Einführung zu Ungleichungen

Raach 2009

Birgit Vera Schmidt

9. Juni 2009

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Basismethoden

1.1 Äquivalenzumformungen

Ähnlich wie bei Gleichungen darf man auch bei Ungleichungen mit beiden Seiten der Ungleichung dasselbe "tun", ohne dass sich etwas an der Gültigkeit ändert. Bei Ungleichungen müssen wir aber zusätzlich auf die Richtung des Ungleichheitszeichens aufpassen.

Umformungen, bei denen sich der Wahrheitswert der Ungleichung oder Gleichung nicht verändert, nennt man Äquivalenzumformungen. Folgende Äquivalenzumformungen gibt es (ohne Anspruch auf Vollständigkeit):

- Addieren oder Subtrahieren eines Terms
- Multiplizieren mit einem positiven Term
- Multiplizieren mit einem negativen Term und Umkehren des Ungleichheitszeichens
- Quadrieren, falls die Terme auf beiden Seiten sicher positiv sind
- Wurzelziehen, falls die Terme auf beiden Seiten sicher positiv sind
- Potenzieren mit einer ungeraden natürlichen Zahl
- Potenzieren mit einer geraden natürlichen Zahl, falls die Terme auf beiden Seiten sicher positiv sind
- Allgemein: Anwenden einer streng monoton steigenden Funktion auf beide Seiten oder
- Anwenden einer streng monoton fallenden Funktion auf beide Seiten und Umkehren des Ungleichheitszeichens

Üblicherweise schreibt man hinter einem Schrägstrich an, welche Umformung man anwendet.

Beispiel 1.1. Man zeige für $x \in \mathbb{R}^+$:

$$-\frac{x^2+3}{2} \leq x-1$$

Lösung.

$$
\begin{aligned}
-\frac{x^2+3}{2} &\leq x-1 \quad \Big| \cdot -2 \quad \Longleftrightarrow \\
x^2+3 &\geq -2x+2 \quad \Big| -2 \quad \Longleftrightarrow \\
x^2+1 &\geq -2x \quad \Big| +2x \quad \Longleftrightarrow \\
x^2+2x+1 &\geq 0 \quad \Longleftrightarrow \\
(x+1)^2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Dies würde, wie wir gleich sehen werden, sogar für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Wir wollen es in diesem Beispiel aber sowieso nur für positive x zeigen, für die die letzte Zeile trivialerweise stimmt. □

1.2 Kehrwert

Eine oft verwendete Äquivalenzumformung, das Bilden des Kehrwertes, sei nun noch einmal genauer beschrieben.

Satz 1.1. *Seien $f(x_1, x_2, \dots)$ und $g(x_1, x_2, \dots)$ Ausdrücke in den Variablen $x_1, x_2, \dots$ und gelte $f(x_1, x_2, \dots) > 0$ und $g(x_1, x_2, \dots) > 0$. Dann ist die Ungleichung*

$$f(x_1, x_2, \dots) \leq g(x_1, x_2, \dots)$$

äquivalent zur Ungleichung

$$\frac{1}{f(x_1, x_2, \dots)} \geq \frac{1}{g(x_1, x_2, \dots)} \ .$$

Beispiel 1.2. Für welche $x,y \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{y}{y+1} \ ?$$

Lösung. Da $x, x+1, y, y+1$ und somit auch $\frac{x}{x+1}$ und $\frac{y}{y+1}$ alle positiv sind, ist die Ungleichung äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
\frac{x+1}{x} &\geq \frac{y+1}{y} \quad \Longleftrightarrow \\
1+\frac{1}{x} &\geq 1+\frac{1}{y} \quad \Big| -1 \quad \Longleftrightarrow \\
\frac{1}{x} &\geq \frac{1}{y}
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ sind wiederum beide positiv, somit ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$x \leq y \ .$$

Die Ungleichung gilt also für alle Paare (x,y) mit $x \leq y$. □

1.3 Zerteilen von Summen und Produkten

Anstatt die gesamte linke mit der gesamten rechten Seite zu vergleichen, genügt es manchmal, einzelne Teile von Summen oder Produkten nacheinander zu vergleichen.

Satz 1.2. *Gelte*

$$\begin{aligned} a_1 &\le b_1 \ , \\ a_2 &\le b_2 \ , \\ &\vdots \\ a_n &\le b_n \ . \end{aligned}$$

Dann gilt auch

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le b_1 + b_2 + \cdots + b_n \ .$$

Sind die a_i und b_i positiv, gilt außerdem

$$a_1 a_2 \cdots a_n \le b_1 b_2 \cdots b_n \ .$$

1.4 $x^2 \ge 0$

Die wichtigste Ungleichung, auf die [so gut wie] alle anderen letzten Endes zurückgeführt werden können, ist folgende:

Satz 1.3. *Sei $x \in \mathbb{R}$, dann gilt*

$$x^2 \ge 0 \ . \tag{1.1}$$

Gleichheit gilt genau für $x = 0$.

Satz 1.4. *Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ge 0 \ . \tag{1.2}$$

Für uns bedeutet das, dass wir Ungleichungen lösen können, indem wir sie in diese Form überführen.

Beispiel 1.3. Man zeige: Für alle reellen a,b gilt:

$$a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} - 2 \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \ge 0$$

Lösung.

$$a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} - 2 \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = \left(\frac{1}{a} - b \right)^2 + \left(\frac{1}{b} - a \right)^2 \ge 0$$

laut Satz **??**. □

1.5 Basisungleichungen

Einige wichtige Ungleichungen kann man sich direkt aus dieser grundlegendsten aller Ungleichungen herleiten:

Ungleichung	**für**	**Gleichheit bei**
$a+1 \geq 2\sqrt{a}$	$a \in \mathbb{R}^+$	$a=1$
$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$	$a,b \in \mathbb{R}^+$	$a=b$
$x+\frac{1}{x} \geq 2$	$x \in \mathbb{R}^+$	$x=1$
$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geq 4$	$a,b \in \mathbb{R}^+$	$a=b$
$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$	$a,b,c \in \mathbb{R}^+$	$a=b=c$
$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$	$a,b,c \in \mathbb{R}$	$a=b=c$
$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$	$a,b,c \in \mathbb{R}$	$a=b=c$
$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$	$a,b,c \in \mathbb{R}$	$a=b=c$
$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$	$a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$	$bc=ad$
$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$	$a,b \in \mathbb{R}^+$	$a=b$
$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$	$a,b \in \mathbb{R},\ x,y \in \mathbb{R}^+$	$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$
$\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$	$x,y \in \mathbb{R}$	$x=y$
$2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$	$x,y \in \mathbb{R}$	$x=y$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$	$x,y \in \mathbb{R}^+$	$x=y$

Ebenfalls noch erwähnenswert ist die folgende Ungleichung:

Satz 1.5. *Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt*

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n} \quad . \tag{1.3}$$

Die Herleitung sei dem geneigten Leser zur Übung überlassen. Wichtig für uns ist, dass wir Ungleichungen beweisen können, indem wir sie auf eine dieser einfachen Ungleichungen zurückführen.

1.6 Verschärfen und Abschwächen

Paradoxerweise kann es manchmal leichter sein, eine "schwerere", also genauere (=schärfere), Ungleichung zu beweisen. In so einem Fall spricht man von Verschärfung. Mathematisch ausgedrückt:

Satz 1.6. *Sei $f(x_1, x_2, \ldots) \leq g(x_1, x_2, \ldots)$ die zu beweisende Ungleichung, wobei f und g beliebige Ausdrücke in den Variablen $x_1, x_2, \ldots$ sind, und gelingt es uns zu beweisen, dass für einen Ausdruck $h(x_1, x_2, \ldots)$ die Doppelungleichung*

$$f(x_1, x_2, \ldots) \leq h(x_1, x_2, \ldots) \leq g(x_1, x_2, \ldots)$$

gilt, so ist die Ungleichung bewiesen.

