51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Vorrunde – Lösungen

21. Mai 2020

Aufgabe 1. *Seien x, y und z positive reelle Zahlen, für die $x \geq y + z$ gilt.*

Man beweise die Ungleichung

$$\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \geq 7.$$

Wann gilt Gleichheit?

(Walther Janous)

Antwort. Gleichheit gilt genau dann, wenn die positiven reellen Zahlen x, y und z die Bedingung $x : y : z = 2 : 1 : 1$ erfüllen.

Lösung 1. Die Aufgabe ist offensichtlich symmetrisch in y und z. Daher konzentrieren wir uns zunächst auf diese beiden Variablen. Es liegt nahe zu vermuten, dass die Ungleichung für $y = z$ schärfer wird, daher nehmen wir Verschärfungen unter diesem Aspekt vor.

Da sowohl die Ungleichung als auch die Nebenbedingung homogen sind, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass $y + z = 1$.

Zu zeigen ist also

$$x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 7$$

für $y + z = 1$ und $x \geq 1$. Bekanntlich gilt $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$ mit Gleichheit genau dann, wenn $y = z = 1/2$. Außerdem erhalten wir mit der arithmetisch-harmonischen Mittelungleichung

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{4}{y+z} = 4$$

mit Gleichheit auch genau dann, wenn $y = z = 1/2$. Wir können die Ungleichung somit zu

$$4x + \frac{1}{x} \geq 5$$

für $x \geq 1$ verschärfen. Wegen $x + 1/x \geq 2$ und $3x \geq 3$ für $x \geq 1$, jeweils mit Gleichheit genau für $x = 1$, ist alles gezeigt. Die angegebene Gleichheitsbedingung erhält man unmittelbar aus $x = 1$ und $y = z = 1/2$.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 2. Weil sowohl die Ungleichung als auch die Nebenbedingung homogen sind, dürfen wir normieren, d. h., wir betrachten im Weiteren alle positiven reellen Zahlen x, y und z, für die $x + y + z = 1$ und $x \geq y + z$ erfüllt sind.

Damit haben wir

$$\frac{1-x}{x} + \frac{1-y}{y} + \frac{1-z}{z} \geq 7,$$

also

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 10,$$

zu beweisen, wobei wegen $x \geq 1 - x$ die Einschränkung $x \geq 1/2$ zu gelten hat.

Mit der arithmetisch-harmonischen Mittelungleichung ergibt sich

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{4}{y+z} = \frac{4}{1-x}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $y = z$. Deshalb genügt es nachzuweisen, dass

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{1-x} \geq 10$$

gilt, d. h. (wie eine kurze Vereinfachung zeigt)

$$10x^2 - 7x + 1 \geq 0.$$

Weil sich der linksseitige Ausdruck in der Form $(2x-1)(5x-1)$ darstellen lässt, folgt die Gültigkeit der Ungleichung wegen $x \geq 1/2$. In ihr gilt Gleichheit genau dann, wenn $x = 1/2$.

Auf Grund der im Lauf des Beweises erhaltenen Gleichheitsaussagen ergibt sich schließlich noch die angegebene Gleichheitsbedingung.

Bemerkung. Mit $\frac{x+y}{z} + 1 + \frac{y+z}{x} + 1 + \frac{z+x}{y} + 1 = \frac{x+y+z}{z} + \frac{x+y+z}{x} + \frac{x+y+z}{y}$ ergibt sich, dass sich die Ungleichung auch in der Form $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 10$ schreiben lässt.

(Walther Janous) □

Lösung 3. Wegen der Bedingung $x \geq y + z$ erhalten wir $x = y + z + t$, wobei t eine nichtnegative reelle Zahl ist. Damit ist die Ungleichung

$$\frac{2y+z+t}{z} + \frac{y+z}{y+z+t} + \frac{y+2z+t}{y} \geq 7,$$

also

$$\frac{y+z}{y+z+t} + \frac{t}{y} + \frac{t}{z} + 2\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geq 5$$

zu beweisen. Wegen

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$$

mit Gleichheit genau für $y = z$ müssen wir nur noch die Gültigkeit der Ungleichung

$$\frac{y+z}{y+z+t} + \frac{t}{y} + \frac{t}{z} \geq 1$$

nachweisen. Sie lautet in äquivalenter Form

$$\frac{t}{y} + \frac{t}{z} \geq \frac{t}{y+z+t},$$

wobei man für $t = 0$ Gleichheit erhält. Für $t > 0$ ergibt sich

$$(y+z)^2 + t(y+z) \geq yz.$$

Diese Ungleichung ist aber auf Grund von

$$(y+z)^2 > yz$$

immer gültig und es kann in ihr niemals Gleichheit eintreten.

