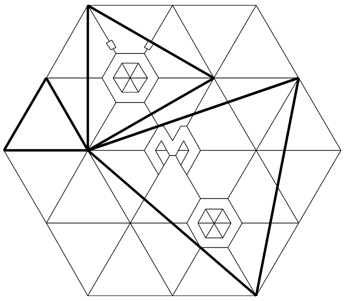


Folgen und Reihen

Vorbereitungskurs
für ÖMO-Fortgeschrittene
an der TU Graz

Birgit Vera Schmidt

14. November 2008

Kapitel 1

Folgen

1.1 Einleitung

Eine Folge ist, wie der Name bereits nahelegt, eine Folge von Zahlen, meist mit bestimmten Eigenschaften. Je nachdem, aus welchem Bereich die Zahlen kommen, spricht man beispielsweise von einer Folge in $\mathbb{N}$, in $\mathbb{Z}$, in $\mathbb{Q}$ oder in $\mathbb{R}$.

Die bekannteste Folge lernt man übrigens schon in der Volksschule: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$ (Das ist übrigens eine Folge in $\mathbb{N}$, also eine Folge natürlicher Zahlen.)

Üblich ist folgende Schreibweise:
$\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet die Folge,
a_n das n-te Element der Folge

Hinweis. Oft wird einfach nur $\langle a_n \rangle$ statt $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ geschrieben.

Die obige Folge würde man damit so beschreiben: "Sei $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $a_n = n$."

1.2 Arithmetische und geometrische Folgen

Besondere Bedeutung haben zwei spezielle Arten von Folgen. Eine arithmetische Folge ist eine Folge, bei der der Abstand aufeinanderfolgender Folgenelemente konstant ist.

Definition. Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge von Zahlen aus A. Diese nennt man eine arithmetische Folge dann und nur dann, wenn für ein fixes $c \in A$ gilt:

$$a_{n+1} = a_n + c \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

Hinweis. A kann dabei eine beliebige Grundmenge, also $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, oder auch ganz eine andere sein.

Satz 1.1. *Sei $\langle a_n \rangle$ eine arithmetische Folge mit $a_{n+1} = a_n + c, c \in A, \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + c \\ &= a_{n-2} + 2c \\ &\ \ \vdots \\ &= a_{n-k} + k \cdot c \\ &\ \ \vdots \\ &= a_0 + n \cdot c \end{aligned}$$

Die zweite besondere Folge ist die geometrische Folge. Bei dieser ist der Quotient aufeinanderfolgender Elemente konstant.

Definition. Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge von Zahlen aus A. Diese nennt man eine geometrische Folge dann und nur dann, wenn für ein fixes $q \in A$ gilt:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

Satz 1.2. *Sei $\langle a_n \rangle$ eine geometrische Folge mit $a_{n+1} = a_n \cdot q, q \in A, \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} \cdot q \\ &= a_{n-2} \cdot q^2 \\ &\vdots \\ &= a_{n-k} \cdot q^k \\ &\vdots \\ &= a_0 \cdot q^n \end{aligned}$$

1.3 Fibonacci-Folge

Berühmteste Folge (abgesehen von den gerade erklärten mathematischen Grundlagen natürlich) ist die nach Leonardo Fibonacci (1180(?) - 1241) benannte Folge, die folgendermaßen definiert ist:

Definition. Die Fibonacci-Folge ist definiert durch das rekursive Bildungsgesetz

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{für } n \geq 2 \tag{1.3}$$

mit den Anfangswerten

$$F_1 = F_2 = 1 \tag{1.4}$$

Hinweis. Oft werden auch die Anfangswerte $F_0 = 0, F_1 = 1$ angegeben. Das Resultat ist dasselbe.

Die ersten Folgenelemente lauten damit:

$$(0,)1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

Man beachte: Bereits das 26. Folgenelement ist größer als 100.000, das 31. größer als 1.000.000 und das 36. beträgt fast 15 Millionen.

Das klassische Beispiel für Fibonaccis hat mit Kaninchen und deren Vermehrung zu tun. Fibonacci definierte das Problem folgendermaßen:

1. Zu Beginn gibt es ein Paar geschlechtsreifer Kaninchen.
2. Jedes neugeborene Paar wird im zweiten Lebensmonat geschlechtsreif.
3. Jedes geschlechtsreife Paar wirft pro Monat ein weiteres Paar.

Weiters wird angenommen, dass die Kaninchen unsterblich sind und sich in einem abgeschlossenen Raum befinden.

Im Gegensatz zu arithmetischen und geometrischen Folgen fällt uns auf, dass es wesentlich schwieriger ist, ein Bildungsgesetz für das n-te Folgenelement der Fibonacci-Folge aufzustellen. Um das 139. Element einer arithmetischen Folge zu berechnen, berechnen wir einfach $a_0 + 139 \cdot c$, wobei a_0 und c natürlich bekannt sind. Ebenso kann man das 139. Element einer geometrischen Folge berechnen als $a_0 \cdot q^{139}$, wiederum sind a_0 und q bekannt. Bei den Fibonaccis kennen wir momentan keine andere Methode, als die 139 ersten Elemente alle zu berechnen. Höchste Zeit, das zu ändern.