Hinweis. Natürlich gilt der Satz auch für $\geq$.

Meistens erhält man eine solche Verschärfung, indem man eine Seite der Ungleichung auf triviale Weise modifiziert, zum Beispiel durch Addieren eines mit Sicherheit positiven Terms.

Beispiel 1.4. Man zeige für positive a,b:

$$a^2 - ab + b^2 \geq 0$$

Lösung. Man verschärfe den Ausdruck, indem man von der linken Seite ab abzieht:

$$\begin{aligned} a^2 - ab + b^2 &\geq a^2 - ab + b^2 - ab \qquad \text{(Verschärfung)} \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \\ &= (a-b)^2 \geq 0 \qquad \text{(laut \textbf{??})} \end{aligned}$$

Dadurch, dass man die Aufgabe scheinbar schwieriger macht, kann man sie also sofort auf die viel einfachere Aussage $(a-b)^2 \geq 0$ umformen, die trivialerweise aus Satz **??** folgt. □

Will man umgekehrt eine Ungleichung widerlegen, so kann man das tun, indem man sie vereinfacht und trotzdem noch widerlegen kann. Mathematisch ausgedrückt:

Satz 1.7. *Sei $f(x_1, x_2, \ldots) \leq g(x_1, x_2, \ldots)$ die Ungleichung, die man widerlegen möchte, wobei f und g beliebige Ausdrücke in den Variablen $x_1, x_2, \ldots$ sind. Nehmen wir an, es gelingt zu zeigen, dass für einen Ausdruck $h(x_1, x_2, \ldots)$ gilt*

$$g(x_1, x_2, \ldots) \leq h(x_1, x_2, \ldots)$$

und dass es mindestens eine Art gibt, die Variablen $x_1, x_2, \ldots$ so zu wählen, dass

$$f(x_1, x_2, \ldots) > h(x_1, x_2, \ldots) \ .$$

Dann ist die Ungleichung widerlegt.

Beweis. Angenommen, $f(x_1, x_2, \ldots) \leq g(x_1, x_2, \ldots)$ würde für alle Werte für $x_1, x_2, \ldots$ gelten. Wir haben $g(x_1, x_2, \ldots) \leq h(x_1, x_2, \ldots)$ bewiesen, daher würde auch $f(x_1, x_2, \ldots) \leq h(x_1, x_2, \ldots)$ gelten. Wir wissen aber, dass mindestens ein Gegenbeispiel dafür existiert. Widerspruch. □

Beispiel 1.5. Man beweise oder widerlege für $a \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq a^2 - a - \frac{1}{a}$$

Lösung. Behauptung: Die Ungleichung ist falsch. Es gilt trivialerweise die Abschwächung, dass

$$a^2 - a - \frac{1}{a} \leq a^2 - a - \frac{1}{a} + 1 = \left(a + \frac{1}{a}\right)(a-1) \ .$$

Für einige Werte, beispielsweise $a = 0.5$, ist $(a + \frac{1}{a})(a-1) < 0$, und somit haben wir die Ungleichung widerlegt. □

Achtung: Ein häufiger Fehler ist es, zuerst zu verschärfen und dann auf einen Widerspruch zu führen. Dies ist natürlich nicht korrekt. Ebenso falsch ist es, etwas zuerst abzuschwächen und die abgeschwächte Form zu beweisen. Dies sagt nichts über die ursprüngliche Ungleichung aus.

1.7 Vollständige Induktion

Wie in vielen anderen Bereichen können auch Ungleichungen mittels vollständiger Induktion bewiesen werden. Das Prinzip derselben sei deshalb hier noch einmal wiederholt.

Die vollständige Induktion dient dazu, eine Behauptung, die in irgendeiner Form für alle natürlichen Zahlen n gelten soll, zu beweisen. Jede vollständige Induktion besteht aus zwei Schritten:

Induktionsbasis

Zunächst beweist man die Behauptung für kleine Werte von n. Dies kann mittels einer beliebigen anderen Methode erfolgen; meist ist die Aussage für $n \leq 3$ reichlich trivial.

Induktionsschritt

Nun gilt zu zeigen, dass aus der Gültigkeit der Aussage für n $(, n-1, n-2, \ldots, n-k)$ die Gültigkeit der Aussage für $n+1$ folgt. Grundsätzlich gilt: Wenn sich der Beweis der Aussage für $n+1$ auf die Gültigkeit der Aussage für die k nächstkleineren Werte stützt, so muss man die Induktionsbasis auch für k aufeinanderfolgende Werte zeigen! (Die Annahme, dass die Aussage für $n, n-1, n-2, \ldots, 1$ gilt, wird meist als Induktionsannahme bezeichnet.)

Es gibt im Wesentlichen drei Arten, den Induktionsschritt zu beweisen:

- Umformen der zu beweisenden Behauptung für $n+1$ auf eine wahre Aussage.
- Umformen einer wahren Aussage (z.B. der Aussage für n) zu der zu beweisenden Aussage für $n+1$.
- Umformen der linken Seite der zu beweisenden Behauptung auf die rechte Seite durch Verwendung bewiesener Aussagen.

Beispiel 1.6. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$n^2 \leq n^3$$

Lösung. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion.

Induktionsbasis: Für $n = 1$ gilt trivialerweise, dass $1^2 \leq 1^3$.

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \qquad \text{(ausmultiplizieren)}\\
&\leq n^3 + 2n + 1 \qquad \text{(Induktionsannahme für } n\text{)}\\
&\leq n^3 + 2n + 1 + 3n^2 + n \qquad \text{(Addition einer positiven Zahl)}\\
&= (n+1)^3
\end{aligned}$$

□

Hinweis. Manchmal kann es einfacher sein zu zeigen, dass aus der Gültigkeit für $n-1$ die Gültigkeit für n folgt. Dies ist nur eine Änderung der Notation und somit natürlich ebenfalls korrekt.

Hinweis. Manchmal ist es notwendig (oder zumindest einfacher), die Gültigkeit für $n+1$ basierend auf der Gültigkeit für alle kleineren Werte $1, 2 \dots n$ zu zeigen. Auch dies ist zulässig.

1.8 Vorwärts-Rückwärts-Induktion

In manchen Fällen führt eine Abwandlung der vollständigen Induktion schneller zum Erfolg. Beispielsweise kann es in manchen Fällen relativ leicht sein, eine Behauptung für alle Potenzen von 2 zu zeigen, während der direkte Induktionsschritt von n nach $n+1$ sich als schwierig erweist. Kann man zusätzlich einen verkehrten Induktionsschritt von n auf $n-1$ beweisen, so ist die Behauptung ebenfalls für alle natürlichen Zahlen bewiesen.

Die Vorwärts-Rückwärts-Induktion funktioniert folgendermaßen:

- Man zeige die Aussage mittels normaler vollständiger Induktion für alle 2er-Potenzen, also $1, 2, 4, \dots, 2^m, \dots$.
- Man beweise: Falls die Aussage für n gilt, gilt sie auch für $n-1$.

