53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene – Lösungen

31. März 2022

Aufgabe 1. *Es seien a und b positive reelle Zahlen, für die $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$ gilt.*
Man beweise, dass für sie die Ungleichung

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} \geq 4$$

erfüllt ist, und man bestimme, wann Gleichheit eintritt.

(Walther Janous)

Lösung 1. Aus der Nebenbedingung ergibt sich $a^2 < \frac{1}{2} < 1$, also $a < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, und ebenso $b < 1$. Deshalb ist die Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned} & 1-a+1-b && \geq && 4(1-a-b+ab) \\ \iff\quad & 3a+3b && \geq && 4ab+2 \\ \iff\quad & 3b-4ab && \geq && 2-3a, \end{aligned}$$

also

$$b(3-4a) \geq 2-3a. \qquad (*)$$

Wir haben aber

$$3-4a > 3 - \frac{4}{\sqrt{2}} > 0$$

und

$$2 - \frac{3}{\sqrt{2}} < 0.$$

Damit gilt $(*)$ für $\frac{2}{3} \leq a < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Sei nun $a < \frac{2}{3}$. Die Ungleichung $(*)$ lässt sich folgendermaßen schrittweise umformen:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\tfrac{1}{2}-a^2}\,(3-4a) && \geq && 2-3a \\ \iff\quad & (\tfrac{1}{2}-a^2)(9-24a+16a^2) && \geq && 4-12a+9a^2 \\ \iff\quad & \tfrac{9}{2}-12a+8a^2-9a^2+24a^3-16a^4 && \geq && 4-12a+9a^2 \\ \iff\quad & \tfrac{1}{2}-10a^2+24a^3-16a^4 && \geq && 0 \\ \iff\quad & 32a^4-48a^3+20a^2-1 && \leq && 0 \end{aligned}$$

Beispielsweise mit dem Hornerschema erhält man für das linksseitige Polynom die Zerlegung

$$(2a-1)^2\,(8a^2-4a-1),$$

in der der erste Faktor größer oder gleich 0 ist (mit Gleichheit für $a = \frac{1}{2}$), während der zweite Faktor für $\frac{1-\sqrt{3}}{4} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ nicht positiv ist. Mit $\frac{1-\sqrt{3}}{4} < 0$, sowie

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{3} > && 5 \\ \iff\quad & 3+3\sqrt{3} > && 8 \\ \iff\quad & \tfrac{1+\sqrt{3}}{4} > && \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

folgt $(*)$ für $a < \frac{2}{3}$. Außerdem gilt Gleichheit genau für $a = \frac{1}{2}$, also auch $b = \frac{1}{2}$.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Mit Ausmultiplizieren und Umformen folgt:

$$3(a+b) \geq 2 + 4ab.$$

Durch Quadrieren dieser Ungleichung (beide Seiten positiv) erhält man die äquivalente Ungleichung

$$9(a^2 + b^2 + 2ab) \geq 4 + 16ab + 16a^2b^2.$$

Mit $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$ folgt

$$\begin{array}{lrcl} & 9(\frac{1}{2} + 2ab) & \geq & 4 + 16ab + 16a^2b^2. \\ \iff & 0 & \geq & 32a^2b^2 - 4ab - 1 \end{array}$$

und damit

$$0 \geq (ab - \frac{1}{4})(32ab + 4).$$

Wegen

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{1}{4}$$

ist der erste Faktor kleiner oder gleich 0. Da der zweite Faktor positiv ist, ist die Ungleichung bewiesen, mit Gleichheit für $a = b = \frac{1}{2}$.

(Karl Czakler) □

Lösung 3. Im Fall von $a = b = 1/2$ tritt in der Ungleichung Gleichheit ein. Deshalb soll im Weiteren $a \neq b$, also wegen der Symmetrie der Ungleichung o. E. d. A. $a < b$, gelten. Insbesondere haben wir dann $a < 1/2$.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Dafür nehmen wir an, es gäbe ein Paar (a, b) reeller Zahlen a und b mit

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} < 4.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{1}{1-b} < 4 - \frac{1}{1-a} \iff \frac{1}{1-b} < \frac{3-4a}{1-a} \iff 1 - b > \frac{1-a}{3-4a} \iff b < 1 - \frac{1-a}{3-4a}.$$

Deshalb gilt

$$b < \frac{2-3a}{3-4a}.$$

Wir behaupten, dass daraus $a^2 + b^2 < \frac{1}{2}$ folgt. Denn wir haben

$$a^2 + b^2 < a^2 + \left(\frac{2-3a}{3-4a}\right)^2$$

samt

$$a^2 + \left(\frac{2-3a}{3-4a}\right)^2 < \frac{1}{2} \iff \left(\frac{2-3a}{3-4a}\right)^2 < \frac{1-2a^2}{2} \iff (1-2a^2)(3-4a)^2 - 2(2-3a)^2 > 0.$$

