Definitionsmenge und Lösungsmenge

Definition 1 (Definitionsmenge, Definitionsbereich)**.** Als Definitionsmenge (bzw. Definitionsbereich) einer Gleichung bezeichnet man die Menge jener Zahlen, für die alle in der Gleichung auftretenden Rechenoperationen anwendbar sind.

Definition 2 (Lösungsmenge)**.** Als Lösungsmenge einer Gleichung bezeichnet man die Menge jener Zahlen, für die die Gleichung erfüllt ist, also für die beiden Seiten der Gleichung denselben Wert ergeben.

Beispiel 3. Man bestimme (über den reellen Zahlen) die Definitionsmenge der folgenden Gleichung:

$$\frac{2x^2-7}{x-4} = \frac{(x-1)(x^2-3)}{(x-1)(x-4)}$$

Lösung. Für $x = 1$ und $x = 4$ treten Divisionen durch 0 auf. Für alle anderen Zahlen sind alle Operationen eindeutig definiert. Die Definitionsmenge ist somit $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$. □

Äquivalenzumformungen $\Longleftrightarrow$

Eine Äquivalenzumformung ist eine Operation, die die Lösungsmenge einer Gleichung (oder Ungleichung) nicht verändert.

Jede Äquivalenzumformung kann durch Anwendung der inversen Operation rückgängig gemacht werden.

Für Gleichungen gibt es folgende Äquivalenzumformungen (ohne Anspruch auf Vollständigkeit):

- Addieren oder Subtrahieren eines Terms.
- Multiplizieren mit einem Term ungleich 0.
- Dividieren durch einen Term ungleich 0.
- Quadrieren, falls die Terme auf beiden Seiten sicher nicht-negative reelle Zahlen sind. (Falls beide Seiten sicher negative reelle Zahlen sind, kann man zuvor mit -1 multiplizieren.)
- Potenzieren mit einer ungeraden positiven ganzen Zahl.
- Potenzieren mit einer reellen Zahl (beispielsweise mit einer geraden ganzen Zahl), falls die Terme auf beiden Seiten sicher positiv sind.
- Auf beiden Seiten den Kehrwert bilden, falls beide Seiten sicher ungleich 0 sind.
- Wurzelziehen (positive Wurzel, gegebenenfalls mit Betragsstrichen), falls die Terme auf beiden Seiten sicher nicht-negative reelle Zahlen sind.
- n-te Wurzel ziehen für ungerade positive ganze Zahlen n.
- n-te Wurzel ziehen für gerade positive ganze Zahlen n, falls die Terme auf beiden Seiten sicher nicht-negative reelle Zahlen sind.
- Logarithmieren, falls die Terme auf beiden Seiten sicher positiv sind.
- Exponentialfunktion auf beide Seiten anwenden.
- Allgemein: Anwenden einer injektiven Funktion auf beide Seiten.

Beispiel 4. Man bestimme (über den reellen Zahlen) die Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$\frac{2x^2-7}{x-4} = \frac{(x-1)(x^2-3)}{(x-1)(x-4)}$$

Lösung. Laut Beispiel 3 ist die Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$.

Für $x \neq 1$ (also alle Zahlen im Definitionsbereich) können wir also zunächst auf der rechten Seite kürzen:

$$\frac{2x^2-7}{x-4} = \frac{x^2-3}{x-4}$$

Für $x \neq 4$ (also alle Zahlen im Definitionsbereich) ist das Multiplizieren mit $(x-4) \neq 0$ auf beiden Seiten eine Äquivalenzumformung:

$$2x^2 - 7 = x^2 - 3$$

Wir addieren auf beiden Seiten 7, und subtrahieren auf beiden Seiten x^2, was ebenfalls Äquivalenzumformungen sind.

$$x^2 = 4$$

Wir ziehen auf beiden Seiten die positive(!) Wurzel, müssen beim Wurzelziehen also Betragsstriche setzen:

$$|x| = 2$$

Im Fall $x < 0$ erhalten wir die Lösung $-x = 2$, also $x = -2$. Im Fall $x \geq 0$ erhalten wird die Lösung $x = 2$.

Da Äquivalenzumformungen die Lösungsmenge unverändert lassen, und alle durchgeführten Schritte Äquivalenzumformungen waren, sind $+2$ und -2 somit auch die einzigen beiden Lösungen der ursprünglichen Gleichung. Die Lösungsmenge ist also $L = \{+2, -2\}$. □

Umformungen, die die Lösungsmenge vergrößern $\Longrightarrow$

Manchmal genügen Äquivalenzumformungen nicht, um ans Ziel zu gelangen. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, nur Operationen anzuwenden, die die Lösungsmenge entweder gleich belassen oder vergrößern, keinesfalls aber verkleinern. Kurz: Alle Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind nach wie vor Lösungen der umgeformten Gleichung, aber möglicherweise besitzt die umgeformte Gleichung noch ein paar Lösungen mehr.

Können wir die umgeformte Gleichung lösen, so erhalten wir *notwendige* Bedingungen für die Lösungen der ursprünglichen Gleichung: Nur Lösungen der umgeformten Gleichung können Lösungen der ursprünglichen Gleichung sein. Wir können nun also durch Durchprobieren der Lösungen der umgeformten Gleichung feststellen, welche davon tatsächlich auch Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind.

Einige Beispiele für Umformungen, die die Lösungsmenge gleich lassen oder vergrößern, aber sicher nicht verkleinern:

- Alle Äquivalenzumformungen.
- Multiplizieren mit einem Term, der 0 annehmen kann.
- Quadrieren.
- Potenzieren mit einer beliebigen positiven ganzen Zahl.
- Allgemein: Anwenden einer für alle Werte im Definitionsbereich gültigen Funktion auf beide Seiten.