Hinweis. Im ersten Schritt kann man die Behauptung statt für 2er-Potenzen auch für eine beliebige andere Folge zeigen, die beliebig große Zahlen enthält (i.e. gegen ∞ strebt). Typische Beispiele dafür wären beispielsweise Quadratzahlen oder Primzahlen.

Klassisches Beispiel für eine Vorwärts-Rückwärts-Induktion ist der Beweis für die Arithmetisch-Geometrische Mittelungleichung (siehe **??**). Wir wollen uns diesen Beweis daher nun in allen Details anschauen:

Beispiel 1.7. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$$

Lösung. Wir beweisen die Ungleichung mittels Vorwärts-Rückwärts-Induktion. Zunächst wollen wir die Behauptung für alle 2er-Potenzen zeigen.

Induktionsbasis: Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial, für $n = 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + x_2}{2} &\overset{!}{\geq} \sqrt{x_1 x_2} && \Big| \cdot 2 \quad \Longleftrightarrow \\
x_1 + x_2 &\geq 2\sqrt{x_1 x_2} && \Big|^2 \quad \Longleftrightarrow \\
x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 &\geq 4x_1x_2 && \Big| - 4x_1x_2 \quad \Longleftrightarrow \\
x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 &\geq 0 \quad \Longleftrightarrow \\
(x_1 - x_2)^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Dies ist wahr laut Satz **??**.

Induktionsschritt: Als nächstes wollen wir zeigen, dass aus der Gültigkeit für n und für 2 die Gültigkeit für $2n$ folgt.

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{2n} \\
&= \frac{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} + \frac{x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2} \\
&\geq \sqrt{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}} && \text{(Induktionsannahme für 2)} \\
&\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot x_{n+2} \cdot \cdots \cdot x_{2n}}} && \text{(Induktionsannahme für } n\text{)} \\
&= \sqrt[2n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \cdot x_{n+2} \cdot \cdots \cdot x_{2n}}
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage für alle 2er-Potenzen bewiesen.

Rückwärtsinduktionsschritt: Nun gilt es nur noch zu zeigen, dass aus der Gültigkeit für n auch die Gültigkeit für $n-1$ folgt. Zu zeigen also:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \leq \sqrt[n-1]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{n-1}}$$

Wir setzen $x_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$. Es gilt praktischerweise:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$$

Aus der Gültigkeit der Behauptung für n folgt daher:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{n} \\
&\geq (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}} && \Big| \cdot \left(\cdots\right)^{-\frac{1}{n}} \\
\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}} &\geq (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} && \Big|^{\frac{n}{n-1}} \\
\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} &\geq (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n-1}}
\end{aligned}$$

Dies entspricht bereits der Aussage, die wir beweisen wollten. □

1.9 Substitution

Ein anderer Trick besteht darin, Variablen geschickt so zu substituieren, dass die neue Form einfacher zu handhaben ist. Obwohl es den einen oder anderen bekannten Trick gibt, ist das Finden einer guten Substitution eine Frage der Erfahrung und Intuition.

Wichtig ist es zu beachten, dass mit den neuen Variablen weiterhin alle Fälle abgedeckt werden.

1.9.1 Methode

Satz 1.8. *Sei eine Ungleichung in den n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben, die für alle*

$$x_1 \in D_1, x_2 \in D_2, \ldots, x_n \in D_n$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

gezeigt werden soll.

Man wähle k neue Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_k$ mit den Definitionsbereichen

$$y_1 \in E_1, y_2 \in E_2, \ldots, y_k \in E_k$$

und eventuell mit neuen Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g_1(y_1, y_2, \ldots, y_k) &= 0 \\ g_2(y_1, y_2, \ldots, y_k) &= 0 \\ &\vdots \\ g_l(y_1, y_2, \ldots, y_k) &= 0 \ , \end{aligned}$$

sodass die alten Variablen als Funktionen der neuen ausgedrückt werden, d.h.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(y_1, y_2, \ldots, y_k) \\ x_2 &= x_2(y_1, y_2, \ldots, y_k) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(y_1, y_2, \ldots, y_k) \end{aligned}$$

Man setze für die x_i nun die entsprechenden Funktionen ein und erhalte eine Ungleichung in den Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Falls diese Ungleichung gezeigt werden kann und falls für jedes Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, für das die ursprüngliche Ungleichung gezeigt werden sollte, gültige Werte für $y_1, y_2, \ldots, y_k$ gefunden werden können, die alle neuen Nebenbedingungen erfüllen, dann ist die Ungleichung bewiesen.

Hinweis. Manchmal ist es offensichtlicher, die y_i als Funktionen der x_i anzuschreiben. Solange man darauf achtet, für die y_i die richtigen Definitionsbereiche zu wählen, ist das in Ordnung.

1.9.2 Einige häufig verwendete Substitutionen

Ohne Anspruch auf Vollständigkeit seien nun einige nützliche Substitutionen erwähnt. Im Folgenden seien a,b,c,d,e oder x,y,z jeweils die Variablen der zu beweisenden Ungleichung, und s,t,u,v,w die Variablen, mit denen substituiert wird.

- $x = \frac{1}{s}$, $y = \frac{1}{t}$, $z = \frac{1}{u}$
- Falls $xyz = 1$ gilt: $x = \frac{s}{t}$, $y = \frac{t}{u}$, $z = \frac{u}{s}$
- $x = s + t$, $y = t + u$, $z = u + s$
- $x + y = s$, $y + z = t$, $z + x = u$ (Man beachte: $x = \frac{s+u-t}{2}$, y und z analog)
- $x = s + t$, $y = s - t$
- $\frac{x+y}{2} = s$, $\frac{x-y}{2} = t$ (Man beachte: $x = s + t, y = s - t$)
- $x = s + \frac{1}{t}$, $y = t + \frac{1}{s}$
- Falls $x,y,z > 0$: $x = \frac{st}{u}$, $y = \frac{tu}{s}$, $z = \frac{us}{t}$ (Man beachte: $xy = t^2$, yz und zx analog)
- Falls eine Ungleichung gegeben ist, in denen a,b,c,d,e nur in den Ausdrücken $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}, \frac{e}{a}$ und Kehrwerten davon vorkommen, bietet sich folgende Substitution an: $\frac{a}{b} = s$, $\frac{b}{c} = t$, $\frac{c}{d} = u$, $\frac{d}{e} = v$, $\frac{e}{a} = \frac{1}{stuv}$
- Falls $x \leq y \leq z$: $y = x + s$, $z = x + s + t$ mit $s,t \geq 0$.
- Falls $0 < x \leq y \leq z$: $y = sx$, $z = tx$ mit $1 \leq s \leq t$.

1.10 Eine generelle Warnung

Bevor wir uns nun einige bekannte Ungleichungen ansehen, noch eine allgemeine Warnung: Jeder Satz hat gewisse Voraussetzungen. Bevor man sich auf einen Satz beruft, muss man immer erst überprüfen, ob die Voraussetzungen dafür überhaupt gegeben sind!

KAPITEL 2

Mittelungleichungen

Eine ganze Reihe von Ungleichungen behandelt die Relationen zwischen verschiedenen Mittelwerten.

2.1 Harmonisches, Geometrisches, Arithmetisches und Quadratisches Mittel

Definieren wir zunächst die vier bekanntesten Mittelwerte:

Definition. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, dann bezeichnen wir

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

als **arithmetisches Mittel** (AM).

Definition. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, dann bezeichnen wir

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$$

als **geometrisches Mittel** (GM).

Definition. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, dann bezeichnen wir

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

als **harmonisches Mittel** (HM).

