15th Middle European Mathematical Olympiad Croatia 2021

**Einzelwettbewerb**
**25. August 2021**

**German version**

### Aufgabe I–1

Man bestimme alle reellen Zahlen $A$, sodass jede Folge von Zahlen $x_1, x_2, \ldots$, die alle ungleich Null sind und

$$x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n}$$

für alle $n \geq 1$ erfüllen, nur endlich viele negative Elemente enthält.

### Aufgabe I–2

Seien $m$ und $n$ positive ganze Zahlen. Einige Quadrate eines $m \times n$-Spielbretts sind rot eingefärbt. Eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_{2r}$ von $2r \geq 4$ paarweise verschiedenen roten Quadraten nennt man einen *Läufer-Zyklus*, wenn für jedes $k \in \{1, \ldots, 2r\}$ die Quadrate $a_k$ und $a_{k+1}$ auf einer Diagonalen liegen, die Quadrate $a_k$ und $a_{k+2}$ aber nicht auf einer Diagonale liegen (hierbei ist $a_{2r+1} = a_1$ und $a_{2r+2} = a_2$). Man bestimme, in Abhängigkeit von $m$ und $n$, die maximal mögliche Anzahl roter Quadrate auf einem $m \times n$-Spielbrett, das keinen Läufer-Zyklus enthält.

(*Anmerkung*: Zwei Quadrate liegen genau dann auf einer Diagonale, wenn die Gerade durch ihre Mittelpunkte die Seiten des Spielbretts in einem Winkel von $45°$ schneidet.)

### Aufgabe I–3

Seien $ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck und $D$ ein Punkt im Inneren der Strecke $BC$. Die Punkte $E$ und $F$ liegen derart in der von der Geraden $BC$ bestimmten Halbebene, die $A$ enthält, dass $DE$ senkrecht auf $BE$ steht und $DE$ eine Tangente an den Umkreis von $ACD$ ist, während $DF$ senkrecht auf $CF$ steht und $DF$ eine Tangente an den Umkreis von $ABD$ ist.

Man zeige, dass die Punkte $A$, $D$, $E$ und $F$ auf einem Kreis liegen.

### Aufgabe I–4

Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Zagi, das Eichhörnchen, sitzt auf einem Eckpunkt eines regelmäßigen $n$-Ecks. Zagi plant, eine Reise von $n-1$ Sprüngen zu unternehmen, sodass es für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ im $i$-ten Sprung um $i$ Kanten im Uhrzeigersinn weiterspringt. Man zeige: Wenn Zagi nach $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ Sprüngen $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ verschiedene Ecken besucht hat, dann wird Zagi nach $n-1$ Sprüngen alle Ecken besucht haben.

(*Anmerkung:* Für jede reelle Zahl $x$ bezeichnen wir mit $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl größer oder gleich $x$.)

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Fragen: 60 Minuten
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.

# Individual Competition
## Aug. 25, 2021

## English version

### Problem I–1

Determine all real numbers $A$ such that every sequence of non-zero real numbers $x_1, x_2, \ldots$ satisfying

$$x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n}$$

for every integer $n \geqslant 1$, has only finitely many negative terms.

### Problem I–2

Let $m$ and $n$ be positive integers. Some squares of an $m \times n$ board are coloured red. A sequence $a_1, a_2, \ldots, a_{2r}$ of $2r \geqslant 4$ pairwise distinct red squares is called a *bishop circuit* if for every $k \in \{1, \ldots, 2r\}$, the squares $a_k$ and $a_{k+1}$ lie on a diagonal, but the squares $a_k$ and $a_{k+2}$ do not lie on a diagonal (here $a_{2r+1} = a_1$ and $a_{2r+2} = a_2$).

In terms of $m$ and $n$, determine the maximum possible number of red squares on an $m \times n$ board without a bishop circuit.

(*Remark.* Two squares lie on a diagonal if the line passing through their centres intersects the sides of the board at an angle of 45°.)