Nach kurzer Vereinfachung erhalten wir die äquivalente Ungleichung

$$32a^4 - 48a^3 + 20a^2 - 1 < 0. \qquad (*)$$

Das linksseitige Polynom hat $a = 1/2$ als Nullstelle. Ihre Abspaltung führt auf das Polynom $16a^3 - 16a^2 + 2a + 1$, das auch $a = 1/2$ als Nullstelle besitzt. Wenn man sie abspaltet, ergibt sich, dass Ungleichung $(*)$ in der Form

$$(2a-1)^2(8a^2 - 4a - 1) < 0$$

dargestellt werden kann. Wegen $2a \neq 1$ folgt

$$8a^2 - 4a - 1 < 0.$$

Diese Ungleichung gilt aber für alle reellen Zahlen a mit $0 < a < 1/2$, weil

$$8a^2 - 4a - 1 < 8a^2 - 4a = 4a(2a - 1) < 0.$$

Damit sind wir am Ende des Widerspruchsbeweises.

(Walther Janous) □

Bemerkung. Wenn wir a und b durch $a/\sqrt{2}$ bzw. $b/\sqrt{2}$ ersetzen, lauten die Nebenbedingung $a^2 + b^2 = 1$ und unsere Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{2} - a} + \frac{1}{\sqrt{2} - b} \geq 2\sqrt{2} \iff 2\sqrt{2} - (a + b) \geq 2\sqrt{2}(2 - \sqrt{2}(a + b) + ab),$$

d.h., die Ungleichung lautet

$$3(a + b) \geq 2\sqrt{2}(1 + ab) \qquad (*).$$

Mit der weiteren Substitution $a = \sin\alpha$ und $b = \cos\alpha$, wobei $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, ergibt sich für $(*)$ wegen $a + b = \sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$ und $ab = \sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin(2\alpha)}{2}$ die hübsche trigonometrische Entsprechung

$$3\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \geq 2 + \sin(2\alpha)$$

mit Gleichheit für $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

(Walther Janous)

Aufgabe 2. *Man bestimme die Anzahl aller positiven ganzen zehnstelligen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:*

- *Die Zahl enthält jede der Ziffern* $0, 1, 2, \ldots, 8$ *und* 9 *genau einmal.*
- *Jede Ziffer, außer der* 9*, besitzt eine Nachbarziffer, die größer ist als sie.*

(Anmerkung. Beispielsweise sind in der Zahl 1230 die Ziffern 1 bzw. 3 die Nachbarziffern von 2 und 2 bzw. 0 die Nachbarbarziffern von 3. Die Ziffern 1 und 0 haben nur eine Nachbarziffer.)

(Karl Czakler)

Antwort. Es gibt 256 Zahlen mit den geforderten Eigenschaften.

Lösung 1. Sei A eine zehnstellige Zahl mit dieser Eigenschaft. Der Stellenwert der Ziffer 9 sei 10^k mit $k \in \{0, 1, 2 \ldots, 9\}$. Alle Ziffern der Zahl A, die links von 9 stehen, müssen aufsteigend angeordnet werden, während alle Ziffern, die rechts von 9 stehen, fallend angeordnet werden müssen. Daraus folgt sofort, dass die Ziffer 0 nur an der Einerstelle vorkommen kann und daher die Ziffer 9 nicht an der Einerstelle stehen kann, d.h., es muss $k > 0$ gelten.

Wir haben daher:

- Für $k = 9$ gibt es nur eine Zahl, nämlich 9876543210.
- Für $k = 8$ gibt es $\binom{8}{1} = 8$ Zahlen, denn von den verbliebenen 8 Ziffern muss eine gewählt werden, die vor der Ziffer 9 platziert wird. Ein Beispiel ist die Zahl 3987654210.
- Für $k = 7$ gibt es $\binom{8}{2} = 28$ Zahlen, denn es gibt $\binom{8}{2}$ Möglichkeiten, 2 Ziffern aus den verbliebenen 8 Ziffern auszuwählen, die vor der 9 stehen. Deren Reihenfolge ist durch diese Wahl bereits festgelegt, da sie aufsteigend angeordnet werden müssen. Ein Beispiel ist die Zahl 1498765320.

- Für $2 \leq k \leq 6$ gibt es derselben Überlegung folgend je $\binom{8}{9-k}$ Möglichkeiten (Zahlen).
- Für $k = 1$ gibt es wieder nur eine ($1 = \binom{8}{8}$) Zahl, nämlich 1234567890.