Damit haben wir den Beweis abgeschlossen und dabei zusätzlich gezeigt, dass sich Gleichheit genau für alle positiven Zahlen x, y und z mit $x : y : z = 2 : 1 : 1$ ergibt.

(Walther Janous) □

Lösung 4. Die Ungleichung ist äquivalent zu

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 7.$$

Die Summe der letzten zwei Summanden lässt sich durch 2 nach unten abschätzen, wobei Gleichheit genau für $y=z$ eintritt. Deshalb bleibt der Nachweis von

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 5.$$

Weil sowohl diese Ungleichung als auch die Nebenbedingung homogen sind, dürfen wir $x=1$ setzen. Unsere Ungleichung lautet damit

$$\frac{1}{y}+y+\frac{1}{z}+z\geq 5,$$

wobei y und z positive reelle Zahlen mit $y+z\leq 1$ sind. Mit $f(t)=t+1/t$, $0<t<1$, lässt sich die Ungleichung auch in der Form

$$f(y)+f(z)\geq 5$$

darstellen. Für die Funktion f und reelle Zahlen $0<s,\, t<1$ gilt

$$s<t \iff f(s)>f(t).$$

Denn wir haben

$$f(s)>f(t) \iff s+\frac{1}{s}>t+\frac{1}{t} \iff \frac{1}{s}-\frac{1}{t}>t-s \iff \Big(\frac{1}{st}-1\Big)(t-s)>0 \iff t>s,$$

wobei wir im letzten Schritt die wegen $0<s,\, t<1$ evidente Ungleichung $st<1$ verwendet haben.

Wegen $y\leq 1-z$ folgt

$$f(y)+f(z)\geq f(1-z)+f(z)=1-z+\frac{1}{1-z}+z+\frac{1}{z}=1+\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z}$$

mit Gleichheit genau für $y=1-z$. Deshalb genügt es für $0<z<1$ die Ungleichung

$$\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z}\geq 4$$

nachzuweisen. Sie ist aber äquivalent zu

$$(2z-1)^2\geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $z=1/2$. Damit sind wir am Ende des Beweises. Gleichheit ergibt sich (für $x=1$) genau dann, wenn $y=z=1/2$, d. h. in der ursprünglichen Ungleichung genau für $x=y=t$ und $z=2t$, wobei t eine beliebige positive reelle Zahl ist.

(Walther Janous) □

Lösung 4a. Wie in der Lösung 4 wollen wir die Ungleichung

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 5$$

unter der Bedingung $x\geq y+z$ zeigen.

Seien a und b positive Konstanten mit $b\geq a$. Man weiß oder zeigt wie in der Lösung 4 oder mit Ableiten, dass $g(x)=\frac{x}{a}+\frac{a}{x}$ auf $x\geq b$ das Minimum für $x=b$ annimmt. Es reicht also

$$\frac{y+z}{y}+\frac{y}{y+z}+\frac{y+z}{z}+\frac{z}{y+z}\geq 5$$

zu zeigen. Da sich aber der zweite und vierte Term zu 1 addieren und $\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\geq 2$ gilt, ist das richtig.

Bei unseren beiden Abschätzungen gilt genau dann Gleichheit, wenn $x=y+z$ und $y=z$ gilt, womit wir wieder den Gleichheitsfall erhalten.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 4b. Wir multiplizieren aus und haben

$$x^2(y+z) + x(y^2+z^2-7yz) + yz(y+z) \geq 0$$

zu zeigen. Für konstante y und z stellt die linke Seite eine nach oben offene Parabel mit Scheitel bei $x = \frac{7yz-y^2-z^2}{2(y+z)}$ dar.

Wir behaupten, dass $y+z > \frac{7yz-y^2-z^2}{2(y+z)}$ ist. Das ist äquivalent zu $y^2+z^2 > yz$, was wahr ist.

