt wird, gilt $k > 2n - a_i$ für alle i. Wegen $\sum a_i = 2n$, erhalten wir durch Addition über alle i

$$ck > 2cn - \sum a_i = 2(c-1)n,$$

und somit

$$k > \frac{c-1}{c} \cdot 2n \geq \frac{3}{4} \cdot 2n = \frac{3n}{2}.$$

Dies ist (da n gerade ist) im Widerspruch zu $k \leq \frac{3n+1}{2}$, und wir sehen, dass die Operation irgendwann zu einer Verringerung der Anzahl der Blöcke führen muss. $\square$

Aufgabe 2: Es sei $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, für die es zu jedem $x \in \mathbb{R}^+$ genau ein $y \in \mathbb{R}^+$ gibt mit

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Lösung: Die einzige Funktion mit dieser Eigenschaft ist $f(x) = \frac{1}{x}$.

Es ist leicht einzusehen, dass diese Funktion die Bedingung erfüllt, da es bekannt ist, dass

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

gilt, mit Gleichheit genau für $x = y$. Wir erhalten also für diese Funktion

$$xf(y) + yf(x) \leq 2 \iff \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq 2$$

genau für $y = x$, und es gibt somit zu jedem Wert x genau einen Wert y, der die Ungleichung erfüllt.

Nun wollen wir zeigen, dass es keine weitere Funktion mit dieser Eigenschaft gibt. Zu diesem Zweck sei nun $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ eine Funktion, die die Bedingung erfüllt. Wir bezeichnen ein Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ als *gut*, wenn $xf(y) + yf(x) \leq 2$ gilt. Offensichtlich ist (x, y) genau dann gut, wenn es auch (y, x) ist.

Wir zeigen zuerst die Gültigkeit des folgenden Lemmas:

Lemma: Ist (x, y) gut, so gilt $x = y$.

Beweis des Lemmas: Es sei (x, y) ein gutes Paar mit $x \neq y$. Aufgrund der Eindeutigkeitsannahme ist dann (x, x) nicht gut, und es gilt $xf(x) + xf(x) > 2 \iff xf(x) > 1$. Ebenso ist (y, x) gut, und somit (y, y) nicht, woraus wir $yf(y) > 1$ erhalten. Nun gilt aber nach AM-GM:

$$xf(y) + yf(x) \geq 2\sqrt{xf(y)yf(x)} = 2\sqrt{xf(x)yf(y)} > 2,$$

im Widerspruch zur Annahme, dass (x, y) gut ist. Die Gültigkeit des Lemmas ist somit gezeigt.
Nun gilt aufgrund der Annahme, dass es zu jedem x ein y gibt, sodass (x, y) gut ist, und somit ist (x, x) für alle x gut. Daraus erhalten wir aber

$$xf(x) + xf(x) \leq 2 \iff xf(x) \leq 1 \quad \forall x > 0.$$

Setzen wir speziell $x = \frac{1}{f(t)}$ mit $t > 0$, so gilt

$$\frac{1}{f(t)} \cdot f\left(\frac{1}{f(t)}\right) \leq 1.$$

Daraus folgt

$$t \cdot f\left(\frac{1}{f(t)}\right) \leq t \cdot f(t) \leq 1.$$

Nun behaupten wir, dass $\left(t, \frac{1}{f(t)}\right)$ für jedes $t > 0$ ein gutes Paar ist. Es gilt nämlich sicher

$$t \cdot f\left(\frac{1}{f(t)}\right) + \frac{1}{f(t)} \cdot f(t) = t \cdot f\left(\frac{1}{f(t)}\right) + 1 \leq 2.$$

Aus dem Lemma erhalten wir also $t = \frac{1}{f(t)} \iff f(t) = \frac{1}{t}$ für alle $t > 0$, womit der Beweis abgeschlossen ist. $\square$

Aufgabe 3: Es seien k eine positive ganze Zahl und S eine endliche Menge ungerader Primzahlen. Man beweise, dass es (bis auf Drehung und Spiegelung) höchstens eine Möglichkeit gibt, die Elemente von S entlang eines Kreises so anzuordnen, dass das Produkt zweier beliebiger Nachbarn in der Form x^2+x+k mit einer geeigneten positiven ganzen Zahl x dargestellt werden kann.

Lösung: Es sei $k > 0$ vorgegeben. Wir bezeichnen ein Paar (p, q) von Primzahlen mit $p \neq q$ als *speziell*, wenn es eine positive ganze Zahl x gibt mit $pq = x^2 + x + k$. Wir zeigen, dass folgendes Lemma gilt.