Definition. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, dann bezeichnen wir

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

als **quadratisches Mittel** (QM).

Satz 2.1. *(Mittelungleichung) Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt*

$$HM \leq GM \leq AM \leq QM \ . \tag{2.1}$$

Gleichheit gilt jeweils genau für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Je nachdem, welchen Teil dieser Ungleichung man für einen Beweis verwendet, spricht man von der arithmetisch-geometrischen, geometrisch-harmonischen, ... Mittelungleichung.

Aus der arithmetisch-harmonischen Mittelungleichung können wir uns noch sofort folgende oftmals nützliche Tatsache herleiten:

Satz 2.2. *Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt*

$$\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geq n^2 \tag{2.2}$$

mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

2.2 alpha-Mittel

Wir können das Konzept der Mittelungleichungen auf allgemeinere Mittelwerte erweitern.

Definition. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{\neq 0}$. Dann bezeichnen wir

$$\left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

als **α-Mittel** m_α.

Insbesondere gilt für die zuvor definierten Mittel: $AM = m_1$, $QM = m_2$, $HM = m_{-1}$. Per definitionem gilt außerdem $GM = m_0$. Weiters kann man die Definition noch ergänzen um $m_{-\infty} = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $m_\infty = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. (Man kann zeigen, dass diese drei zusätzlich definierten Werte entstehen, wenn man den Grenzübergang für α gegen den entsprechenden Wert $(0, -\infty, \infty)$ berechnet.)

Hinweis. Es existieren für dieses Mittel die verschiedensten Bezeichnungen, unter anderem k-tes Mittel, Mittel der Ordnung oder vom Grad k oder Mittel mit Exponent k. Und manchmal, beispielsweise in der deutschsprachigen Wikipedia, wird ungeachtet sämtlicher möglicher Missverständnisse auch die Bezeichnung „Potenzmittel“ verwendet. (Die dafür am nähesten an die englischsprachige Bezeichnung „power mean“ heran kommt.)

Satz 2.3. *Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$, und seien m_α und m_β die dazugehörigen Mittel. Dann gilt*

$$m_{-\infty} \leq m_\alpha \leq m_\beta \leq m_\infty \ . \tag{2.3}$$

Gleichheit gilt genau für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

2.3 Gewichtete Mittel

Man kann bei der Berechnung eines Mittelwertes einigen der x_i-Werte mehr Gewicht geben als anderen. Indem man jedem x_i ein positives Gewicht w_i zuweist, entstehen die sogenannten gewichteten Mittelwerte.

Definition. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ und $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei $w = \sum_{i=1}^n w_i$. Dann definiert man das

- gewichtete arithmetische Mittel (gAM):
$$\frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n}{w} \tag{2.4}$$
- gewichtete geometrische Mittel (gGM):
$$\sqrt[w]{x_1^{w_1} x_2^{w_2} \cdots x_n^{w_n}} \tag{2.5}$$
- gewichtete harmonische Mittel (gHM):
$$\frac{w}{\frac{w_1}{x_1} + \frac{w_2}{x_2} + \cdots + \frac{w_n}{x_n}} \tag{2.6}$$
- gewichtete quadratische Mittel (gQM):
$$\sqrt{\frac{w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + \cdots + w_n x_n^2}{w}} \tag{2.7}$$
- gewichtete α-Mittel für $\alpha \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ ($\hat{m}_\alpha$):
$$\left(\frac{w_1 x_1^\alpha + w_2 x_2^\alpha + \cdots + w_n x_n^\alpha}{w} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{2.8}$$

  Analog zu oben definieren wir zusätzlich: $\hat{m}_0 = gGM$, $\hat{m}_{-\infty} = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $\hat{m}_\infty = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Satz 2.4. *Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ mit den Gewichten $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}_{>0}$, und seien die gewichteten Mittel wie oben bezeichnet. Dann gilt*

$$gHM \leq gGM \leq gAM \leq gQM \ . \tag{2.9}$$

Gleichheit gilt genau für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Satz 2.5. *Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ mit den Gewichten $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}_{>0}$, und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ und $\hat{m}_\alpha$ und $\hat{m}_\beta$ die dazugehörigen Mittel. Dann gilt*

$$\hat{m}_{-\infty} \leq \hat{m}_\alpha \leq \hat{m}_\beta \leq \hat{m}_\infty \ . \tag{2.10}$$

Gleichheit gilt genau für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

2.4 MacLaurin-Ungleichung

Den Bereich zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel kann man noch genauer abschätzen mittels elementarsymmetrischer Polynome. Die entsprechende Ungleichung ist benannt nach dem schottischen Mathematiker Colin MacLaurin (1698 - 1746).

Satz 2.6. *(MacLaurin-Ungleichung) Seien $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$. Man definiere:*

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \\
S_2 &= \frac{\sum\limits_{1 \le i < j \le n} x_i x_j}{\binom{n}{2}} \\
S_3 &= \frac{\sum\limits_{1 \le i < j < k \le n} x_i x_j x_k}{\binom{n}{3}} \\
&\vdots \\
S_k &= \frac{\sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}}{\binom{n}{k}} \\
&\vdots \\
S_n &= x_1 x_2 \cdots x_n
\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$S_1 \ge \sqrt{S_2} \ge \sqrt[3]{S_3} \ge \cdots \ge \sqrt[n]{S_n} \tag{2.11}$$

Für $n = 4$ bedeutet das beispielsweise:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} &\ge \sqrt{\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4}{6}} \\
&\ge \sqrt[3]{\frac{x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4}{4}} \\
&\ge \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}
\end{aligned}$$

KAPITEL 3

Ordnungsungleichung

3.1 Ordnungsungleichung (Umordnungsungleichung, Hauptsatz, Rearrangement Inequality, Dagobert-Duck-Ungleichung, ...)

Nehmen wir an, es stehen drei Stapel mit einer ausreichenden Anzahl an 100-, 50- und 10-Euro-Scheinen zur Verfügung. Dagobert Duck darf von einem Stapel 8 Scheine nehmen, von einem anderen Stapel 4 und vom dritten Stapel 2 Scheine. Wie kann er die Ausbeute maximieren?

Logischerweise wird man vom wertvollsten Stapel am meisten nehmen, und so weiter. Dieses Prinzip kann man nun verallgemeinern:

Satz 3.1. *(Ordnungsungleichung) Seien $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ und $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ zwei Folgen reeller Zahlen, und sei $c_1, c_2, \ldots, c_n$ eine beliebige Permutation von $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i c_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1} \ . \tag{3.1}$$

Das Maximum wird also erreicht, wenn man jeweils die größten Elemente multipliziert, dann die zweitgrößten, und so weiter. Das Minimum erhält man umgekehrt, indem man das größte Element der einen Folge mit dem kleinsten der anderen multipliziert, das zweitgrößte mit dem zweitniedrigsten, et cetera.

Zumindest für das Maximum lässt sich der Satz auf mehr als zwei Folgen *positiver* reeller Zahlen verallgemeinern:

Satz 3.2. *Seien*

$$\begin{gathered}
x_1^{(1)} \geq x_2^{(1)} \geq \cdots \geq x_n^{(1)} \\
x_1^{(2)} \geq x_2^{(2)} \geq \cdots \geq x_n^{(2)} \\
\vdots \\
x_1^{(k)} \geq x_2^{(k)} \geq \cdots \geq x_n^{(k)}
\end{gathered}$$

k gleich sortierte Folgen positiver reeller Zahlen, und seien $y_i^{(j)}$ beliebige Permutationen dieser Folgen. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{(1)} x_i^{(2)} \cdots x_i^{(k)} \geq \sum_{i=1}^{n} y_i^{(1)} y_i^{(2)} \cdots y_i^{(k)} \ . \tag{3.2}$$

Das heißt das Maximum wird erreicht, wenn man jeweils die größten Elemente multipliziert, dann die zweitgrößten, et cetera.