Damit ist die linke Seite der ausmultiplizierten Ungleichung für $x \geq y+z$ monoton wachsend in x; es reicht daher, die ursprüngliche Ungleichung für $x = y+z$ zu zeigen.

Wie in den übrigen Lösungen ist die Ungleichung dann äquivalent zu $y/z + z/y \geq 2$.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 5. Wir greifen die Idee aus der Bemerkung am Ende der Lösung 2 auf und beweisen folgende allgemeine Aussage, eine Ungleichung vom Kantorowitsch-Typ.

Es seien n eine ganze und α eine reelle Zahl mit $n \geq 2$ und $\alpha \geq \frac{1}{n-1}$.

Dann gilt für alle positiven reellen Zahlen x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 \geq \alpha(x_2 + \cdots + x_n)$ die Ungleichung

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\Big(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\Big) \geq (\alpha+1)\Big((n-1)^2 + \frac{1}{\alpha}\Big)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x_1 : x_2 : \cdots : x_n = (n-1)\alpha : 1 : \cdots : 1$.

Weil sowohl die Ungleichung als auch die Nebenbedingung homogen sind, dürfen wir skalieren. Wir setzen $x_2 + \cdots + x_n = 1/\alpha$ wie in Lösung 1. Damit ergibt sich $x_1 \geq 1$. Um die Ungleichung

$$\Big(x_1 + \frac{1}{\alpha}\Big)\Big(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\Big) \geq (\alpha+1)\Big((n-1)^2 + \frac{1}{\alpha}\Big)$$

nachzuweisen, verwenden wir zuerst die arithmetisch-harmonische Mittelungleichung und erhalten

$$\frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{(n-1)^2}{x_2 + \cdots + x_n} = \alpha(n-1)^2$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x_2 = \cdots = x_n = 1/(\alpha(n-1))$. Deshalb genügt es

$$\Big(x_1 + \frac{1}{\alpha}\Big)\Big(\frac{1}{x_1} + \alpha(n-1)^2\Big) \geq (\alpha+1)\Big((n-1)^2 + \frac{1}{\alpha}\Big)$$

oder äquivalent

$$\frac{1}{\alpha x_1} + \alpha(n-1)^2 x_1 \geq \alpha(n-1)^2 + \frac{1}{\alpha}$$

nachzuweisen.

Wir verschärfen das noch unter Verwendung von $1/x_1 \geq 2 - x_1$ (mit Gleichheit für $x_1 = 1$) zu

$$\frac{2}{\alpha} + \Big(\alpha(n-1)^2 - \frac{1}{\alpha}\Big)x_1 \geq \alpha(n-1)^2 + \frac{1}{\alpha},$$

was wegen $x_1 \geq 1$ und der Voraussetzung $\alpha \geq \frac{1}{n-1}$ wahr ist (mit Gleichheit für $x_1 = 1$).

Auf Grund der im Lauf des Beweises erhaltenen Gleichheitsaussagen ergibt sich schließlich noch die angegebene Gleichheitsbedingung.

Bemerkung. Im Fall $n = 3$ ergibt sich folgende Verallgemeinerung der ursprünglichen Ungleichung.

Sei α eine reelle Zahl mit $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Dann gilt für alle positiven reellen Zahlen x, y und z mit $x \geq \alpha(y+z)$, dass

$$\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \geq 4\alpha + 2 + \frac{1}{\alpha}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x : y : z = 2\alpha : 1 : 1$.

(Clemens Heuberger, Walther Janous) □

Aufgabe 2. *Sei ABC ein rechtwinkeliges Dreieck mit rechtem Winkel in C und Umkreismittelpunkt U. Auf den Seiten AC und BC liegen die Punkte D bzw. E derart, dass $\sphericalangle EUD = 90°$ gilt. Seien F und G die Lotfußpunkte von D bzw. E auf AB.*

Man beweise, dass FG halb so lang wie AB ist.

(Walther Janous)

Lösung 1. Wir verwenden die üblichen Bezeichnungen a, b, c für die Seiten des Dreiecks und setzen $AF = x$ und $BG = y$, siehe Abbildung 1.

