Czech-Polish-Slovak-Austrian-Match, Tag 1

1. Man bestimme alle Quadrupel (a, b, c, d) positiver ganzer Zahlen, die $\mathrm{ggT}(a, b, c, d) = 1$ und

$$a \mid b + c, \quad b \mid c + d, \quad c \mid d + a, \quad d \mid a + b$$

erfüllen.

2. In einem spitzwinkligen Dreieck ABC berührt der Inkreis ω die Seite BC im Punkt D. Sei I_a der Ankreismittelpunkt von ABC, der dem Punkt A gegenüberliegt, und sei M der Mittelpunkt der Strecke DI_a. Man zeige, dass der Umkreis des Dreiecks BMC den Kreis ω berührt.

3. Für zwei konvexe Polygone P_1 und P_2 mit paarweise verschiedenen Eckpunkten bezeichne $f(P_1, P_2)$ die Gesamtanzahl aller Eckpunkte, die auf einer Seite des anderen Polygons liegen. Man bestimme

$$\max\{f(P_1, P_2) \mid P_1 \text{ und } P_2 \text{ sind konvexe } n\text{-Ecke}\}$$

für alle ganzen Zahlen $n \geq 4$.

(Ein Polygon heißt *konvex*, falls alle seine Innenwinkel kleiner als $180°$ sind.)

Czech-Polish-Slovak-Austrian-Match, Tag 2

4. Man bestimme die Anzahl der 2021-Tupel positiver ganzer Zahlen, sodass die Zahl 3 zumindest einmal darin vorkommt und aufeinanderfolgende Einträge sich um maximal 1 unterscheiden.

5. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist rekursiv durch $a_1 = 1$ und für $n \geq 2$ durch

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + 3, & \text{falls } n - 1 \in \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}, \\ a_{n-1} + 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

festgelegt. Man beweise, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die folgende Ungleichung gilt:

$$a_n < n \cdot (1 + \sqrt{2})$$

6. Sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck, bei dem die Punkte A, A_b, B_a, B, B_c, C_b, C, C_a und A_c in dieser Reihenfolge entlang seines Umfangs liegen. Sei $A_1 \neq A$ der zweite Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke AA_bC_a und AA_cB_a. Analog seien $B_1 \neq B$ der zweite Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke BB_cA_b und BB_aC_b, und $C_1 \neq C$ der zweite Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke CC_aB_c und CC_bA_c. Die Punkte A_1, B_1 und C_1 seien nicht kollinear und mögen im Inneren des Dreiecks ABC liegen. Man zeige, dass sich die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 in einem Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks $A_1B_1C_1$ schneiden.