Wichtige Sonderfälle

Einige wichtige Sonderfälle, die in Wettbewerbsaufgaben oft vorkommen, wollen wir nun noch genauer betrachten.

- $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$: Beide Seiten kann man als Produkte der Folge $\{a,b,c\}$ mit sich selbst betrachten. Ungeachtet dessen, welche der Zahlen a,b,c am größten ist, wird bei $a^2 + b^2 + c^2$ auf jeden Fall die größte Zahl mit der größten multipliziert, die zweitgrößte mit der zweitgrößten, und so weiter. Damit ist die Summe dieser Produkte sicher größer oder gleich als jede andere Art, die Elemente miteinander zu multiplizieren, insbesondere die auf der rechten Seite der Ungleichung gegebene Art. Das Prinzip lässt sich natürlich auf mehr als 3 Zahlen erweitern.
- Sei $a \geq b \geq c \geq d$ für $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$. Dann ist $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{d}$. Daraus folgt sofort, dass das Maximum für die Folgen $\{a,b,c,d\}$ und $\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\}$ bei $\frac{a}{d} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{d}{a}$ erreicht wird. Das Minimum ist bei $\frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c} + \frac{d}{d} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ erreicht. Jede andere Reihenfolge liegt irgendwo dazwischen. Insbesondere haben wir damit auch gezeigt, dass $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4$. Auch dieses Prinzip lässt sich adaptieren für mehr oder weniger als 4 Zahlen. Für 2 Zahlen erhalten wir zum Beispiel genau die bereits bekannte Ungleichung $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
- Die Tatsache, dass a,b,c,d und $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ ungeachtet der Größenverhältnisse der Zahlen immer entgegengesetzt geordnet sind, können wir nutzen, um zum Beispiel zu zeigen, dass $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq a + b + c + d$ für alle $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$.

3.2 Tschebyscheff-Ungleichung

Benannt nach dem russischen Mathematiker Pafnuti Lwowitsch Tschebyscheff (Пафнутий Львович Чебышёв, 1821-1894) gilt der folgende Satz, den man nach dem Ausmultiplizieren mittels der Ordnungsungleichung leicht beweisen kann:

Satz 3.3. *(Tschebyscheff-Ungleichung) Seien $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ und $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ zwei Folgen reeller Zahlen.Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right) \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1} \ . \tag{3.3}$$

Hinweis. Durch Umordnen der Summen folgt sofort, dass der Satz auch für zwei aufsteigend sortierte Folgen gilt.

KAPITEL 4

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, die manchmal auch Cauchy-Schwarz-Buniakowsky- oder einfach nur Cauchy-Ungleichung genannt wird, ist ein weiteres wichtiges Hilfsmittel beim Lösen von Ungleichungsaufgaben.

Satz 4.1. *(Cauchy-Schwarz-Ungleichung) Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ reelle Zahlen. Dann gilt*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \ . \tag{4.1}$$

Gleichheit gilt genau für $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Daraus lassen sich sofort folgende weiteren Ungleichungen herleiten:

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \cdots + \sqrt{a_n b_n} \leq \sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)} \tag{4.2}$$

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n} \leq \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}\right)^2 \leq \frac{a_1}{b_1^2} + \frac{a_2}{b_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n^2} \tag{4.4}$$

KAPITEL 5

Ungleichungen als Funktionen

Im Grunde genommen kann man jede Ungleichung als Funktion in den entsprechenden Variablen sehen. Nun gibt es einige Sätze, die darauf beruhen, mit diesen Funktionen zu arbeiten.

5.1 Monotonie

Betrachten wir zunächst Funktionen mit nur einer Variablen.

Definition. Eine Funktion $f(x)$ heißt **monoton steigend** (fallend), wenn aus $x > y$ folgt, dass $f(x) \geq f(y) \quad {\scriptstyle (f(x) \leq f(y))}$. Ist die Ungleichung strikt, d.h. $f(x) > f(y) \quad {\scriptstyle (f(x) < f(y))}$, so sagt man, dass die Funktion ***streng* monoton steigend** (fallend) ist.

Wenn eine Funktion diese Eigenschaft nur in einem gewissen Bereich erfüllt, so sagt man, dass die Funktion in diesem Bereich [streng] monoton steigend (fallend) ist.

Satz 5.1. *Sei $f(x)$ im Bereich $[a,b]$ monoton steigend. Dann gilt für alle $x \in [a,b]$*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)\ . \tag{5.1}$$

Analog kann man natürlich auch monoton fallende Funktionen abschätzen.

Diese Abschätzung kann manchmal sehr nützlich sein. Ein einfaches Beispiel:

Beispiel 5.1. Man zeige für $a,b \in \mathbb{R}^+$:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^3 \geq 8$$

Lösung. Die Funktion $f(x) = x^3$ ist überall monoton steigend. Es gilt bekanntlich $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Wegen der Monotonie folgt sofort:

$$\begin{aligned} f(2) &\leq f\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \\ 8 &\leq f\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

□

Noch zwei kurze Hilfssätzchen (die für monoton fallende Funktionen analog gelten und der Übersichtlichkeit halber nur in einer Richtung angegeben werden):

Lemma 5.2. *Sei $f(x)$ in einem Bereich [streng] monoton steigend. Dann ist $-f(x)$ in diesem Bereich [streng] monoton fallend. Ist $f(x)$ in dem Bereich zusätzlich überall positiv, dann ist $\frac{1}{f(x)}$ ebenfalls [streng] monoton fallend.*

Lemma 5.3. *Seien $f(x)$ und $g(x)$ in einem Bereich [streng] monoton steigend. Dann ist auch $f(x)+g(x)$ in diesem Bereich [streng] monoton steigend. Sei $c \in \mathbb{R}^+$ eine Konstante, dann ist $cf(x)$ ebenfalls [streng] monoton steigend, und $(-c)f(x)$ [streng] monoton fallend.*

Monotonieverhalten bestimmen

Das Bestimmen des Monotonieverhaltens erfolgt entweder durch expliziten Beweis oder über Berechnung der ersten Ableitung. Letzteres wird dem einen oder anderen aus der Schule bekannt sein. Grundsätzlich gibt es keine Wettbewerbsaufgaben, für die es **notwendig** ist, Ableitungen berechnen zu können, aber wenn man es schon gelernt hat, ist es sicherlich nützlich.

Satz 5.4. *Sei $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ differenzierbar. Dann ist $f(x)$ genau dann monoton steigend im Bereich $[a,b]$, wenn*

$$f'(x) \geq 0$$

für alle $x \in [a,b]$ gilt. Ist die Ungleichung strikt, so ist die Funktion sogar streng monoton steigend. Analog ist die Funktion natürlich fallend, falls der Wert der Ableitung negativ ist.