Insgesamt gibt es demnach

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \cdots + \binom{8}{8} = 2^8 = 256$$

Zahlen mit der geforderten Eigenschaft.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Wenn zwei benachbarte Ziffern in ansteigender Reihenfolge sind, sieht man sofort, dass entweder die zweite Ziffer 9 ist oder die nächste Ziffer noch größer sein muss. Die Gestalt einer solchen Zahl ist also eine ansteigende Folge von Ziffern bis 9 gefolgt von einer absteigenden Folge von Ziffern.

Wir müssen also nur noch für die anderen Ziffern entscheiden, ob sie links oder rechts von der Ziffer 9 stehen, da sie dann auf beiden Seiten auf eindeutige Art sortiert werden. Da die Ziffer 0 nicht am Anfang einer zehnstelligen Zahl stehen kann, muss sie rechts platziert werden. Für die verbleibenden 8 Ziffern gibt es jeweils 2 Wahlmöglichkeiten für die Seite.

Insgesamt gibt es also 2^8 Möglichkeiten.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 3. *Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $AC \neq BC$. Seien I und U der Inkreis- bzw. Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Der Inkreis berührt die Seite BC im Punkt D und die Seite AC im Punkt E. Die Umkreise der Dreiecke ABC und CDE schneiden einander in den zwei Punkten C und P.*

Man beweise, dass der Schnittpunkt S der Geraden CU und PI am Umkreis des Dreiecks ABC liegt.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Sei S der Schnittpunkt von CU und PI, siehe Abbildung 1.

Mit dem Satz von Thales folgt, dass der Umkreis des Dreiecks CDE durch den Inkreismittelpunkt I des Dreiecks ABC geht. Dann gilt

$$90^\circ = \angle CDI = \angle CPI.$$

Das Dreieck CPS ist daher rechtwinkelig und es gilt

$$UC = UP = US.$$

Der Punkt S liegt daher am Umkreis des Dreiecks ABC.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Es sei S der Schnittpunkt von CU mit dem Umkreis des Dreiecks ABC. Wir zeigen, dass der Punkt I auf der Strecke PS liegt. Da CS ein Durchmesser des Umkreises des Dreiecks ABC ist, steht CP normal zu PS.

Mit dem Satz von Thales folgt, dass der Umkreis des Dreiecks CDE den Durchmesser CI hat. Daher steht auch die Strecke PI normal auf CP.

Aus $PS \perp CP$ und $PI \perp CP$ folgt aber, dass die Punkte P, I und S auf einer Geraden liegen .

(Karl Czakler) □

Aufgabe 4. *Gegeben sei die Menge*

$$M = \{-2^{2022}, -2^{2021}, \ldots, -2^2, -2, -1, 1, 2, 2^2, \ldots, 2^{2021}, 2^{2022}\}.$$

Sei T eine Teilmenge von M, in der benachbarte Zahlen die gleiche Differenz haben, wenn man die Elemente der Größe nach ordnet.