Lemma: a) Für jede Primzahl r gibt es höchstens zwei Primzahlen kleiner als r, die mit r ein spezielles Paar bilden.

b) Gibt es zwei derartige Primzahlen p und q, so ist das Paar (p, q) ebenfalls speziell.

Beweis des Lemmas: Wir betrachten ganze Zahlen $1 \leq x < r$ mit

$$x^2 + x + k \equiv 0 \pmod r.$$

Da es höchstens zwei Restklassen modulo r geben kann, die diese Gleichung lösen, gibt es höchstens zwei Werte von x mit

$$x^2 + x + k = r \cdot u,$$

und wegen $u < r$ und $x < r$ gibt es somit höchstens zwei mögliche Werte von u, was Teil a) beweist.

Nun seien p und q Primzahlen mit $p < q < r$ und x, y positive ganze Zahlen mit $x^2+x+k = pr$ und $y^2 + y + k = qr$. Wir wollen nun zeigen, dass (p, q) dann auch ein spezielles Paar ist.

Wegen $p < q < r$ gilt sicher $1 \leq x < y \leq r-1$. Die Zahlen x und y sind die Lösungen von

$$x^2 + x + k \equiv 0 \pmod r,$$

und nach Vieta gilt daher $x + y \equiv -1 \pmod r$, also $x + y = r - 1$.
Schreiben wir $K = 4k - 1$, $X = 2x + 1$ und $Y = 2y + 1$, so gilt

$$4pr = X^2 + K \quad \text{und} \quad 4qr = Y^2 + K$$

mit $X + Y = 2r$. Multiplikation dieser Ausdrücke ergibt

$$\begin{aligned} 16pqr^2 &= (X^2 + K)(Y^2 + K) \\ &= X^2Y^2 - 2KXY + K^2 + KX^2 + 2KXY + KY^2 \\ &= (XY - K)^2 + K(X + Y)^2 \\ &= (XY - K)^2 + 4Kr^2 \\ \iff 4pq &= \left(\frac{XY - K}{2r}\right)^2 + K. \end{aligned}$$

Aus folgender Rechnung erkennen wir, dass $Z = \frac{XY-K}{2r}$ ganzzahlig ist.

$$\begin{aligned} \frac{XY - K}{2r} &= \frac{(2x+1)(2y+1) - (4k-1)}{2r} \\ &= \frac{4xy + 2x + 2y + 1 - 4k + 1}{2r} \\ &= \frac{2xy + x + y - 2k + 1}{r}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$x + y \equiv -1 \pmod r \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2xy + y^2 \equiv -1 \pmod r,$$

und

$$\begin{aligned} 2xy + x + y - 2k + 1 &\equiv (-x^2 - y^2 + 1) + (-1) - 2k + 1 \\ &\equiv -x^2 - y^2 - x - y - 2k \\ &\equiv -(x^2 + x + k) - (y^2 + y + k) \\ &\equiv 0 \pmod r. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$4pr = Z^2 + K.$$

Da X, Y und K ungerade sind, ist es auch Z, und mit $z = \frac{Z-1}{2} \iff Z = 2z + 1$ erhalten wir somit

$$\begin{aligned} 4pq &= (2z + 1)^2 + k \\ &= 4z^2 + 4z + 1 + 4k - 1 \\ &= 4z^2 + 4z + 4k \\ \iff pq &= z^2 + z + k. \end{aligned}$$

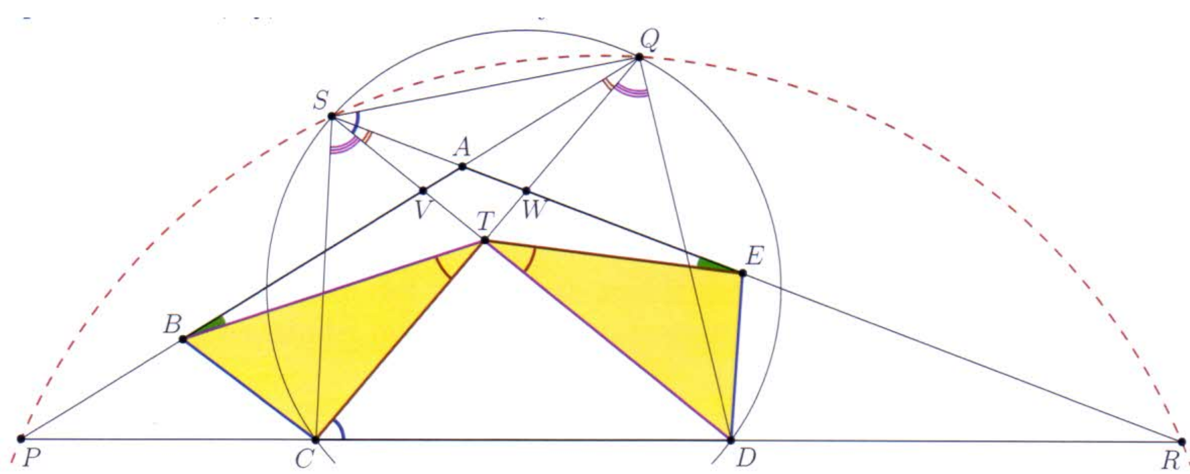
Wir sehen, dass (p, q), wie behauptet, ein spezielles Paar ist, womit der Beweis des Lemmas abgeschlossen ist.