### Problem I–3

Let $ABC$ be an acute triangle and $D$ an interior point of segment $BC$. Points $E$ and $F$ lie in the half-plane determined by the line $BC$ containing $A$ such that $DE$ is perpendicular to $BE$ and $DE$ is tangent to the circumcircle of $ACD$, while $DF$ is perpendicular to $CF$ and $DF$ is tangent to the circumcircle of $ABD$. Prove that the points $A$, $D$, $E$ and $F$ are concyclic.

### Problem I–4

Let $n \geqslant 3$ be an integer. Zagi the squirrel sits at a vertex of a regular $n$-gon. Zagi plans to make a journey of $n-1$ jumps such that in the $i$-th jump, it jumps by $i$ edges clockwise, for $i \in \{1, ..., n-1\}$. Prove that if after $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ jumps Zagi has visited $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ distinct vertices, then after $n-1$ jumps Zagi will have visited all of the vertices.

(*Remark.* For a real number $x$, we denote by $\lceil x \rceil$ the smallest integer larger or equal to $x$.)

Time: 5 hours
Time for questions: 60 min
Each problem is worth 8 points.
The order of the problems does not depend on their difficulty.

**Aufgabe T–1**

Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass die Ungleichung

$$f(x^2) - f(y^2) \leqslant (f(x) + y)(x - f(y))$$

für alle reellen Zahlen $x$ und $y$ erfüllt ist.

**Aufgabe T–2**

Gegeben sei eine positive ganze Zahl $n$. Wir nennen ein Polynom $P$ mit reellen Koeffizienten *$n$-schön*, wenn die Gleichung $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$ genau $n$ reelle Lösungen hat. Man zeige, dass für jede positive ganze Zahl $n$

(a) ein $n$-schönes Polynom existiert;

(b) jedes $n$-schöne Polynom einen Grad von mindestens $\frac{2n+1}{3}$ hat.

(*Anmerkung:* Für eine reelle Zahl $x$ bezeichnen wir mit $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $x$.)

**Aufgabe T–3**

Seien $n$, $b$ und $c$ positive ganze Zahlen. Eine Gruppe von $n$ Piraten möchte ihren Schatz fair aufteilen. Der Schatz besteht aus $c \cdot n$ identischen Münzen, die auf $b \cdot n$ Beutel aufgeteilt sind, von denen zunächst mindestens $n - 1$ Beutel leer sind. Kapitän Jack inspiziert den Inhalt jedes Beutels und führt dann eine Reihe von Zügen aus. In einem Zug kann er aus einem einzelnen Beutel eine beliebige Anzahl an Münzen nehmen und diese in einen leeren Beutel geben. Man zeige, dass, egal wie die Münzen anfangs verteilt sind, Jack höchstens $n - 1$ Zügen ausführen und danach die Beutel so auf die Piraten aufteilen kann, dass jeder Pirat genau $b$ Beutel und $c$ Münzen bekommt.

**Aufgabe T–4**

Sei $n$ eine positive ganze Zahl. Man zeige, dass man in einem regelmäßigen $6n$-Eck derart $3n$ Diagonalen mit paarweise verschiedenen Endpunkten einzeichnen und die gezeichneten Diagonalen in $n$ Tripel aufteilen kann, dass

- die Diagonalen in jedem Tripel einander in einem inneren Punkt des Polygons schneiden und
- alle diese $n$ Schnittpunkte verschieden sind.

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Fragen: 60 Minuten
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.

### Aufgabe T–5

Sei $AD$ der Durchmesser des Umkreises eines spitzwinkligen Dreiecks $ABC$. Die Geraden durch $D$ parallel zu $AB$ und $AC$ schneiden die Geraden $AC$ bzw. $AB$ in den Punkten $E$ bzw. $F$. Die Geraden $EF$ und $BC$ schneiden einander im Punkt $G$.

Man zeige, dass $AD$ und $DG$ senkrecht aufeinander stehen.

