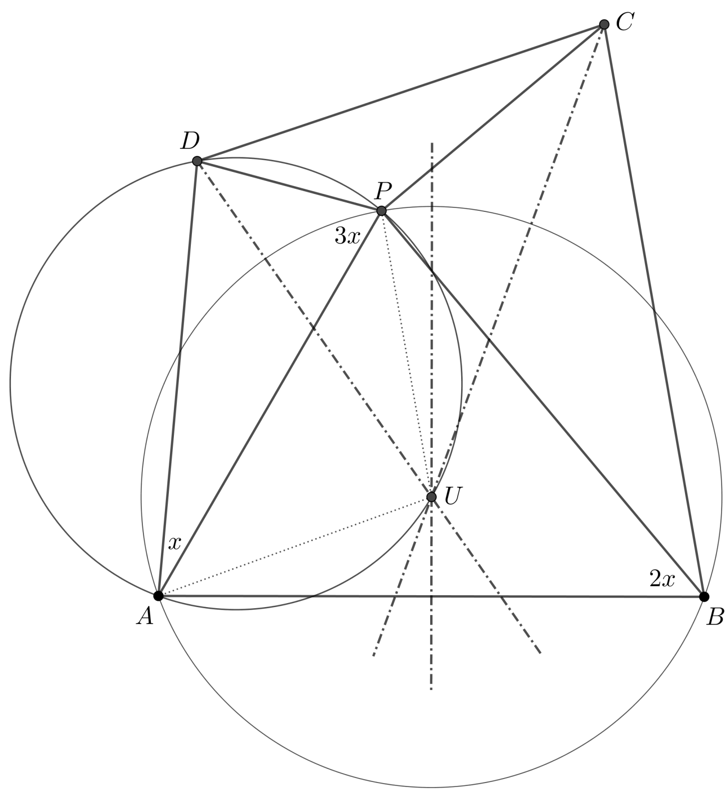
IMO 2020 Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 1: Man betrachte ein konvexes Viereck $ABCD$. Der Punkt P liegt im Inneren von $ABCD$. Es gelten die folgenden Verhältnisgleichungen:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Man beweise, dass sich die folgenden drei Geraden in einem Punkt treffen: die inneren Winkelhalbierenden der Winkel $\angle ADP$ und $\angle PCB$ sowie die Mittelsenkrechte der Strecke AB.

Lösung: Es sei U der Umkreismittelpunkt von ABP.



Aus der Angabe wissen wir, dass $\angle PAD = x$, $\angle PBA = 2x$ und $\angle DPA = 3x$ gilt. Laut Peripheriewinkelsatz gilt sicher $\angle PUA = 2 \cdot \angle PBA = 4x$. Im Dreieck APD gilt

$$\begin{aligned} \angle ADP &= 180° - \angle PAD - \angle DPA \\ &= 180° - x - 3x \\ &= 180° - 4x, \end{aligned}$$

und wegen $\angle ADP = 180° - \angle PUA$ ist $AUPD$ somit ein Sehnenviereck. Da U der Umkreismittelpunkt von APB ist, gilt $UA = UP$, und nach dem Südpolsatz geht die Winkelsymmetrale von $\angle ADP$ somit durch U.

Analog gilt dieses Argument aufgrund der gegebenen Winkelbeziehungen auch für den Winkel $\angle PCB$, womit gezeigt ist, dass sich die drei gegebenen Geraden im Punkt U treffen. $\square$

Aufgabe 2: Die reellen Zahlen a, b, c, d erfüllen $a \geq b \geq c \geq d > 0$ und $a + b + c + d = 1$. Man beweise, dass

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

Lösung: Aus der gewichteten AM-GM Ungleichung erhalten wir

$$a^a b^b c^c d^d = \sqrt[a+b+c+d]{a^a b^b c^c d^d} \leq a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Es genügt also zu zeigen, dass

$$(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < 1 = (a + b + c + d)^3$$

gilt. Dies folgt aber unmittelbar aus der Beziehung

$$\begin{aligned}
&(a + b + c + d)^3 \\
&> a^2(a + 3b + 3c + 3d) + b^2(3a + b + 3c + 3d) + c^2(3a + 3b + c + 3d) + d^2(3a + 3b + 3c + d) \\
&\geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \cdot (a + 2b + 3c + 4d)
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3: Gegeben seien $4n$ Steine mit den Gewichten $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Jeder Stein hat eine von n Farben, und es gibt vier Steine in jeder Farbe. Man zeige, dass die Steine so auf zwei Haufen verteilt werden können, dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- Die beiden Haufen haben gleiches Gesamtgewicht.
- Jeder Haufen enthält zwei Steine jeder Farbe.