Nun können wir die Behauptung durch Induktion beweisen. Für $|S| \leq 3$ gilt die Behauptung sicher. Nehmen wir an, sie gelte für $|S| = n$ und betrachten wir den Fall $|S| = n+1$. Bezeichnen wir die größte Zahl in S als r, so wissen wir, dass die beiden Nachbarzahlen von r in der Anordnung eindeutig bestimmt sind, und dass wir durch Entfernung von r eine Anordnung der verbleibenden Primzahlen erhalten, die eindeutig ist.

Wir sehen, dass es auch für $|S| = n+1$ genau eine gültige Anordnung gibt, und der Beweis ist somit abgeschlossen. $\square$

Aufgabe 4: Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit $BC = DE$. Weiterhin sei angenommen, dass T ein Punkt im Inneren von $ABCDE$ mit $TB = TD$, $TC = TE$ und $\sphericalangle ABT = \sphericalangle TEA$ ist. Die Gerade AB schneide die Geraden CD und CT in den Punkten P bzw. Q. Wir nehmen an, dass die Punkte P, B, A, Q in dieser Reihenfolge auf der Geraden liegen. Die Gerade AE schneide die Geraden CD und DT in den Punkten R bzw. S. Wir nehmen an, dass die Punkte R, E, A, S in dieser Reihenfolge auf der Geraden liegen.
Man beweise, dass die Punkte P, S, Q, R auf einem Kreis liegen.

Lösung: Wegen $BC = DE$, $TB = TD$ und $TC = TE$ sind die Dreiecke TBC und TDE kongruent, und es gilt $\angle CTB = \angle ETD$.



In TQB bzw. TES gilt

$$\angle QBT = \angle ABT = \angle TEA = \angle TES$$

und

$$\angle BTQ = 180^\circ - \angle CTB = 180^\circ - \angle ETD = \angle STE,$$

womit $\triangle TQB \sim \triangle TES$ gilt. Daraus erhalten wir $\angle EST = \angle TQB$ und

$$\frac{TD}{TQ} = \frac{TB}{TQ} = \frac{TE}{TS} = \frac{TC}{TS}.$$

Daraus erhalten wir $TD \cdot TS = TC \cdot TQ$, wodurch wir erkennen, dass C, D, Q und S auf einem gemeinsamen Kreis liegen, womit auch $\angle QCD = \angle QSD$ gilt.

Im Dreieck CQP erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
\angle QPR &= \angle QCR - \angle PCQ \\
&= \angle QCD - \angle TQB \\
&= \angle QSD - \angle EST \\
&= \angle QSD - \angle RSD \\
&= \angle QSR,
\end{aligned}$$

womit P, Q, R und S wie behauptet auf einem gemeinsamen Kreis liegen. $\square$

Aufgabe 5: Man bestimme alle Tripel (a, b, p) positiver ganzer Zahlen mit Primzahl p und

$$a^p = b! + p.$$

Lösung: Die beiden Lösungstripel sind $(2, 2, 2)$ und $(3, 4, 3)$.

Es ist klar, dass $a > 1$ für jede potentielle Lösung gelten muss. Nun betrachten wir drei Fälle.

Fall 1: $a < p$.

Gilt $a \le b$, so folgt $a \,|\, a^p - b! = p$, im Widerspruch zu $a < p$. Gilt $a > b$, folgt $b! \le a! < a^p - p$ (wegen $p > a > 1$). In diesem Fall erhalten wir also auch einen Widerspruch und wir sehen, dass es im Fall 1 keine Lösung gibt.

Fall 2: $a > p$.