### Aufgabe T–6

Seien $ABC$ ein Dreieck und $M$ der Mittelpunkt der Strecke $BC$. Sei $X$ ein Punkt auf der Halbgeraden $[AB$, sodass $2\sphericalangle CXA = \sphericalangle CMA$ gilt. Sei $Y$ ein Punkt auf der Halbgeraden $[AC$, sodass $2\sphericalangle AYB = \sphericalangle AMB$ gilt. Die Gerade $BC$ schneide den Umkreis des Dreiecks $AXY$ so in den Punkten $P$ und $Q$, dass $P$, $B$, $C$ und $Q$ in dieser Reihenfolge auf der Geraden $BC$ liegen. Man zeige, dass $|PB| = |QC|$ ist.

(*Anmerkung:* Mit der Schreibweise $[XY$ bezeichnen wir die Halbgerade (den Strahl), die (der) bei $X$ beginnt und durch $Y$ geht.)

### Aufgabe T–7

Man bestimme alle Paare $(n, p)$ positiver ganzer Zahlen, sodass $p$ prim ist und

$$1 + 2 + \cdots + n = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + p^2)$$

gilt.

### Aufgabe T–8

Man zeige, dass es unendlich viele positive ganze Zahlen $n$ gibt, sodass $n^2$ im Zahlensystem zur Basis 4 nur die Ziffern 1 und 2 enthält.

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Fragen: 60 Minuten
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.

### Problem T–1

Determine all functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that the inequality

$$f(x^2) - f(y^2) \leqslant (f(x) + y)(x - f(y))$$

holds for all real numbers $x$ and $y$.

### Problem T–2

Given a positive integer $n$, we say that a polynomial $P$ with real coefficients is *$n$-pretty* if the equation $P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$ has exactly $n$ real solutions. Show that for each positive integer $n$

(a) there exists an $n$-pretty polynomial;

(b) any $n$-pretty polynomial has a degree of at least $\frac{2n+1}{3}$.

(*Remark.* For a real number $x$, we denote by $\lfloor x \rfloor$ the largest integer smaller than or equal to $x$.)

### Problem T–3

Let $n$, $b$ and $c$ be positive integers. A group of $n$ pirates wants to fairly split their treasure. The treasure consists of $c \cdot n$ identical coins distributed over $b \cdot n$ bags, of which at least $n-1$ bags are initially empty. Captain Jack inspects the contents of each bag and then performs a sequence of moves. In one move, he can take any number of coins from a single bag and put them into one empty bag. Prove that no matter how the coins are initially distributed, Jack can perform at most $n-1$ moves and then split the bags among the pirates such that each pirate gets $b$ bags and $c$ coins.

### Problem T–4

Let $n$ be a positive integer. Prove that in a regular $6n$-gon, we can draw $3n$ diagonals with pairwise distinct ends and partition the drawn diagonals into $n$ triplets so that:

- the diagonals in each triplet intersect in one interior point of the polygon and
- all these $n$ intersection points are distinct.

Time: 5 hours
Time for questions: 60 min
Each problem is worth 8 points.
The order of the problems does not depend on their difficulty.

## Problem T–5

Let $AD$ be the diameter of the circumcircle of an acute triangle $ABC$. The lines through $D$ parallel to $AB$ and $AC$ meet lines $AC$ and $AB$ in points $E$ and $F$, respectively. Lines $EF$ and $BC$ meet at $G$. Prove that $AD$ and $DG$ are perpendicular.

## Problem T–6

Let $ABC$ be a triangle and let $M$ be the midpoint of the segment $BC$. Let $X$ be a point on the ray $AB$ such that $2\angle CXA = \angle CMA$. Let $Y$ be a point on the ray $AC$ such that $2\angle AYB = \angle AMB$. The line $BC$ intersects the circumcircle of the triangle $AXY$ at $P$ and $Q$, such that the points $P$, $B$, $C$, and $Q$ lie in this order on the line $BC$. Prove that $PB = QC$.

## Problem T–7

Find all pairs $(n, p)$ of positive integers such that $p$ is prime and

$$1 + 2 + \cdots + n = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + p^2).$$

## Problem T–8

Prove that there are infinitely many positive integers $n$ such that $n^2$ written in base 4 contains only digits 1 and 2.

Time: 5 hours
Time for questions: 60 min
Each problem is worth 8 points.
The order of the problems does not depend on their difficulty.