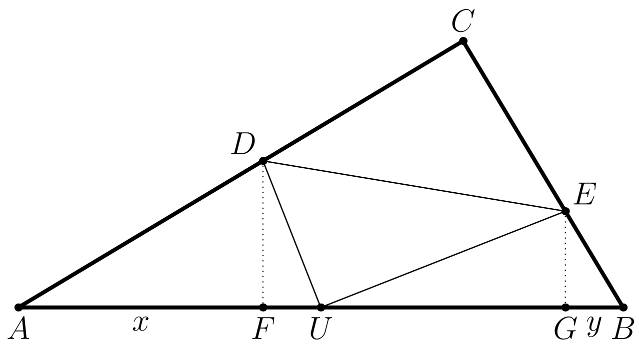

Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 1

Die Dreiecke AFD, ACB und EGB sind ähnlich, also

$$x : DF = EG : y. \tag{1}$$

Weiters gilt $\sphericalangle FDU = \sphericalangle GUE$ (Normalwinkel) und damit sind die Dreiecke UFD und EGU ähnlich, also

$$UF : DF = EG : UG. \tag{2}$$

Kombiniert man (1) und (2), so erhält man, weil U die Strecke AB halbiert, dass

$$\left(\frac{c}{2} - x\right)\left(\frac{c}{2} - y\right) = UF \cdot UG = DF \cdot EG = xy,$$

was durch Ausmultiplizieren zu

$$\frac{c^2}{4} - (x + y)\frac{c}{2} = 0$$

und damit zu $x + y = c/2$ äquivalent ist.

(Clemens Heuberger) □

Bemerkung. Die Aussage bleibt wahr, wenn D und E lediglich auf den Geraden AC bzw. BC (und nicht auf den Strecken) liegen. Die obenstehende Lösung könnte man entsprechend adaptieren; die folgenden Lösungen bleiben unverändert gültig.

Lösung 2. Wir betrachten gerichtete Winkel modulo 180° (oder alternativ: wir betrachten hier nur den Fall, dass D zwischen A und W liegt und müssten den anderen Fall analog betrachten), siehe Abbildung 2.

Wir betrachten das Seitenmittendreieck UVW. Klarerweise ist VW parallel zu AB und halb so lang. Zu zeigen ist, dass $FGVW$ ein Parallelogramm ist. Dann ist $FG = VW$, woraus die Behauptung folgt.

Es ist klar, dass $VW \parallel FG$; zu zeigen bleibt $GV \parallel FW$, das heißt $\sphericalangle GFW = \sphericalangle BGV$.

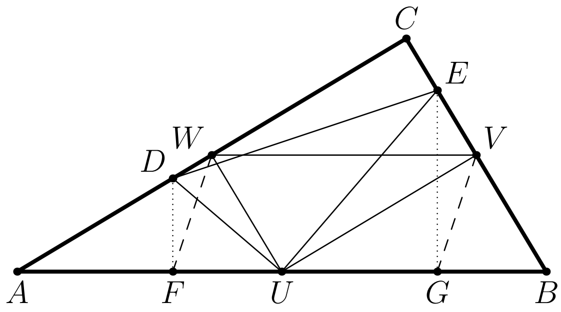

Abbildung 2: Aufgabe 2, Lösung 2

Da die Seiten des Seitenmittendreiecks parallel zu den Seiten des ursprünglichen Dreieck sind, ist $WUVC$ ein Rechteck. Wenn $D = W$ (äquivalent zu $E = V$), ist daher die Behauptung in der Angabe richtig. Wir nehmen ab jetzt an, dass $D \neq W$ und $E \neq V$.

Wegen $FU \perp FD$ und $WU \perp WD$ ist $FUWD$ ein Sehnenviereck. Ebenso ist $DUEC$ wegen $UD \perp UE$ und $CD \perp CE$ ein Sehnenviereck und $UGVE$ wegen $GU \perp GE$ und $VU \perp VE$. Damit erhalten wir $\sphericalangle GFW = \sphericalangle UFW = \sphericalangle UDW = \sphericalangle UDC = 180° - \sphericalangle CEU = \sphericalangle UEV = 180° - \sphericalangle VGU = \sphericalangle BGV$.