In diesem Fall gilt $b! = a^p - p > p^p - p \ge p!$, und somit $b > p$. Dann ist $a^p = b! + p$ durch p teilbar. Somit ist a durch p teilbar und $b! = a^p - p$ sicher nicht durch p^2, womit $b < 2p$ gilt. Nun kann $a < p^2$ gelten, in welchem Fall $\frac{a}{p} < p$ sowohl a^p als auch $b!$ teilt, und somit auch $p = a^p - b!$, was nicht möglich ist. Gilt aber $a \ge p^2$, folgt

$$\begin{aligned}
a^p \ge &\ge (p^2)^p \\
&\ge (p - (p-1))(p + (p-1)(p - (p-2))(p + (p-2)) \dots p + p \\
&= (2p-1)! + p \\
&\ge b! + p,
\end{aligned}$$

was auch nicht sein kann. Im Fall 2 gibt es also auch keine Lösung.

Fall 3: $a = p$.

In diesem Fall lautet die Gleichung $b! = p^p - p$. Für $p = 2$ bzw. $p = 3$ rhalten wir die bereits erwähnten Lösungen. Man stellt leicht fest, dass es für $p = 5$ keine Lösung gibt, denn es gilt

$$5^5 - 5 = 3020 \ne b!$$

Im Folgenden nehmen wir also $p \ge 7$ an, und wollen zeigen, dass es keine weiteren Lösungen dieser Art gibt.

Es gilt $b! = p^p - p > p!$ und somit $b \ge p + 1$, woraus wir unter Verwendung des LTE-Lemmas

(Lifting The Exponent) für die Potenz v_2 des Primfaktors 2 folgende Aussage erhalten:

$$\begin{aligned} v_2((p+1)!) &\le v_2(b!) \\ &= v_2(p^{p-1}-1) \\ &= 2\cdot v_2(p-1)+v_2(p+1)-1 \quad (LTE) \\ &= v_2\left(\frac{p-1}{2}\cdot(p-1)\cdot(p+1)\right). \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite stehen in der Klammer vier Faktoren von $(p+1)!$. da $p+1\ge 8$ ist, hat aber $(p+1)!$ mindestens vier gerade Faktoren, und diese Gleichung kann somit, wie behauptet, nicht erfüllt sein. $\square$

Aufgabe 6: Es sei n eine positive ganze Zahl. Ein *Nordisches Quadrat* ist ein Spielbrett der Größe $n\times n$, in dessen Feldern alle Zahlen von 1 bis n^2 stehen, wobei jedes Feld genau eine Zahl enthält. Zwei verschiedene Felder heißen benachbart, wenn sie eine gemeinsame Seite besitzen. Jedes Feld, das nur benachbarte Felder mit größeren Zahlen hat, heißt *Talfeld*. Ein *ansteigender Pfad* ist eine Folge von einem oder mehreren Feldern mit den folgenden Eigenschaften:

1. Das erste Feld in der Folge ist ein Talfeld.
2. Jedes weitere Feld der Folge ist benachbart zum vorigen Feld.
3. Die Zahlen in den Feldern der Folge sind in ansteigender Reihenfolge.

Man bestimme in Abhängigkeit von n die kleinstmögliche Gesamtzahl ansteigender Pfade in einem Nordischen Quadrat.

Lösung: Die kleinste Anzahl aufsteigender Pfade ist $2n^2-2n+1$.

Wir bezeichnen im Folgenden alle Felder, die nicht Talfelder sind, als Hangfelder. Neben dem Ausgangsspielbrett A betrachten wir noch ein weiteres $n\times n$ Brett B. In die Felder von B schreiben wir jeweils die Anzahl ansteigender Pfade von A, die im entsprechenden Feld enden. Die zu lösende Aufgabe können wir also als Bestimmung der minimal möglichen Summe der Zahlen in den Feldern von B interpretieren.

In jedem Talfeld endet genau ein Pfad, nämlich jener, der aus genau diesem einen Feld besteht. In jedem anderen Feld ist die Anzahl der darin endenden Pfade gleich der Summe derartiger Anzahlen in angrenzenden Feldern mit kleinerer Zahl in A, da ein ansteigender Pfad nur ins Feld von einem Feld mit kleinerer Zahl fortgesetzt werden kann. Füllen wir also, ausgehend von A, die Felder in B in aufsteigender Reihenfolge der Zahlen in den Feldern von A, so schreiben wir in ein Feld in dem kein angrenzendes Feld schon eine Zahl hat, eine 1. In alle anderen Felder schreiben wir die Summe der bereits eingetragenen Zahlen, die in den angrenzenden Feldern stehen.

