



51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior-Regionalwettbewerb

6. Juni 2020

1. Sei a eine reelle Zahl und b eine reelle Zahl mit $b \neq -1$ und $b \neq 0$. Man bestimme alle Paare (a, b) , für die

$$\frac{(1+a)^2}{1+b} \leq 1 + \frac{a^2}{b}$$

erfüllt ist. Für welche Paare (a, b) gilt Gleichheit?

(Walther Janous)

2. Wie viele positive fünfstellige ganze Zahlen gibt es, für die das Produkt ihrer fünf Ziffern 900 ist?

(Karl Czakler)

3. Gegeben sei ein gleichschenkeliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $AB > CD$. Der Lotfußpunkt von D auf AB sei E . Der Halbierungspunkt der Diagonale BD sei M .

Man beweise, dass EM parallel zu AC ist.

(Karl Czakler)

4. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen a , für die die Gleichung

$$7an - 3n! = 2020$$

eine positive ganzzahlige Lösung n hat.

(Hinweis: Für jede positive ganze Zahl n gilt: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.)

(Richard Henner)

Arbeitszeit: 4 Stunden.

Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.