(Gerhard Kirchner) □

Lösung 3. Wir betrachten folgende Kette von Abbildungen:

- die Parallelprojektion normal zu AB von der Geraden AB auf die Gerade AC, die Punkte F auf AB auf Punkte D auf AC abbildet;
- die Abbildung von der Geraden AC auf das Geradenbüschel durch U, die Punkte D auf AC auf Geraden UD abbildet;
- die Abbildung vom Geradenbüschel durch U auf sich selbst, die Geraden UD auf dazu normale Geraden UE abbildet;
- die Abbildung vom Geradenbüschel durch U auf die Gerade BC, die Geraden durch U auf ihre Schnittpunkte E mit BC abbildet;
- die Normalprojektion von BC auf AB, die Punkte E auf BC auf ihre Normalprojektionen G auf AB abbildet.

Jede Abbildung ist eine projektive (doppelverhältnistreue) Abbildung zwischen eindimensionalen projektiven reellen Räumen, und ihre Hintereinanderausführung ist somit ebenfalls eine solche projektive Abbildung der Gerade AB auf sich selbst, die Punkte F in Punkte G überführt.

Es ist leicht einzusehen, dass diese Abbildungskette A auf U abbildet und U auf B. Nun seien die Punkte V und W wie in Lösung 2 definiert. Dann ist $UWCV$ ein Rechteck. Es ist dann ebenfalls leicht einzusehen, dass die Abbildungskette die Normalprojektion W' von W auf AB auf die Normalprojektion V' von V auf AB abbildet.

Die drei Punktepaare (A, U), (U, B) und (W', V') haben aber jeweils den Abstand $\frac{c}{2}$, also stimmt die projektive Abbildung von der Geraden AB auf sich selbst, die wie beschrieben Punkte F auf Punkte G abbildet, in drei Punkten mit der Translation um $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ überein und ist daher auch diese Translation, weil eine doppelverhältnistreue Abbildung durch die Bilder von drei Punkten eindeutig bestimmt ist und eine Translation klarerweise doppelverhältnistreu ist.

Also haben solche Punkte F und G immer den Abstand $\frac{c}{2}$ wie gewünscht.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 4. Wir führen einen analytischen Beweis und wählen günstige Koordinaten. Dazu sollen o. B. d. A. $A = (2,0)$, $B = (0,2\xi)$ und $C = (0,0)$ die Eckpunkte des rechtwinkeligen Dreiecks sein ($\xi > 0$). Der Mittelpunkt von AB ist U, deshalb ist $U = (1,\xi)$. Weil die x- und y-Achse die Trägergeraden der Seiten AC bzw. BC sind, haben wir $D = (\lambda, 0)$ und $E = (0,\mu)$ mit $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$. Aus der Orthogonalitätsbedingung $\overrightarrow{UD} \cdot \overrightarrow{UE} = 0$, also $(\lambda-1,-\xi)\cdot(-1,\mu-\xi) = 0$, ergibt sich nach kurzer Rechnung $\lambda = \xi^2 - \mu\xi + 1$ als Zusammenhang von λ und μ und damit $D = (\xi^2 - \mu\xi + 1, 0)$. Die Gerade durch A und B hat beispielsweise $\overrightarrow{r} = (1,-\xi)$ und $\overrightarrow{n} = (\xi, 1)$ als ihren Richtungs- bzw. Normalvektor.

Weil F der Schnittpunkt der Trägergeraden von AB und der Normalen auf sie durch den Punkt D ist, müssen wir aus der Gleichung $A + s\overrightarrow{r} = D + t\overrightarrow{n}$, also aus dem Gleichungssystem

$$(s+2, -s\xi) = (t\xi + \xi^2 - \mu\xi + 1, t),$$

einen der Parameter, etwa s, bestimmen. Wegen $t = -s\xi$ ergibt sich $s + 2 = -s\xi^2 + \xi^2 - \mu\xi + 1$ und daraus $s_F = (\xi^2 - \mu\xi - 1)/(\xi^2 + 1)$ samt $F = A + s_F\overrightarrow{r}$.

In entsprechender Weise erhält man den Punkt G. Mit $A + s\overrightarrow{r} = E + t\overrightarrow{n}$, also

$$(s+2, -s\xi) = (t\xi, t + \mu),$$

und $t = -s\xi - \mu$ folgt $s + 2 = -s\xi^2 - \mu\xi$, d.h. $s_G = -(\mu\xi + 2)/(\xi^2 + 1)$ samt $G = A + s_G\overrightarrow{r}$.