Wir wollen uns die direkte Methode nun anhand eines Beispiels anschauen:

Beispiel 5.2. Man zeige für $x \geq 1, x \in \mathbb{R}^+$:

$$x^2 + 3x + 2 - \frac{1}{x} \geq 5$$

Lösung. Behauptung: Die Funktion $f(x) = x^2 + 3x + 2 - \frac{1}{x}$ ist im Bereich $(0, \infty)$ monoton steigend. Um dies zu beweisen, zeigen wir: Wenn $x < y$, dann gilt auch $f(x) < f(y)$. Sei nun also $0 < x < y$. Zu zeigen:

$$x^2 + 3x + 2 - \frac{1}{x} < y^2 + 3y + 2 - \frac{1}{y}$$

Wir vergleichen die Teile der Summe einzeln:

$$\begin{aligned} x^2 &< y^2 \\ 3x &< 3y \\ 2 &\leq 2 \\ -1/x &< -1/y \end{aligned}$$

Diese vier Ungleichungen sind trivialerweise wahr, und somit ist auch die Ungleichung für die Summe bewiesen. Da die Funktion streng monoton steigend ist und $x \geq 1$ sein soll, gilt

$$\begin{aligned} f(1) &\leq f(x) \\ 5 &\leq f(x) = x^2 + 3x + 2 - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

und die Ungleichung ist bewiesen. □

Bekannte Funktionen

Das Monotonieverhalten einiger bekannter Funktionen:

- $f(x) = x^\alpha$ ist
  - im Bereich $(0, \infty)$
    - für $\alpha > 0$ streng monoton steigend
    - für $\alpha = 0$ konstant 1
    - für $\alpha < 0$ streng monoton fallend
  - für $\alpha = 2n, n \in \mathbb{N}$ im Bereich $(-\infty, 0)$ streng monoton fallend
  - für $\alpha = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$ im Bereich $(-\infty, \infty)$ streng monoton steigend
  - ... und für die meisten anderen Fälle kompliziert.
- $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ streng monoton fallend und in 0 undefiniert
- $f(x) = |x|$ ist
  - im Bereich $[0, \infty)$ streng monoton steigend
  - im Bereich $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend

5.2 Minima und Maxima

Definition. Sei $f(x)$ eine Funktion auf dem Definitionsbereich D und sei $x_0 \in D$ ein Wert, sodass für alle anderen $x \in D$ die Ungleichung

$$f(x) \leq f(x_0)$$

gilt, so nennt man x_0 ein (globales) Maximum. Gilt

$$f(x) \geq f(x_0)$$

für alle $x \in D$, so spricht man von einem (globalen) Minimum.

Wie man Minima und Maxima bestimmt, ist ebenfalls eher Schul- als Olympiadenstoff, und wird im Normalfall für keine Aufgabe vorausgesetzt. Wer schon ableiten kann, kann dieses Wissen aber natürlich einsetzen.

Von einem Sonderfall, der Parabel, kann man das Minimum oder Maximum relativ leicht bestimmen:

Satz 5.5. *Sei $f(x) = ax^2 + bx + c$ für $a,b,c \in \mathbb{R}$. Dann liegt der einzige Extremwert bei $x = -\frac{b}{2a}$. Für $a > 0$ handelt es sich um ein Minimum, für $a < 0$ um ein Maximum.*

5.3 Konvexe und konkave Funktionen

Neben der Steigung kann man sich bei einer Funktion auch noch dafür interessieren, wie sie gekrümmt ist.

Definition. Eine Funktion heißt **konvex** im Intervall $[a,b]$, wenn für alle $x,y \in [a,b]$ und alle $t \in [0,1]$ gilt:

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(tx + (1-t)y)$$

Ist die Ungleichung strikt, so sagt man, dass die Funktion ***streng*** **konvex** ist.

Einfach ausgedrückt bedeutet das: Wählt man zwei beliebige Punkte $(x,f(x))$ und $(y,f(y))$ auf der Kurve, dann ist die direkte Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten an jeder Stelle höher als der Funktionswert.

Definition. Ersetzt man in der obigen Definition das $\geq$ durch ein $\leq$, so erhält man die Definition einer **konkaven** Funktion.

Es gelten einige einfache Sätze für konvexe und konkave Funktionen:

Lemma 5.6. *Sei $f(x)$ auf dem Bereich $[a,b]$ konvex, dann ist $-f(x)$ auf demselben Bereich konkav (und umgekehrt).*

Lemma 5.7. *Seien $f(x)$ und $g(x)$ auf dem Bereich $[a,b]$ konvex, dann ist $f(x) + g(x)$ auf dem Bereich ebenfalls konvex. Sei $c \in \mathbb{R}^+$ eine Konstante, dann ist $cf(x)$ ebenfalls konvex und $(-c)f(x)$ konkav. Analoges gilt natürlich für konkaves $f(x)$.*

Satz 5.8. *Eine überall konvexe Funktion hat höchstens ein lokales Minimum und kein lokales Maximum. Eine überall konkave Funktion dagegen hat höchstens ein lokales Maximum und kein lokales Minimum.*

Für uns bedeutet das: Haben wir ein lokales Maximum oder Minimum einer konkaven bzw. konvexen Funktion gefunden, brauchen wir nicht mehr nach weiteren Extremwerten zu suchen. (Ein lokales Maximum bzw. Minimum ist ein solches, das größer bzw. kleiner ist als alle anderen Funktionswerte in einem kleinen Bereich.) Gelingt es uns beispielsweise bei einer (auf dem gesamten Bereich) konvexen Funktion zu zeigen, dass $f(2)$ kleiner ist als $f(x)$ für alle $x \in [1,3]$, dann ist $f(2)$ der kleinste Wert, der von der Funktion im gesamten Bereich $(-\infty, \infty)$ angenommen wird.

Zu konvexen Funktionen gibt es viele interessante Sätze, etwa den folgenden:

Satz 5.9. *Sei $f(x)$ eine im Bereich $[a,b]$ konvexe Funktion und seien $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n+1} < b$ reelle Zahlen. Dann gilt*

$$f(x_1) - f(x_2) + f(x_3) - \cdots - f(x_{2n}) + f(x_{2n+1}) \geq f(x_1 - x_2 + x_3 - \cdots - x_{2n} + x_{2n+1}) \ .$$

Krümmungsverhalten bestimmen

Wie das Monotonieverhalten kann man auch das Krümmungsverhalten theoretisch direkt beweisen. Praktisch ist das aber meistens doch recht aufwändig. Falls man schon differenzieren kann, gibt es eine deutlich einfachere Methode:

Satz 5.10. *Sei $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ zweimal differenzierbar. Dann ist $f(x)$ genau dann konvex im Bereich $[a,b]$, wenn*

$$f''(x) \geq 0$$

für alle $x \in [a,b]$ gilt. Ist die Ungleichung strikt, so ist die Funktion sogar streng konvex. Analog ist die Funktion natürlich konkav, falls der Wert der zweiten Ableitung negativ ist.

Bekannte Funktionen

Ebenso wie beim Monotonieverhalten kann man sich auch bei der Krümmung auf einige bekannte Funktionen berufen:

- $f(x) = x^\alpha$ ist
  - im Bereich $(0, \infty)$
    - für $\alpha > 1$ streng konvex
    - für $\alpha = 1$ konvex und konkav (linear)
    - für $1 > \alpha > 0$ streng konkav
    - für $\alpha = 0$ konvex und konkav (konstant 1)
    - für $\alpha < 0$ streng konvex
  - für $\alpha = 2n, n \in \mathbb{N}_{>0}$ im Bereich $(-\infty, \infty)$ streng konvex
  - für $\alpha = 2n+1, n \in \mathbb{N}$ im Bereich $(-\infty, 0)$ streng konkav
- $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $(-\infty, 0)$ streng konkav und auf $(0, \infty)$ streng konvex
- $f(x) = |x|$ ist im Bereich $(-\infty, \infty)$ konvex

5.4 Jensen-Ungleichung

Nun, da wir all diese Grundlagen definiert haben, können wir endlich zum für uns eigentlich interessanten Teil kommen, der nach dem dänischen Mathematiker Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925) benannten Ungleichung.

