52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior-Regionalwettbewerb – Lösungen

15. Juni 2021

Aufgabe 1. *Die Seiten eines Notizbuches sind fortlaufend so nummeriert, dass am ersten Blatt die Nummern* 1 *und* 2 *stehen, am zweiten Blatt die Nummern* 3 *und* 4*, und so weiter. Ein Blatt wird aus diesem Notizbuch herausgerissen. Alle Seitennummern der verbleibenden Blätter werden addiert. Dabei erhält man* 2021 *als Summe.*

(a) *Wie viele Seiten kann das Notizbuch ursprünglich gehabt haben?*

(b) *Welche Seitennummern können auf dem herausgerissenen Blatt stehen?*

(Walther Janous)

Antwort. Es gibt genau eine Lösung. Das Notizbuch hatte 64 Seiten und das Blatt mit den Seitennummern 29 und 30 wird herausgerissen.

Lösung. Wir bezeichnen die Anzahl der Blätter mit $b > 0$. Dann ist die Anzahl der Seiten $2b$ (also insbesondere gerade). Wir suchen eine Zahl $2b$, sodass

$$1 + 2 + \ldots + (2b - 1) + 2b = \frac{(2b) \cdot (2b + 1)}{2} > 2021$$

gilt. Da $\frac{60^2}{2} = 1800$ ungefähr die passende Größenordnung hat, erhalten wir durch systematisches Probieren:

$$\frac{62 \cdot 63}{2} = 1953 < 2021 < \frac{64 \cdot 65}{2} = 2080.$$

Die kleinste Anzahl an möglichen Seiten ist also 64. Das herausgerissene Blatt h hat die beiden Seitennummern $2h - 1$ und $2h$ (zuerst ungerade dann gerade). Dann muss die Gleichung

$$2h - 1 + 2h = 2080 - 2021 = 59$$

erfüllt sein, also $h = 15$.

Eine Lösung ist also, dass das Buch ursprünglich 32 Blätter hatte und das 15. Blatt (jenes mit den Seitennummern 29 und 30) herausgerissen wurde.

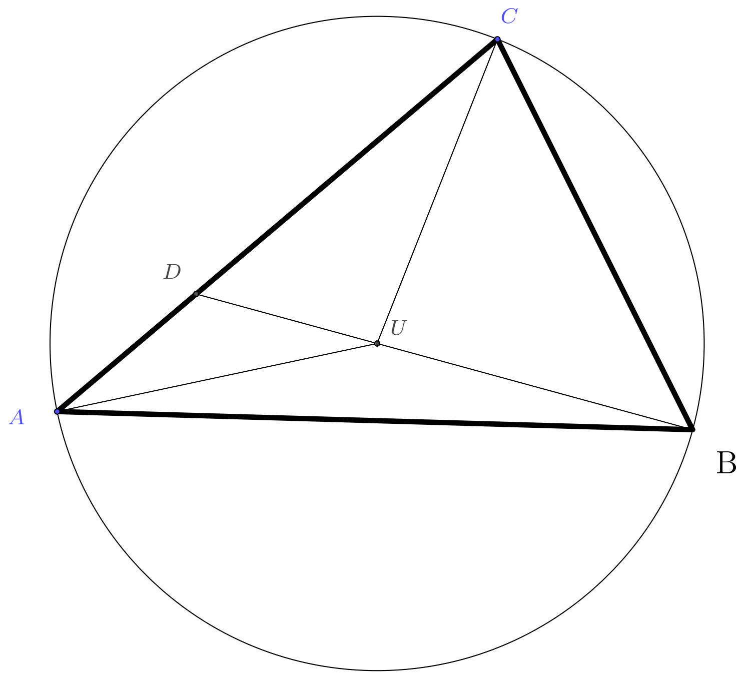
Wir müssen noch begründen, warum dies die einzige Lösung ist. Wenn das Buch 64 Seiten hat, gibt es nur diese eine Möglichkeit, da wir h eindeutig berechnen konnten. Sei also die Anzahl der Blätter b größer als 32, dann ist die Anzahl der Seiten mindestens 66. Das Blatt, das herausgerissen wird, kann höchstens die Seitenzahlen $2b - 1$ und $2b$ haben, also ist die verbleibende Summe jedenfalls mindestens $1 + 2 + \ldots + 63 + 64 = 2080 > 2021$. Das heißt, dass die verbleibende Summe bei mindestens 33 Blättern sicher größer oder gleich 2080 ist. Damit kann es aber keine Lösung mit mehr als 32 Blättern geben.