Wir haben $\overrightarrow{GF} = (s_F - s_G)\overrightarrow{r}$. Dies, $s_F - s_G = 1$ und $\overrightarrow{r} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ schließen den Beweis ab.

(Walther Janous) □

Aufgabe 3. *Auf einer Tafel stehen drei positive ganze Zahlen. In jedem Schritt wird zuerst eine Bezeichnung der Zahlen mit a, b und c so gewählt, dass $a > \operatorname{ggT}(b,c)$ gilt, und dann wird die Zahl a durch $a - \operatorname{ggT}(b,c)$ ersetzt. Das Spiel endet, wenn es keine Bezeichnung mit der geforderten Eigenschaft gibt.*

Man zeige, dass das Spiel immer endet und dass die drei Zahlen, die am Ende auf der Tafel stehen, nur von den Anfangszahlen abhängen, jedoch nicht vom Spielablauf.

(Theresia Eisenkölbl)

Lösung 1. Wir stellen zunächst fest, dass in jedem Schritt die Summe der drei Zahlen kleiner wird. Da die Summe dreier positiver ganzer Zahlen eine ganze Zahl ist und nicht unter Null fallen kann, muss das Spiel enden.

Wir zeigen jetzt, dass das Spiel immer damit endet, dass alle drei Zahlen gleich dem größten gemeinsamen Teiler der ursprünglichen drei Zahlen sind.

Dazu überprüfen wir zunächst, dass der größte gemeinsame Teiler der drei Zahlen eine Invariante ist.

Dabei verwenden wir die beiden bekannten Eigenschaften

$$\operatorname{ggT}(u,v,w) = \operatorname{ggT}(u, \operatorname{ggT}(v,w)) \text{ für alle ganzen Zahlen } u,\ v \text{ und } w$$

und

$$\operatorname{ggT}(u,v) = \operatorname{ggT}(u-v, v) \text{ für alle ganzen Zahlen } u \text{ und } v$$

und erhalten

$$\operatorname{ggT}(a - \operatorname{ggT}(b,c), b, c) = \operatorname{ggT}(a - \operatorname{ggT}(b,c), \operatorname{ggT}(b,c)) = \operatorname{ggT}(a, \operatorname{ggT}(b,c)) = \operatorname{ggT}(a,b,c).$$

Wenn alle Zahlen gleich sind, ist es klar, dass es keinen legalen Zug mehr gibt. Wir zeigen nun noch, dass es immer einen weiteren Zug gibt, solange die drei Zahlen verschieden sind. Sei also $a \geq b \geq c$ mit $a > c$. Dann muss $\operatorname{ggT}(b,c) \leq c < a$ gelten und wir können also einen weiteren Zug ausführen.

Damit ist bewiesen, dass wir immer bei drei Zahlen der Form (n,n,n) enden. Für diese Zahlen gilt aber $n = \operatorname{ggT}(n,n,n) = \operatorname{ggT}(a,b,c)$. Daher ist das Endergebnis immer (d,d,d) mit $d = \operatorname{ggT}(a,b,c)$ wie behauptet.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 1a. Wenn man nicht mit den angegebenen Regeln für den größten gemeinsamen Teiler arbeiten möchte, kann man die Invarianz des größten gemeinsamen Teilers der drei Zahlen auch ad hoc nachrechnen:

Seien $d \coloneqq \operatorname{ggT}(a, b, c)$ und $e \coloneqq \operatorname{ggT}(a - \operatorname{ggT}(b, c), b, c)$. Da d sowohl b als auch c teilt, teilt d auch $\operatorname{ggT}(b, c)$. Da d sowohl a als auch $\operatorname{ggT}(b, c)$ teilt, teilt d auch $a - \operatorname{ggT}(b, c)$. Somit ist d ein Teiler von e, weil d jede der drei Zahlen $a - \operatorname{ggT}(b, c)$, b und c teilt.

Umgekehrt sieht man analog, dass e ein Teiler von $\operatorname{ggT}(b, c)$ und damit auch von $(a - \operatorname{ggT}(b, c)) + \operatorname{ggT}(b, c) = a$ ist. Daraus folgt $e \mid d$.