Es gibt mindestens ein Talfeld in A. nämlich das Feld mit der Zahl 1 in A. Die Summe der Zahlen in den Feldern von B, die Talfeldern entsprechen, ist daher mindestens 1. Wir versuchen nun, die Summe der Zahlen in B, die Hangfeldern entsprechen, zu minimieren. In jedem Paar angrenzender Felder von A hat ein Feld die kleinere und ein Feld die größere Zahl. Es gibt daher zu jedem Paar angrenzender Felder sicher einen ansteigenden Pfad, der vom Feld mit der kleineren Zahl zum Feld mit der größeren Zahl führt. Da es im $n\times n$ Spielbrett $2n(n-1)$

derartige Paare gibt, gibt es sicher mindestens $2n(n-1)$ ansteigende Pfade mit einer Länge größer als 1. Da es auch mindestens einen ansteigenden Pfad mit der Länge 1 gibt, gibt es mindestens

$$2n(n-1)+1 = 2n^2+2n+1$$

ansteigende Pfade auf jedem Nordischen Quadrat. Damit dieser Wert erreicht werden kann, darf es nur ein Talfeld geben, und dürfen keine zwei benachbarten Felder in B Zahlen größer als 1 beinhalten.

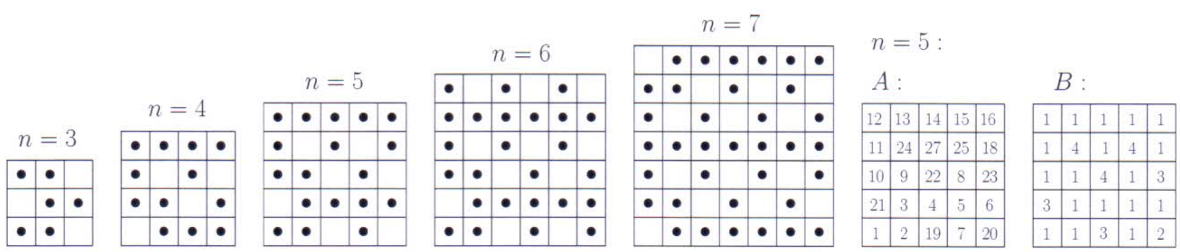
Wir wollen nun zeigen, dass dieser Wert auch tatsächlich erreicht werden kann. Zu diesem Zweck markieren wir einige Felder von A so, dass die entsprechnden Felder in B jeweils die Zahl 1 erhalten, keine zwei unmarkierten Felder an einander grenzen, und die markierten Felder einen zusammenhängenden Baum (im graphentheoretischen Sinn) bilden. Eine Möglichkeit, dies zu erreichen, ist folgende.

Für $n = 1$ markieren wir das einzige Feld.

Für $n = 2$ markieren wir ein „L" (also drei Felder).

Für $n \geq 3$ definieren wir für $n \equiv 0, 2 \pmod 3$ den Wert $s = 2$ und für $n \equiv 1 \pmod 3$ den Wert $s = 1$. Mit diesen Werten gehen wir nun folgendermaßen vor. In den beiden linken Spalten markieren wir alle Felder $(1, i)$ mit $i \neq 6k+s$ und $2, j)$ mit $j = 6k+s-1$, $j = 6k+s$ oder $6k+s+1$. Diese markieretn Felder bilden dann offensichtlich einen zusammenhängenden Bereich mit der erwünschten Eigenschaften.

Nun betrachten wir die Felder $(2, 6k+s)$ und $(1, 6k+s+3)$. Zu jedem dieser Felder (i, j) markieren wir alle der Form (ℓ, j) mit $\ell > i$, und ferner alle der Form $(i+2k, j\pm1)$. (Das Ergebnis für $n = 3, 4, 5, 6, 7$ ist in der Figur dargestellt, zusammen mit resultierenden Spielbrettern A und B für $n = 5$. Hinweis: im Feld von A, in dem die Zahl 27 geschrieben steht, sollte die Zahl 17 stehen.)



Man sieht sofort, dass es nirgends einen Zyklus unter den markierten Feldern gibt. Die unmarkierten sind alle von der Form $(1, 6k+s)$, $(2+2k+1, 6k+s\pm1)$ und $(2+2\ell, 6k+s+3\pm1)$, und von diesen sind keine zwei angrenzend, da die Spalten von abwechselnder Parität sind.

Da also eine derartige Markierung immer möglich ist, wird der minimale Wert $2n^2-2n+1$ auch tatsächlich angenommen, und der Beweis ist somit abgeschlossen. $\square$