Lösung: Wir betrachten die Menge $\mathcal{S}$ aller Paare von Steinen, deren Gewichte die Summe $4n + 1$ ergeben. Es gilt also

$$\mathcal{S} = \{\{1, 4n\}, \{2, 4n - 1\}, \ldots, \{2n, 2n + 1\}\}.$$

Um die Bedingungen der Aufgabe zu erfüllen, genügt es nun zu zeigen, das man diese Menge in zwei gleich mächtige Mengen zerteilen kann, die jeweils zwei Steine jeder Farbe enthalten.

Wir zeichnen einen Multi-graphen G, dessen Knoten die n Farben der Steine sind. Jedem Element von $\mathcal{S}$ entspricht eine Verbindungskante der beiden Knoten, die die Farben der beiden Steine in dieser Menge entsprechen. Wenn beide Steine einer Menge in $\mathcal{S}$ dieselbe Farbe haben, so führt die Kante in eine Schlaufe vom Knoten zu sich selbst. Offensichtlich hat jeder Knoten den Grad 4, da es vier Steine mit jeder Farbe gibt. Eine Teilung der Menge der Steine entspricht einer Färbung dieses Multi-graphen mit rot und blau, sodass jeder Knoten bezüglich beider Farben den Grad 2 hat.

Da jeder Knoten des Multi-graphen vom geraden Grad 4 ist, gibt es in jeder geschlossenen Komponente G' des Multi-graphen G einen Eulerweg E, also einen geschlossenen Weg, der jede Kante genau einmal passiert. Die Anzahl der Kanten in jedem G' ist gerade, da sie gleich der doppelten Anzahl der Knoten in G' ist. Es ist also möglich, die Kanten von G' abwechselnd rot und blau zu färben. Von jedem Knoten von G' gehen dann, wie gewünscht, gleich viele rote und blaue Kanten weg, was den Beweis abschließt. □

Aufgabe 4: Es sei $n > 1$ eine ganze Zahl. An einem Berghang befinden sich n^2 Stationen, alle auf unterschiedlichen Höhen. Zwei Seilbahngesellschaften A und B betreiben jeweils k Seilbahnen; jede Seilbahn führt von einer der Stationen zu einer höhergelegenen (ohne Zwischenhalt). Die k Seilbahnen von A beginnen an k verschiedenen Punkten und enden an k verschiedenen Punkten, und wenn eine Seilbahn an einem höheren Punkt beginnt als eine andere, dann endet sie auch an einem höheren Punkt. Dieselben Bedingungen gelten auch für B. Wir sagen, dass zwei Stationen von einer Gesellschaft *verbunden* werden, wenn man von der niedrigeren Station ausgehend die höhere Station durch Fahrten mit einer oder mehreren Seilbahnen dieser Gesellschaft erreichen kann (keine anderen Bewegungen zwischen Stationen sind erlaubt).

Man bestimme die kleinste positive ganze Zahl k, für die man garantieren kann, dass es zwei Stationen gibt, die von beiden Gesellschaften verbunden werden.

Lösung: Die gesuchte Zahl ist $k = n^2 - n + 1$

Zuerst zeigen wir, dass es im Fall $k \leq n^2 - n$ möglich ist, dass es keine zwei Stationen gibt, die von beiden Gesellschaften verbunden sind. Wir bezeichnen zu diesem Zweck die Stationen von unten nach oben gereiht als $1, 2, \ldots, n^2$. O.B.d.A. nehmen wir an, es gelte $k = n^2 - n$. Wir nehmen an, Gesellschaft A verbinde alle Paare $(i, i+1)$ für die i keine Vielfachen von n sind. Weiters nehmen wir an, Gesellschaft B verbinde alle Paare $(i, i+n)$ mit $1 \leq i \leq n^2 - n$. Für verbundene Stationen i und j in B gilt dann sicher $i \equiv j \pmod{n}$. Es ist klar, dass es keine zwei Stationen gibt, die in beiden Systemen verbunden sind.

Wir wollen nun zeigen, dass es für $k = n^2 - n + 1$ immer zwei Stationen gibt, die von beiden Gesellschaften verbunden sind. Wir definieren eine *A-Kette* als eine Folge $a_1 < a_2 < \ldots < a_t$ von Stationen, bei denen die Gesellschaft A jeweils eine Seilbahn von a_i nach a_{i+1} für alle $1 \leq i \leq t-1$ betreibt, es aber keine von A betriebene Seilbahn gibt, die nach a_1 führt, und keine die von a_t zu einer anderen Station führt. *B-Ketten* werden analog definiert. Man erkennt sofort, dass jede Station in einer eindeutigen A-Kette enthalten ist (die eventuell aus einer einzigen Station besteht), und ebenso in einer eindeutigen B-Kette. Wir ordnen also jeder Station das geordnete Paar der A-Kette und der B-Kette, zu der diese Station gehört, zu.