(Lukas Donner) □

Aufgabe 2. *Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Umkreismittelpunkt U, sodass $\sphericalangle CBA = 60°$ und $\sphericalangle CBU = 45°$ gelten. Die Geraden BU und AC schneiden einander im Punkt D.*

Man beweise, dass $AD = DU$ gilt.

(Karl Czakler)



Lösung.

Wir wollen zeigen, dass das Dreieck AUD gleichschenkelig ist, indem wir zeigen, dass die Winkel bei A und bei U gleich groß sind. Dazu rechnen wir zunächst einige nützliche Winkel in der Figur aus.

Da das Dreieck AUB gleichschenkelig ist, gilt

$$\sphericalangle BAU = \sphericalangle UBA = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$$

und somit wegen der Winkelsumme im Dreieck ABU auch

$$\sphericalangle AUB = 180^\circ - \sphericalangle BAU - \sphericalangle UBA = 150^\circ.$$

Aufgrund des Zentriwinkelsatzes gilt somit

$$\sphericalangle BCA = \frac{1}{2}\sphericalangle BUA = 75^\circ$$

und somit wegen der Winkelsumme im Dreieck ABC auch

$$\sphericalangle BAC = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ.$$

Damit können wir die gesuchten Winkel berechnen:

$$\begin{aligned}\sphericalangle UAD &= \sphericalangle BAD - \sphericalangle BAU = \sphericalangle BAC - \sphericalangle BAU = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ\\ \sphericalangle DUA &= 180^\circ - \sphericalangle AUB = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ\end{aligned}$$

Somit ist das Dreieck AUD gleichschenkelig mit Scheitel in D und wie verlangt $AD = DU$.

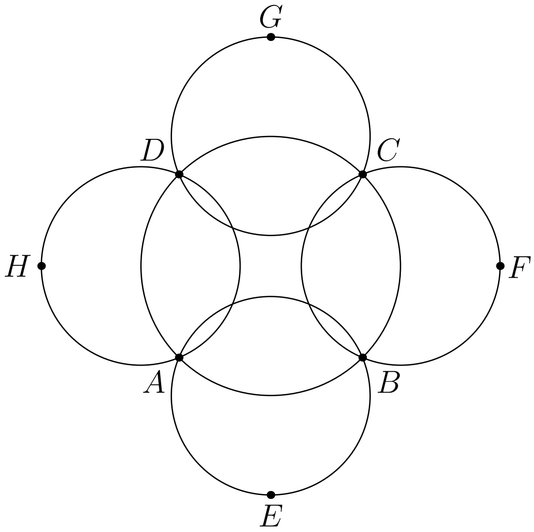
(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 3. *Die acht Punkte A, B, …, G und H liegen wie abgebildet auf fünf Kreisen. Jeder dieser Buchstaben wird durch eine der acht Zahlen 1, 2, …, 7 und 8 so ersetzt, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) Jede der acht Zahlen wird genau einmal verwendet.

(ii) Die Summe der Zahlen auf jedem der fünf Kreise ist gleich.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben auf diese Weise durch die Zahlen zu ersetzen?



(Walther Janous)

Antwort. Es gibt 8 Möglichkeiten.

Lösung 1. Seien $a, b, \ldots, g$ und h jene Zahlen, durch die die Punkte $A, B, \ldots, G$ und H ersetzt werden. Weil die Summen auf allen Kreisen den Wert $a+b+c+d$ haben müssen, folgen sofort $e = c+d$, $f = d+a$, $g = a+b$ und $h = b+c$. Daraus ergibt sich $e+f+g+h = 2(a+b+c+d)$. Andererseits ist

