CPS(A)-Match 2022

ISTA, Österreich

(Erster Tag – 2. Juli 2022)

1. Sei k eine positive ganze Zahl mit $k \leq 2022$. Alice und Bob spielen ein Spiel auf einem 2022×2022-Spielfeld aus 1×1-Zellen, bei dem die beiden abwechselnd ziehen. Am Anfang sind alle Felder weiß gefärbt. Alice beginnt zu ziehen und kann in ihrem Zug entweder eine weiße Zelle rot färben oder passen. Wenn Bob am Zug ist, kann er entweder ein $k \times k$-Quadrat an weißen Zellen blau färben oder passen. Das Spiel endet, sobald beide Spieler*innen passen, und es gewinnt die Person, die mehr Zellen gefärbt hat. Bei Gleichstand endet das Spiel unentschieden.

Bestimme für jede ganze Zahl $1 \leq k \leq 2022$, ob eine*r der beiden Spieler*innen eine Gewinnstrategie besitzt und, wenn ja, welche*r?

2. Finde alle Funktionen $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, die

$$f\left(f(x) + \frac{y+1}{f(y)}\right) = \frac{1}{f(y)} + x + 1$$

für alle positiven reellen Zahlen x und y erfüllen.

3. Zwei Kreise Ω_1 und Ω_2 mit unterschiedlichen Radien schneiden einander in zwei Punkten, von denen einer mit P bezeichnet wird. Eine Gerade ℓ durch P schneidet den Kreisbogen von Ω_1, der außerhalb von Ω_2 liegt, im Punkt X_1 und den Kreisbogen von Ω_2, der außerhalb von Ω_1 liegt, im Punkt X_2. Sei R jener Punkt auf der Strecke X_1X_2, der $X_1P = RX_2$ erfüllt. Die Tangente an Ω_1 durch den Punkt X_1 schneide die Tangente an Ω_2 durch den Punkt X_2 im Punkt T.

Beweise: Unabhängig von der Wahl der Geraden ℓ ist die Gerade RT stets tangential an einen fixen Kreis (der nur von Ω_1, Ω_2 und P abhängt).

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Language: German

CPS(A)-Match 2022

ISTA, Österreich

(Zweiter Tag – 3. Juli 2022)

4. Für eine positive ganze Zahl k bezeichne $\tau(k)$ die Anzahl der positiven Teiler von k und $\sigma(k)$ die Summe aller positiven Teiler von k.

Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n mit

$$\sigma(n) = \tau(n) \cdot \left\lceil \sqrt{n} \right\rceil.$$

(Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichne hierbei $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl größer oder gleich x.)

5. Sei ABC ein Dreieck mit $|AB| < |AC|$ und Umkreismittelpunkt O. Die Innenwinkelsymmetrale des Winkels $\angle BAC$ schneide die Seite BC im Punkt D. Die Normale auf BC durch D schneide die Strecke AO im Punkt X. Weiters sei Y der Mittelpunkt der Strecke AD.

Beweise, dass die Punkte B, C, X und Y auf einem Kreis liegen.

6. Gegeben sind 26 Buchstaben A, …, Z. Ein *String* ist eine endliche Folge dieser Buchstaben. Wir nennen einen String s *nett*, falls er jeden der 26 Buchstaben zumindest einmal enthält und falls jede Permutation der Buchstaben A, …, Z in s als Teilfolge gleich oft vorkommt. Beweise:

(a) Es gibt einen netten String.

(b) Jeder nette String besteht aus mindestens 2022 Buchstaben.

(Hierbei sagen wir, eine Permutation π der 26 Buchstaben kommt als *Teilfolge* in einem String $s = s_1s_2s_3\ldots$ vor, falls es 26 Indizes $i_1 < i_2 < \cdots < i_{26}$ mit $\pi = s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_{26}}$ gibt.)

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Language: German