Beispiel 5. Man löse über den reellen Zahlen:

$$\sqrt{4x + 9} = x + 1$$

Lösung. Wir quadrieren beide Seiten, was in diesem Fall keine Äquivalenzumformung ist, da die rechte Seite möglicherweise negativ sein könnte:

$$4x + 9 = x^2 + 2x + 1$$

Wir subtrahieren auf beiden Seiten $4x$:

$$9 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Wir ziehen die positive Wurzel und setzen Betragszeichen:

$$|3| = |x - 1|$$

- *Fall* $x \geq 1$ *:* Dann gilt $3 = |x - 1| = x - 1$, also $x = 4$.
- *Fall* $x < 1$ *:* Dann gilt $3 = -(x - 1)$, also $x = -2$.

Als Lösungen der ursprünglichen Gleichung kommen also nur -2 und 4 in Frage. Durch Einsetzen sehen wir aber sofort, dass -2 keine Lösung ist. Ebenso überprüfen wir durch Einsetzen, dass $x = 4$ eine Lösung ist.

Die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung ist somit $L = \{4\}$. □

Fallunterscheidungen

Oft benötigt man Operationen, die nur auf einem Teil der Definitionsmenge funktionieren. Beispielsweise möchte man etwas quadrieren, das nicht sicher eine positive reelle Zahl ist, oder man möchte eine Betragsfunktion loswerden. Hier bietet es sich an, die Definitionsmenge in mehrere Fälle zu zerlegen, und die Fälle einzeln zu betrachten.

Wichtig hierbei:

- Jeder Wert der Definitionsmenge muss in (mindestens) einem der Fälle vorkommen.
- Für die erhaltenen Lösungen der einzelnen Fälle, muss man prüfen, ob sie auch in der Definitionsmenge des Falles enthalten sind.

Beispiel 6. Man könnte das Beispiel 5 auch folgendermaßen lösen:

Lösung.

- *Fall* $x < \frac{-9}{4}$*:* Dann ist die linke Seite als Wurzel einer negativen Zahl sicher imaginär, während die rechte Seite reell ist. Somit kann es für $x < \frac{-9}{4}$ keine Lösungen geben.
- *Fall* $\frac{-9}{4} \leq x < -1$*:* Dann ist die linke Seite als (positive) Wurzel einer nicht-negativen reellen Zahl sicher nicht-negativ, während die rechte Seite negativ ist. Somit gibt es auch hier keine Lösungen.
- *Fall* $x \geq -1$*:* Dann sind beide Seiten nicht-negativ. Somit ist das Quadrieren eine Äquivalenzumformung (in diesem eingeschränkten Definitionsbereich), also ist die Gleichung äquivalent zu:

  $$4x + 9 = x^2 + 2x + 1$$

  Wir subtrahieren auf beiden Seiten $4x$ (Äquivalenzumformung):

  $$9 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

  Beide Seiten sind nicht-negativ, somit ist auch das Ziehen der positiven Wurzel eine Äquivalenzumformung:

  $$3 = |x - 1|$$

  Wie zuvor sehen wir, dass diese Gleichung die beiden Lösungen -2 und 4 hat. Allerdings ist $x = -2$ nicht in der Definitionsmenge dieses Falles enthalten. Somit bleibt nur die Lösung $x = 4$ als Lösung für diesen Fall übrig. Da alle Schritte Äquivalenzumformungen (im eingeschränkten Definitionsbereich) waren, müssten wir die Lösung gar nicht mehr explizit überprüfen – aber es schadet sicher nicht.

Die Vereinigung der Lösungsmengen der einzelnen Fälle (und somit die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung) ist also $L = \{4\}$. □

Weitere nützliche Anwendungen von Fallunterscheidungen:

- Betragsstriche auflösen (Fallunterscheidung nach Zahlenbereichen, in denen der Inhalt des Betrages positiv bzw. negativ ist)
- Quadrieren (Fallunterscheidung nach Zahlenbereichen, in denen beide Seiten sicher positiv sind)
- Multiplizieren mit einem Term, der 0 werden kann (Fall 1: Der Term ist gleich 0, dafür gibt es üblicherweise nur wenige Lösungen. Fall 2: Der Term ist ungleich 0, dann kann als Äquivalenzumformung multipliziert und damit weitergerechnet werden.)
- Gaußklammern (Fallunterscheidung nach Bereichen, für die der Ausdruck in der Gaußklammer zur selben Zahl oder nach derselben Formel gerundet wird)

Beispiel 7. Einige Beispiele:

- Löse $|x^2 - 9| = |x - 1|$: Fall 1: $x < -3$, Fall 2: $-3 \leq x < 1$, Fall 3: $1 \leq x < 3$, Fall 4: $3 \leq x$
- Löse $x - 6 = \sqrt{x}$: Fall 1: $x < 6$, Fall 2: $x \geq 6$
- Löse $1 + x + x^2 + \cdots + x^{2013} = 0$: Fall 1: $x = -1$, Fall 2: $x = 1$ und Multiplizieren beider Seiten mit $(x - 1)$
- Löse $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = x - 7$: Fall 1: x gerade, Fall 2: x ungerade

Ein kleines Rätsel zum Schluss

Ein Elefant wiegt e, eine Mücke wiegt $m < e$. Der Elefant wiegt also soviel wie die Mücke plus eine Differenz d:

$$\begin{aligned}
e &= m + d && \Big| \cdot (e - m) \\
e^2 - em &= em - m^2 + ed - dm && \Big| - ed \\
e^2 - em - ed &= em - m^2 - dm && \\
e(e - m - d) &= m(e - m - d) && \Big| : (e - m - d) \\
e &= m &&
\end{aligned}$$

Folglich wiegt eine Mücke gleich viel wie ein Elefant.