$$36 = 1+2+3+4+5+6+7+8 = (a+b+c+d)+(e+f+g+h) = 3(a+b+c+d),$$

somit $a+b+c+d = 12$. Für diese Summe kommen offensichtlich nur die Werte $1, 2, 3, 6$ oder $1, 2, 4, 5$ in Frage.
Ersetzen wir den Punkt A durch die Zahl 1, so muss $b \neq 2$ sein, da sonst wegen $a+b+e = 1+2+e = 12$ der Wert $e = 9$ unzulässig wäre. Analog muss $d \neq 2$ sein. Also gilt $c = 2$. Dann ergeben sich für b und d die Fälle $b = 3$ und $d = 6$, oder $b = 6$ und $d = 3$, bzw. $b = 4$ und $d = 5$, oder $b = 5$ und $d = 4$. In den beiden letzten Fällen folgt aber $f = h = 6$ bzw. $e = g = 6$, was nicht zulässig ist. In den beiden ersten Fällen sind die übrigen Zahlen jeweils eindeutig aus der Zahlensumme der entsprechenden Kreise berechenbar.
Wir erhalten also bei Ersetzung von A durch 1 genau zwei Möglichkeiten für die Ersetzung der übrigen Punkte. Analog könnten wir aber auch die Punkte B, C bzw. D durch 1 ersetzen, somit ergeben sich insgesamt $4 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten.

(Reinhard Razen) □

Lösung 1a. Wie in Lösung 1 erhalten wir $a+b+c+d = 12$. Weiters gilt $e+g = (c+d)+(a+b) = 12$ und $f+h = (d+a)+(b+c) = 12$. Die paarweise verschiedenen Zahlen e, f, g, h müssen also aus der Menge $\{4, 5, 7, 8\}$ gewählt wählen, wobei 8 und 4, beziehungsweise 7 und 5 in der Figur stets gegenüber liegen. Es gibt acht Möglichkeiten, die Buchstaben E, F, G, H in dieser Weise durch die Zahlen $4, 5, 7, 8$ zu ersetzen, da wir für die Zahl 8 einen der vier Buchstaben wählen können und danach für Zahl 7 jeweils zwei Möglichkeiten verbleiben.

Wir zeigen nun noch, dass sich nach Wahl von E, F, G, H die Ersetzungen für A, B, C, D zwingend ergeben. Seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit $g = 8$ und $h = 7$, also $e = 4$ und $f = 5$. Aus $e = 4 = c+d$ und $f = 5 = d+a$ folgt, dass nur b den Wert 6 annehmen kann. Die Werte $a = 2$, $c = 1$, $d = 3$ folgen direkt. Es gibt insgesamt also genau 8 Möglichkeiten.

(Stefan Leopoldseder) □

Aufgabe 4. *Sei p eine Primzahl und seien m und n positive ganze Zahlen mit $p^2 + m^2 = n^2$.*
Man beweise, dass $m > p$ gilt.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Es gilt $p^2 = n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$. Da p eine Primzahl ist, hat p^2 die Teiler 1, p und p^2. Da die beiden Faktoren $n - m$ und $n + m$ aber verschieden sind, können sie nicht beide p sein. Da $n - m$ kleiner als $n + m$ ist, ist somit $n - m = 1$, also $n = m + 1$. Wir haben daher

$$p^2 + m^2 = (m + 1)^2 \iff p^2 = 2m + 1 \iff m = \frac{p^2 - 1}{2}.$$

Wir müssen daher

$$m = \frac{p^2 - 1}{2} > p$$

zeigen. Das ist äquivalent zu

$$(p - 1)^2 - 2 > 0$$

und für alle Primzahlen $p \geq 3$ richtig.

Für $p = 2$ hat man $4 = n^2 - m^2$. Diese Gleichung hat aber für positive ganze Zahlen m, n keine Lösung, da die Abstände zwischen Quadraten, ab 2^2 größer als 4 sind und es darunter keine Lösung gibt, also ist $p \neq 2$. Damit ist aber alles gezeigt.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Nach Lösung 1 gilt $p^2 = 2m + 1$, woraus sofort folgt, dass p ungerade ist, also $p \geq 3$. Daraus ergibt sich $2m + 1 = p^2 \geq 3p > 2p + 1$, also $m > p$.

(Reinhard Razen) □

Lösung 3. Da $p^2 = n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$, die Zahl p^2 nur die positiven Teiler $1, p$ und p^2 hat und darüber hinaus die beiden Faktoren $n - m$ und $n + m$ verschieden sind, folgt $n - m = 1$ bzw. $n = m + 1$. Wegen $p < n$ ist daher $p \leq m$. Wäre $p = m$, so folgt $2p^2 = n^2$, also $\sqrt{2} = \frac{n}{p}$. Dies widerspricht aber der Irrationalität von $\sqrt{2}$. Also gilt $p < m$.

(Reinhard Razen) □