Satz 5.11. *(Jensen-Ungleichung) Sei $f(x)$ konvex im Intervall $[a,b]$ und seien $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a,b]$ mit Gewichten $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0,1]$ sodass $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$. Dann gilt*

$$t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n) \geq f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n) \ .$$

Wenn $f(x)$ konkav ist, muss man das Ungleichheitszeichen umdrehen. Gleichheit gilt genau für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ (oder natürlich für $t_1 = 1, t_2 = t_3 = \cdots = t_n = 0$, oder für eine lineare Funktion).

5.5 Homogene Ungleichungen

Zuletzt betrachten wir noch eine Gruppe von besonderen Funktionen.

Definition. Sei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Funktion in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Man nennt die Funktion **homogen** vom Grad r, falls für ein (fixes) $r \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^r f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ .$$

Für uns haben homogene Funktionen eine nützliche Eigenschaft: Nehmen wir an, wir wollen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ zeigen, und f ist homogen. Dann dürfen wir entweder eine Variable frei (aber ungleich 0) wählen, oder einem bestimmten homogenen Ausdruck in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ einen beliebigen Wert zuweisen, beispielsweise die Summe oder das Produkt gleich 1 setzen. Es muss dabei allerdings immer sichergestellt sein, dass für jede Wahl der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ein Wert t gefunden werden kann, sodass die Werte $x_1' = \frac{x_1}{t}$, $x_2' = \frac{x_2}{t}$, …, $x_n' = \frac{x_n}{t}$ die neue Nebenbedingung erfüllen.

KAPITEL 6

Symmetrische und Zyklische Ungleichungen

6.1 Notation

Viele Ungleichungen sind symmetrisch oder zyklisch in den auftretenden Variablen. (Das liegt nicht unbedingt daran, dass solche Ungleichungen in der Natur so häufig vorkommen, sondern daran, dass sie als Wettbewerbsangaben als hübscher empfunden werden als völlig aus der Luft gegriffen wirkende Angaben.)

Ein Ausdruck heißt **symmetrisch**, wenn man die Variablennamen darin beliebig permutieren kann. Wenn nur eine Vorwärtsvertauschung möglich ist, nennt man den Ausdruck **zyklisch**.

Um sich Schreibarbeit zu ersparen, führt man folgende Notationen ein:

Definition. Sei $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ein Ausdruck in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dann bezeichnet

$$\sum_{sym(x_1,x_2,\ldots,x_n)} P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n) \text{ Permutation von } (1,2,\ldots,n)} P(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$$

die Summe aller symmetrischen Vertauschungen, und

$$\sum_{cyc(x_1,x_2,\ldots,x_n)} P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} P(x_{(1+k \bmod n)}, x_{(2+k \bmod n)}, \ldots, x_{(n+k \bmod n)})$$

die Summe aller zyklischen Vertauschungen. Falls klar ist, für welche $x_1, x_2, \ldots, x_n$ symmetrisch oder zyklisch vertauscht werden soll, kann man die genauere Definition in der Klammer nach *sym* bzw. *cyc* weglassen.

Für drei Variablen bedeutet das beispielsweise:

$$\sum_{sym(x,y,z)} P(x,y,z) = P(x,y,z) + P(x,z,y) + P(y,x,z) + P(y,z,x) + P(z,x,y) + P(z,y,x)$$

$$\sum_{cyc(x,y,z)} P(x,y,z) = P(x,y,z) + P(y,z,x) + P(z,x,y)$$

Ein paar noch konkretere Beispiele:

$$\sum_{sym} xyz = xyz + xzy + yxz + yzx + zxy + zyx = 6xyz$$
$$\sum_{cyc} xyz = xyz + yzx + zxy = 3xyz$$

$$\sum_{sym(x,y,z)} xy = xy + xz + yx + yz + zx + zy$$
$$\sum_{cyc(x,y,z)} xy = xy + yz + zx$$

6.2 Ungleichung von Schur

Der Mathematiker Issai Schur (1875-1941) hat folgenden Satz bewiesen:

Satz 6.1. *(Ungleichung von Schur) Seien $x,y,z \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt für jedes $r \in \mathbb{R}$:*

$$\sum_{cyc(x,y,z)} x^r(x-y)(x-z) \geq 0$$

Daraus folgen folgende Sonderfälle:

$$\sum_{cyc(x,y,z)} x(x-y)(x-z) \geq 0 \tag{6.1}$$
$$3xyz + x^3 + y^3 + z^3 \geq \sum_{cyc(x,y,z)} (x^2y + xy^2) \geq 2 \sum_{cyc(x,y,z)} (xy)^{\frac{3}{2}} \tag{6.2}$$
$$xyz \geq (x+y-z)(x+z-y)(y+z-x) \tag{6.3}$$
$$\sum_{cyc(x,y,z)} x^4 + \sum_{cyc(x,y,z)} x^2yz \leq 2 \sum_{cyc(x,y,z)} x^2y^2 \tag{6.4}$$

6.3 Muirhead-Ungleichung

Wenn einem gar nichts Besseres mehr einfällt, kann es manchmal helfen, auf Ungleichungen mit brutaler Gewalt loszugehen. Bevor man wirklich alles ausmultipliziert und zu kürzen anfängt, kann man es eventuell noch mit der (vermutlich) nach Robert Franklin Muirhead (1860 - 1941) benannten Methode versuchen.

Definition. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ und sei $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, dann bezeichne

$$[a] = \frac{1}{n!} \sum_{sym(x_1,x_2,\ldots,x_n)} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$$

das sogenannte a**-Mittel** (nicht zu verwechseln mit dem früher definierten α-Mittel).

Insbesondere entspricht $a = (1, 0, 0, \dots, 0)$ dem arithmetischen Mittel und $a = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ dem geometrischen Mittel.

Definition. Seien $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ mit $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ und $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ und $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$. Dann definieren wir

$$a \succeq b \ ,$$

falls

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

und

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} bi \qquad \text{für alle } 1 \leq k < n$$

erfüllt sind.

Satz 6.2. *(Muirhead-Ungleichung) Sei $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ mit $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ und $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ und $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$. Dann gilt*

$$[a] \geq [b] \iff$$
$$\sum_{sym(x_1,x_2,\dots,x_n)} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \geq \sum_{sym(x_1,x_2,\dots,x_n)} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n}$$
$$\textit{für alle} \ \ x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$$

genau dann, wenn

$$a \succeq b$$

Gleichheit gilt nur dann, wenn $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ oder wenn $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

KAPITEL 7

Weitere wichtige Ungleichungen

Zu guter Letzt wollen wir noch einige weitere bekannte Ungleichungen kennenlernen.

7.1 Bernoulli-Ungleichung

Benannt nach dem schweizer Mathematiker Daniel Bernoulli (1700-1782).

Satz 7.1. *(Bernoulli-Ungleichung) Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ und $x \neq 0$, und sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\neq 0}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &> 1 + \alpha x \qquad \text{für } \alpha < 0 \text{ oder } \alpha > 1 \\ (1+x)^\alpha &< 1 + \alpha x \qquad \text{für } 0 < \alpha < 1 \end{aligned}$$

Für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ gilt trivialerweise Gleichheit.