Jede Endstation einer von A betriebenen Seilbahn ist anders, und es gibt somit $n^2 - k = n - 1$ derartige Stationen. Diese sind jeweils Ausgangsstationen von A-Ketten, und es gibt somit genau $n - 1$ A-Ketten. Ebenso gibt es genau $n - 1$ B-Ketten, und es gibt somit genau $(n-1)^2$ Paare von A- und B-Ketten. Es gibt aber n^2 Stationen, und nach SFS gibt es somit sicher zwei Stationen, die zum gleichen Paar von Ketten gehören, wie behauptet. □

Aufgabe 5: Gegeben sei ein Satz von $n > 1$ Karten. Auf jeder Karte steht eine positive ganze Zahl. Der Kartensatz hat die Eigenschaft, dass für jedes Paar von arten das arithmetische Mittel der Zahlen auf diesen Karten zugleich das geometrische Mittel der Zahlen auf einer Auswahl von einer oder mehreren Karten ist.

Für welche n folgt, dass die Zahlen auf den Karten alle gleich sind?

Lösung: Wir nehmen an, die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ auf den Karten seien nicht alle gleich. Es bezeichne $d := \operatorname{ggT}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Nehmen wir an, es gelte $d > 1$. Ersetzen wir die Zahlen auf den Karten durch die Zahlen $\frac{a_1}{d}, \ldots, \frac{a_n}{d}$, bleiben alle arithmetischen und geometrischen Mittel entsprechender Zahlen gleich. In diesem Fall können wir also die Zahlen alle o.B.d.A. durch die kleineren Zahlen ersetzen. Wir nehmen also an, es gelte $d = 1$.

Es sei m ein Index, sodass $a_m = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ gilt. Da die Zahlen nicht alle gleich sind, gilt sicher $a_m \geq 2$, und es gibt somit einen Primteiler p von a_m. Wegen $d = 1$ gibt es sicher mindestens ein a_k, das von p nicht geteilt wird. Nehmen wir an, der Index k sei so gewählt, dass es unter den a_i keine größere Zahl gibt, die nicht von p geteilt wird.

Es gilt sicher $a_m > a_k$, da p ein Teiler von a_m ist. Nun sei $b := \frac{a_k+a_m}{2}$. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass b sicher nicht das geometrisch Mittel von Zahlen aus der gegebenen Folge dargestellt werden kann.

Wir betrachten das geometrische Mittel $g = \sqrt[l]{a_{i_1} \ldots a_{i_l}}$ einer beliebige Teilfolge der gegebenen Zahlenfolge. Ist keine der Zahlen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}$ durch p teilbar, so jede dieser Zahlen kleiner oder gleich a_k, und es gilt somit $g \leq a_k < \frac{a_k+a_m}{2} = b$, und somit $g \neq b$.

Ist aber mindestens eine dieser Zahlen durch p teilbar, so ist es auch die Zahl $2g = 2 \cdot \sqrt[l]{a_{i_1} \ldots a_{i_l}}$, sofern diese Zahl auch ganzzahlig ist. Dann ist aber auch $a_m + a_k$ durch p teilbar, was einen Widerspruch ergibt. $\square$

Aufgabe 6: Man zeige, dass es eine positive Konstante c gibt, für die die folgende Aussage zutrifft:

Es sei $n > 1$ eine ganze Zahl und $\mathcal{S}$ eine Menge von n Punkten in der Ebene, für die der Abstand zwischen je zwei verschiedenen Punkten aus $\mathcal{S}$ mindestens 1 beträgt. Dann gibt es eine Gerade ℓ, die $\mathcal{S}$ spaltet und für die jeder Punkt aus $\mathcal{S}$ mindestens den Abstand $cn^{-1/3}$ zu ℓ hat.

(Eine Gerade ℓ *spaltet* eine Punktmenge $\mathcal{S}$, wenn es eine Strecke zwischen zwei Punkten aus $\mathcal{S}$ gibt, die ℓ schneidet.)