Da $d \mid e$ und $e \mid d$ und beides positive ganze Zahlen sind, folgt $d = e$, was zu zeigen war.

(Clemens Heuberger) □

Aufgabe 4. *Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen N, für die $2^N - 2N$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist.*

(Walther Janous)

Antwort. Die einzigen Lösungen sind $N = 1$ und $N = 2$.

Lösung 1. Man rechnet unmittelbar nach, dass $N = 1$ und $N = 2$ Lösungen sind. Sei ab jetzt $N \geq 3$. Wir zeigen, dass es dann keine weiteren Lösungen gibt.

Offensichtlich ist $2^N - 2N$ gerade. Damit es eine Quadratzahl sein kann, muss es auch durch 4 teilbar sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn N gerade ist (da 2^N auf jeden Fall durch 4 teilbar ist und $2N$ genau für gerade N).

Sei also $N = 2k$ mit einer passenden positiven ganzen Zahl $k \geq 2$. Dann ist $2^{2k} - 4k < 2^{2k}$. Die nächstkleinere gerade Quadratzahl vor $2^{2k} = (2^k)^2$ ist $(2^k - 2)^2$, also muss

$$2^{2k} - 4k \leq (2^k - 2)^2 = 2^{2k} - 4 \cdot 2^k + 4$$

erfüllt sein, was nach Subtraktion von 2^{2k} und Division durch 4 äquivalent zu $2^k \leq k + 1$ ist.

Es gilt nach der bernoullischen Ungleichung aber $2^k = (1 + 1)^k > 1 + 1 \cdot k$ für alle $k \geq 2$. Für andere Beweise solcher Ungleichungen siehe `http://www.oemo.at/d/exponentiell-polynomiell`.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Wie in Lösung 1 schließt man kleine N aus und hat ab nun $N \geq 3$ zu betrachten.

Der Term $2^N - 2N$ ist für alle solchen Werte von N offensichtlich gerade (und somit im Falle, dass es eine Quadratzahl ist, auch dessen Wurzel), damit setzen wir $\sqrt{2^N - 2N} = 2x$ für eine passende nichtnegative ganze Zahl x und haben $4x^2 = 2^N - 2N$ zu lösen. Damit muss $N = 2k$ gerade sein mit einer passenden ganzen Zahl $k \geq 2$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} & 4x^2 = 2^{2k} - 2 \cdot 2k = 4^k - 4k \\ \iff \quad & k = 4^{k-1} - x^2 = (2^{k-1} - x)(2^{k-1} + x). \end{aligned}$$

Damit muss

$$\begin{aligned} r &= 2^{k-1} - x \\ s &= 2^{k-1} + x \end{aligned}$$

für passende ganze Zahlen $r \leq s$ mit $rs = k$ gelten. Da $k > 0$ und $s > 0$ gilt, ist auch $r > 0$. Wir erhalten

$$r + s = 2^{k-1} - x + 2^{k-1} + x = 2^k = 2^{rs}.$$

Da $2^\ell > \ell + 1$ für $\ell \geq 2$ (vgl. Lösung 1) und $rs + 1 \geq r + s$ (das ist äquivalent zu $(r - 1)(s - 1) \geq 0$) gelten, folgt der Widerspruch

$$r + s = 2^{rs} > rs + 1 \geq r + s$$

für $rs > 1$. Falls $rs = 1$ gilt, folgt $r = s = 1$, damit $x = 0$ und $k = 1$, was ebenfalls ein Widerspruch ist.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 2a. Wie in Lösung 2 wollen wir

$$k = (2^{k-1} - x)(2^{k-1} + x)$$

lösen, und sehen wie dort, dass $(2^{k-1} - x) \geq 1$.

Somit können wir abschätzen, dass

$$k = (2^{k-1} - x)(2^{k-1} + x) \geq 2^{k-1} + x \geq 2^{k-1}.$$

Wie in Lösung 1 können wir aber $k + 1 < 2^k$ für $k \geq 2$ und somit (nach Indexverschiebung) $k < 2^{k-1}$ für $k \geq 3$ zeigen. Den verbleibenden Fall $k = 2$, also $N = 4$, können wir durch Nachrechnen leicht ausschließen.

(Birgit Vera Schmidt) □