7.2 (Spezialfall der) Young-Ungleichung

Benannt nach dem britischen Mathematiker William Henry Young (1863-1942).

Satz 7.2. *(Spezialfall der Young-Ungleichung) Es seien $x,y,p,q \in \mathbb{R}^+$ mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ .$$

Dann gilt

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \ .$$

Gleichheit gilt für $x^p = y^q$.

7.3 Hölder-Ungleichung

Benannt nach dem deutschen Mathematiker Otto Hölder (1859-1937).

Satz 7.3. *(Hölder-Ungleichung) Es seien* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^+$ *und* $p,q \in \mathbb{R}^+$ *mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ .$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \ .$$

7.4 Minkowski-Ungleichung

Benannt nach dem deutschen Mathematiker und Physiker Hermann Minkowski (1864-1909).

Satz 7.4. *(Minkowski-Ungleichung) Es seien* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^+$ *und* $p \in \mathbb{R}^+$, $p > 1$. *Dann gilt*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \ .$$

Für $p < 1$ *(*$p \neq 0$*, und falls* $p < 0$ *zusätzlich* $x_i y_i \neq 0$*) gilt die umgekehrte Ungleichung. Gleichheit gilt genau wenn* $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$.

KAPITEL 8

Aufgaben

8.1 Übungsaufgaben

1. Man zeige für alle $a,b,c \in \mathbb{R}^+$:

   $$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

2. Man zeige für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$:

   $$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

3. Man zeige für alle $x,y \in \mathbb{R}^+$:

   $$\frac{x^2}{y} + x + y \geq 3x$$

4. Man zeige für alle $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$:

   $$n^2 + n^8 < n^{10}$$

5. Man zeige für alle $a,b \in \mathbb{R}$:

   $$2(a^4 + b^4 + a^2b^2) \geq 3ab(a^2 + b^2)$$

6. Man zeige für alle $a \in \mathbb{R}$:

   $$1 + 2a^4 \geq a^2 + 2a^3$$

7. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$:

   $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$$

8. Man zeige für alle $a,b,c \in \mathbb{R}^+$:

   $$a+b+c \leq \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b}$$

9. Man zeige für alle $a,b,c \in \mathbb{R}^+$:

$$(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) \le 3(a^5+b^5+c^5)$$

10. Man zeige für alle $a,b \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{a^3+b^6}{2} \ge 3ab^2 - 4$$

11. Man zeige für alle $x \in \mathbb{R}^+$:

$$x + \frac{4}{x^2} \ge 3$$

12. Man zeige für alle $x,a,b,c \in \mathbb{R}$ mit $a^2+c^2 \le 4b$:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 \ge 0$$

13. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}, n > 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

14. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

15. Man zeige für alle $x,y \in \mathbb{R}^+$ mit $x^2+y^2=1$:

$$x^3+y^3 \ge \sqrt{2}xy$$

16. Man zeige für alle $a,b,c \in \mathbb{R}^+$:

$$abc \ge (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

17. Man zeige für alle $a,b,c \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \le \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

Wann gilt Gleichheit?

18. Man zeige für alle $a,b,c \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{a}{a+2b+c} + \frac{b}{b+2c+a} + \frac{c}{c+2a+b} \ge \frac{3}{4}$$

19. Man zeige für alle $x,y \in \mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{xy} \leq \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2 \leq \frac{x+y}{2}$$

Wann gilt Gleichheit?

20. Man zeige für alle $0 \leq a,b,c \leq 1$:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} \leq 1 - (1-a)(1-b)(1-c)$$

21. Man zeige für alle $a,b \in \mathbb{R}$:

$$2(a^2+b^2) > (a+b)^2$$

22. Man zeige für alle $a,b \in \mathbb{R}$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left(\frac{b}{a}\right)^4 \geq \left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{b}{a}\right)$$

23. Man zeige für alle $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ mit $a+b+c=1$:

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$$

24. Man zeige für alle $x,y \in \mathbb{R}^+$:

$$3 \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$$

25. Man zeige für alle $a,b \in \mathbb{R}^+$:

$$2\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2+b^2} \geq 3a+b$$

26. Man zeige für alle $x,y \in \mathbb{R}^+$:

$$x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \sqrt[3]{\frac{x}{y}} + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} - \frac{2}{27}$$

27. Man zeige für alle $x,y \in \mathbb{R}$:

$$2\sqrt[3]{2} \leq \sqrt[3]{1+\frac{x^3}{y^3}} + \sqrt[3]{1+\frac{y^3}{x^3}}$$

28. Man zeige für alle $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+, x+y \geq 0$:

$$\frac{y}{x+y} + \frac{x}{y} \geq 1$$

29. Man zeige für alle $a,b,c \in \mathbb{R}^+$:

$$ab + bc + ca \geq \sqrt{3abc(a+b+c)}$$

30. Man zeige für alle $a,b,c \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^3}{3} + \frac{c^6}{6} \geq abc$$

Wann gilt Gleichheit?

31. Man zeige für alle $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$:

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

32. Man zeige für alle $x,y > 1$, $x,y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x}{y-1} + \frac{y}{x-1} \geq 2$$

33. Man zeige für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$ mit $a + b + c = 1$:

$$1 + a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(ab + bc + ca)$$

34. Man bestimme die kleinste natürliche Zahl n, sodass für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq n(x^4 + y^4 + z^4)$$

35. Man zeige für alle $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a + b + c)d$$

36. Man zeige für alle $a \in \mathbb{R}$:

$$4a - a^4 \leq 3$$

37. Es seien $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass von den Zahlen $a - b^2, b - c^2, c - d^2, d - a^2$ nicht alle größer als $\frac{1}{4}$ sein können.

38. Man zeige für alle $a,b,c \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$$

39. Man zeige für alle $x,y \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$$

40. Man zeige für alle $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ mit $a+b+c=1$:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}$$

41. Man zeige für alle $a,b,c \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$$

42. Man zeige für alle $x,y,z \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+x)(y+z)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geq \frac{3}{4}$$

43. Man zeige für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$:

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{6}$$

44. Man zeige für alle $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ mit $abc=1$:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq a+b+c$$

45. Man zeige für alle $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

8.2 Ausarbeitungsaufgaben

1. Man zeige für alle $x,y,z \in \mathbb{R}^+, x,y,z > 1$ mit $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$:

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

2. Man zeige für alle $x,y,z \in \mathbb{R}^+$:

$$xyz \leq \frac{1}{9}(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$$

3. Man zeige für alle $x,y,z \in \mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}+z^2+\frac{1}{z^2}+6} \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}$$

4. Man zeige für alle $x,y \in \mathbb{R}$:

$$2x^3y+3y^4+2x^4 \geq 3x^2y^2+2xy^3$$

5. Man zeige für alle $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{x+\sqrt{x}}{x+1} \leq \sqrt{\frac{2x}{x+1}}$$

Wann gilt Gleichheit?

6. Man zeige für alle $0 < x,y,z < 1$:

$$(1 - z(1-y) - x(1-z) - y(1-x)) \cdot \left(\frac{1}{z(1-y)} + \frac{1}{x(1-z)} + \frac{1}{y(1-x)}\right) \geq 3$$

Wann gilt Gleichheit?

7. Es seien x_i, y_i $(i = 1, \ldots, n)$ reelle Zahlen, und es gelte:

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$$

und

$$y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$$

Es sei $z_1, z_2, \ldots, z_n$ irgendeine Anordnung der Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Man beweise:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

8. Man zeige für alle $a,b,c,x,y,z \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}$$

9. Man zeige für alle $a,b,c \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$