52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene

25. März 2021

---

1. Seien a und b positive ganze Zahlen und c eine positive reelle Zahl, für die

$$\frac{a+1}{b+c} = \frac{b}{a}$$

erfüllt ist.

Man beweise, dass $c \geq 1$ gilt.

(Karl Czakler)

2. Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = BC$ und dem Umkreis k. Der Punkt D liegt auf dem kürzeren Kreisbogen von k über BC und ist von B und C verschieden. Der Schnittpunkt von CD mit AB sei E.

Man beweise, dass die Gerade durch B und C eine Tangente an den Umkreis des Dreiecks BDE ist.

(Karl Czakler)

3. Auf einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, \ldots, 2020$ und 2021. Man führt folgende Operation aus:
Man wählt zwei Zahlen aus, schreibt den Betrag ihrer Differenz auf die Tafel und löscht die beiden gewählten Zahlen.
Das wiederholt man solange, bis nur noch eine Zahl auf der Tafel steht.

   (a) Man zeige, dass 2021 als letzte Zahl auf der Tafel stehen kann.

   (b) Man zeige, dass 2020 nicht als letzte Zahl auf der Tafel stehen kann.

(Karl Czakler)

4. Man bestimme alle Tripel (x, y, z) von positiven ganzen Zahlen, für die

$$x \mid (y+1), \quad y \mid (z+1) \;\text{ und }\; z \mid (x+1)$$

gelten.

(Walther Janous)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.