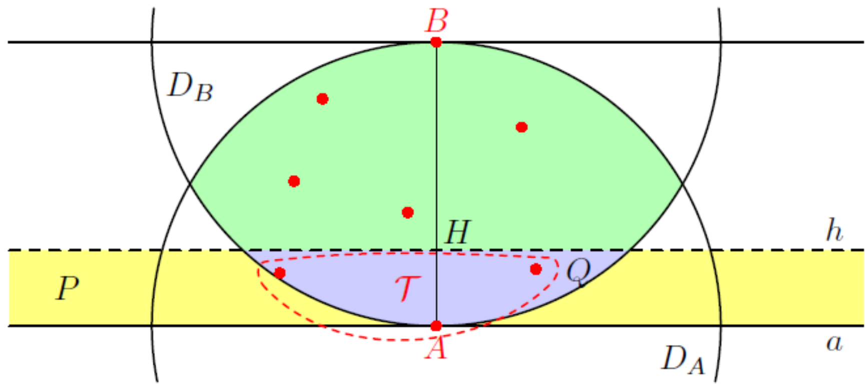
Hinweis: Falls eine schwächere Aussage mit $cn^{-\alpha}$ anstelle von $cn^{-1/3}$ bewiesen wird, können abhängig vom Wert der Konstanten $\alpha > 1/3$ Punkte vergeben werden.

Lösung: Wir zeigen, dass die Aussage für $c = \frac{1}{8}$ gilt.

Um die Notation etwas zu vereinfachen, definieren wir $\delta = \frac{1}{8} \cdot n^{-1/3}$. Weiters definieren wir für eine beliebige Gerade ℓ und einen beliebigen Punkt X die Normalprojektion von X auf ℓ als X_ℓ (und analog für Mengen von Punkten).

Wir nehmen an, es gäbe eine Gerade ℓ, sodass die Menge $\mathcal{S}_\ell$ zwei benachbarte Punkte X und Y mit $XY = 2d$ enthält. Die Streckensymmetrale von XY spaltet dann $\mathcal{S}$, und alle Punkte von $\mathcal{S}$ haben einen Normalabstand von mindestens d von dieser Streckensymmetrale. Gilt nun $d \geq \delta$, so haben wir eine Gerade mit der erwünschten Eigenschaft gefunden. Wir nehmen also im Folgenden an, es existiere für keine Gerade ℓ ein derartiges Punktepaar.

Nun seien A und B zwei Punkte von $\mathcal{S}$ mit maximalem Abstand M. (Mit anderen Worten: Es sei $M = AB$ ein *Durchmesser* von $\mathcal{S}$.) Aufgrund der Angabe wissen wir, dass $M \geq 1$ gilt. Wir bezeichnen die Gerade AB als ℓ. Die gesamte Punktmenge $\mathcal{S}$ liegt im Inneren des Durchschnitts der beiden Kreisscheiben D_A und D_B mit Mittelpunkten in A bzw. B und Radius M, und die gesamte Menge $\mathcal{S}_\ell$ liegt auf der Strecke AB. Weiters wissen wir, dass die Punkte von $\mathcal{S}_\ell$ die Strecke AB in höchstens $n-1$ Teile zerlegen, deren Länge jeweils kleiner als 2δ sind. Somit gilt also sicher $M < n \cdot 2\delta$.



Es sei H der Punkt auf der Strecke AB mit $AH = \frac{1}{2}$ und es sei P der Streifen zwischen den Geraden a (normal zu AB durch A) und h (normal zu AB durch H), wobei wir annehmen, dass die beiden Randgeraden dem Streifen angehören. Nun sei $\mathcal{T} = P \cap \mathcal{S}$ und $t = |\mathcal{T}|$. Es liegen mindestens

$$\lceil \frac{1}{2} : (2\delta) \rceil$$

Punkte von $\mathcal{S}_\ell$ auf der Strecke AH, und somit gilt sicher $t \geq \frac{1}{4\delta}$. Die Menge $\mathcal{T}$ liegt zur Gänze im Inneren des Bereichs $Q = P \cap D_B$. Diese Menge Q ist ein Kreissegment, und ihre Projektion Q_a ist eine Strecke der Länge

$$2 \cdot \sqrt{M^2 - \left(M - \frac{1}{2}\right)^2} < 2\sqrt{M}.$$

Für zwei beliebige Punkte $X, Y \in \mathcal{T}$ gilt sicher $XY \geq 1$ und $X_\ell Y_\ell \leq \frac{1}{2}$, und somit $X_a Y_a = \sqrt{XY^2 - X_\ell Y_\ell^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Die t Punkte von $\mathcal{T}_a$ liegen also alle auf einer Strecke mit einer Länge kleiner als $2\sqrt{M}$, und sie haben von einander einen Abstand von je mindestens $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Daraus folgt aber $2\sqrt{M} > (t-1)\frac{\sqrt{3}}{2}$, und somit

$$t < 1 + \frac{4\sqrt{M}}{\sqrt{3}} < 4\sqrt{M},$$

wegen $M \geq 1$.

Fassen wir nun alle Abschätzungen zusammen, erhalten wir somit

$$\frac{1}{4\delta} \leq t < 4\sqrt{M} < 4\sqrt{2n\delta},$$

und somit $512n\delta^3 > 1$, was der Wahl des vorgegebenen δ widerspricht. $\square$