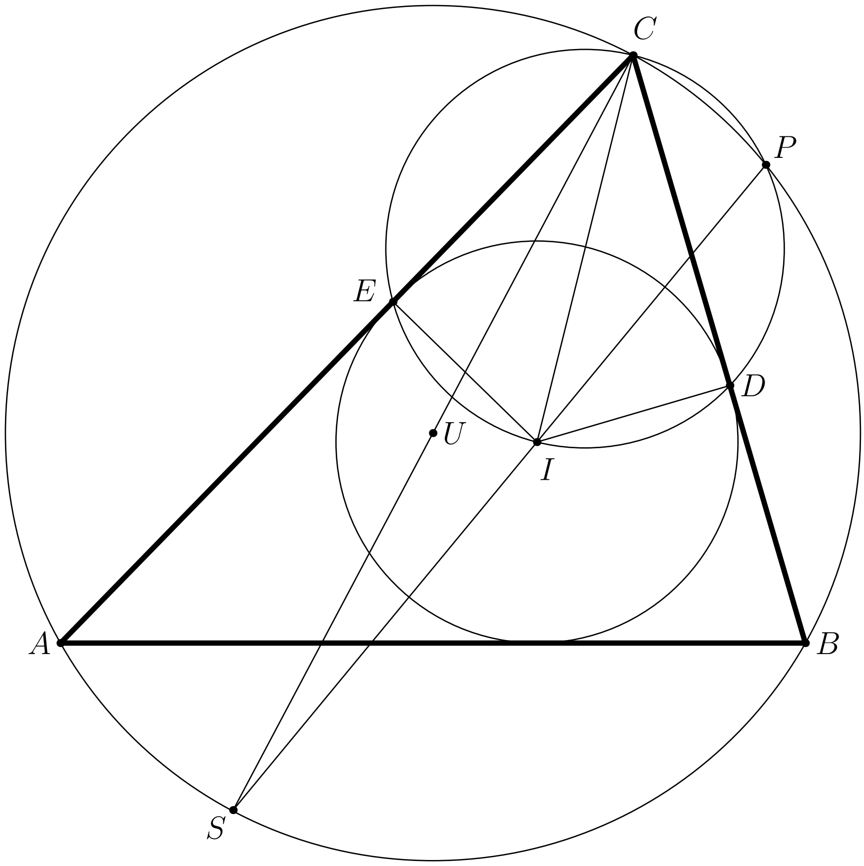

Abbildung 1: Aufgabe 3, Lösung 1

(a) Man bestimme die größte Anzahl von Elementen, die eine derartige Menge T enthalten kann.

(b) Man gebe alle Mengen T mit der größtmöglichen Anzahl an Elementen an.

(Walther Janous)

Lösung. (a) Wir beweisen zuerst, dass in einer Menge T höchstens zwei Elemente gleiches Vorzeichen haben können. Denn seien beispielsweise $2^a < 2^b < 2^c$ drei Elemente mit gleichem (positiven) Vorzeichen. Dann gelten $a < b < c$ samt

$$2^b - 2^a = 2^c - 2^b \iff 2^a(2^{b-a} - 1) = 2^b(2^{c-b} - 1).$$

Auf Grund der eindeutigen Primfaktorzerlegung müsste deshalb $a = b$ gelten. Weil man in entsprechender Weise auch drei negative Zahlen ausschließt, können sich unter den Zahlen in der Menge T niemals mehr als zwei mit gleichem Vorzeichen befinden, d.h. aber, dass eine Menge T höchstens vier Elemente enthalten kann.

Seien $-2^a < -2^b < 2^c < 2^d$ Elemente einer Menge T. Insbesondere gelten dann $a > b$ und $c < d$ samt

$$-2^b - (-2^a) = 2^c - (-2^b) \iff 2^a - 2^b = 2^c + 2^b \iff 2^a - 2^c = 2^{b+1}.$$

Diese Gleichung zeigt unmittelbar $a > c$. Wegen $a > b$, also $a \geq b + 1$, folgt aus ihr zudem, dass 2^{b+1} ein Teiler von 2^a ist. Deshalb muss 2^{b+1} auch 2^c teilen. Also gilt $c \geq b + 1$. Folglich ist unsere Gleichung äquivalent zu

$$2^{a-b-1} - 2^{c-b-1} = 1$$

mit $a - b - 1 > c - b - 1 \geq 0$. Im Fall von $c - b - 1 > 0$ wäre der linkseitige Ausdruck durch 2 teilbar, ein offensichtlicher Widerspruch. Deshalb ergibt sich $c = b + 1$. Die letzte Gleichung lautet damit

$$2^{a-b-1} - 1 = 1 \iff 2^{a-b-1} = 2 \iff a - b - 1 = 1 \iff a = b + 2.$$

Folglich sind $-2^{b+2} < -2^b < 2^{b+1} < 2^d$ die Elemente von T, für die aber auch noch

$$2^{b+1} - (-2^b) = 2^d - 2^{b+1} \iff 3 \cdot 2^b = 2^{b+1}(2^{d-b-1} - 1)$$

gelten müsste, ein offensichtlicher Widerspruch. In entsprechender Weise ergibt sich: Wenn man von zwei positiven Zahlen ausgeht, kann T höchstens eine negative Zahl enthalten. Damit ist gezeigt, dass 3 die größtmögliche Anzahl von Elementen ist, die eine Menge T enthalten kann.

(b) Aus dem eben Bewiesenen ergibt sich unmittelbar, dass die Mengen T

- entweder aus den drei Zahlen -2^{b+2}, -2^b und 2^{b+1}
- oder -2^{b+1}, 2^b und 2^{b+2}

bestehen, wobei $0 \leq b \leq 2020$ zu gelten hat.

Bemerkung. Wenn man die Basis 2 durch eine beliebige Primzahl p ersetzt, also die entsprechende allgemeinere Fragestellung für die Ausgangsmengen

$$M_p = \{-p^{2022}, -p^{2021}, \ldots, -p^2, -p, -1, 1, p, p^2, \ldots, p^{2021}, p^{2022}\}$$

betrachtet, so gelangt man zu folgendem Ergebnis:

- Für $p = 2$ erhalten wir die oben bestimmten Mengen T.
- Für $p = 3$ ergeben sich die Mengen $T = \{-3^{b+1}, -3^b, 3^b, 3^{b+1}\}$ mit $0 \leq b \leq 2021$.
- Für $p \geq 5$ kann T nicht mehr als zwei Elemente, also genau zwei, enthalten.

(Walther Janous) □