1.4 Lösen von Rekursionsformeln

"Jede hinreichend fortschrittliche Technologie ist von Magie nicht zu unterscheiden." – Drittes Clarkesches Gesetz, Arthur C. Clarke

In diesem Sinne überspringen wir nun sämtliche Grundlagen und stürzen uns medias in res. Wer sich weiter mit dem Thema auseinandersetzt, wird die Prinzipien dahinter noch genauer kennenlernen; für uns ist es aber ausreichend zu wissen, dass die nun vorgestellte Methode uns meistens das liefert, was wir haben wollen.

Zunächst benötigen wir noch folgende Definition:

Definition. Eine Rekursion der Form

$$a_{n+1} = a_n \cdot c_0 + a_{n-1} \cdot c_1 + a_{n-2} \cdot c_2 + \cdots + a_{n-m} \cdot c_m + s(n) \tag{1.5}$$

mit c_i konstant für $i = 1, \ldots, m$ und $c_m \neq 0$ heißt lineare Rekursion. Gilt $s(n) = 0$, so nennt man sie homogen. $m + 1$ ist die Ordnung der linearen Rekursion.

Methode 1.3.

0. *Sei eine homogene lineare Rekursionsformel mit konstanten Koeffizienten gegeben. (Hinweis: Manchmal kann man fehlende Elemente durch "dazubasteln" mit Koeffizient 0 ersetzen.)*
1. *Man ersetze a_n durch q^n (und entsprechend $a_{n\pm k}$ durch $q^{n\pm k}$).*
2. *Sei $n - m$ die größte vorkommende Potenz von q. Man dividiere die Gleichung durch q^{n-m}.*
3. *Nun hat man eine Gleichung in q mit konstanten Koeffizienten und Potenzen. Man löse diese mit den gewohnten Methoden. Seien $q_1, q_2, \ldots, q_l$ die Lösungen mit Vielfachheiten $v_1, v_2, \ldots, v_l$.*
4. *Man stelle folgenden Ansatz auf:*

$$\begin{aligned} a_n = \; & b_{1,1} \cdot q_1^n + b_{1,2} \cdot n \cdot q_1^n + \cdots + b_{1,v_1} \cdot n^{v_1-1} \cdot q_1^n + \\ & b_{2,1} \cdot q_2^n + b_{2,2} \cdot n \cdot q_2^n + \cdots + b_{2,v_2} \cdot n^{v_2-1} \cdot q_2^n + \\ & \vdots \\ & + b_{l,1} \cdot q_l^n + b_{l,2} \cdot n \cdot q_l^n + \cdots + b_{l,v_l} \cdot n^{v_l-1} \cdot q_l^n \end{aligned}$$

   Hinweis. Für lauter verschiedene Lösungen vereinfacht sich das zu:

$$a_n = b_1 \cdot q_1^n + b_2 \cdot q_2^n + \cdots + b_l \cdot q_l^n$$

   Hinweis. Normalerweise schreibt man nicht $b_{i,j}$, sondern setzt einfach Großbuchstaben in alphabetischer Reihenfolge ein.

5. *Man setze die bekannten Anfangswerte ein und bestimme die $b_{i,j}$ bzw. b_i.*
6. *Probe!*

Beispiel 1.4. Die Rekursionsgleichung der Fibonaccis, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ist eine homogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten. Wir wenden daher die neue Methode darauf an:

1. $q^{n+1} = q^n + q^{n-1}$
2. $$\Big/ q^{n-1}$$ $$q^2 = q + 1$$

3.
$$
\begin{aligned}
q^2 - q - 1 &= 0 \\
q_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

4. $F_n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

5.
$$
\begin{aligned}
F_0 &= A + B = 0 \Longrightarrow B = -A \\
F_1 &= A \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + B \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \\
&= A \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} - A \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \\
&= A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\
&= A \cdot \sqrt{5} = 1 \\
\Longrightarrow A &= \frac{1}{\sqrt{5}} = -B
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)
$$

6. Wir berechnen zur Probe mit dieser Formel F_4:
$$
\begin{aligned}
F_4 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4\right) \\
&= 3 \qquad \text{OK}
\end{aligned}
$$

Inhomogene lineare Rekursionsgleichungen sind in erster Linie lästig und kommen zudem selten und erst in schwierigeren Wettbewerben vor. Zu Risiken und Nebenwirkungen fragen Sie Ihren Arzt oder Apotheker.

Eine spezielle Form von inhomogenen Rekursionsgleichungen wollen wir dennoch kurz betrachten, nämlich die, bei der der inhomogene Term die Form hat:

$$
s(n) = (s_0 + s_1 \cdot n + s_2 \cdot n^2 + \cdots + s_r \cdot n^r) \cdot \alpha^n \qquad s_i \text{ konstant } \forall i \tag{1.6}
$$

Methode 1.5.

0. *Sei eine inhomogene lineare Rekursionsformel mit konstanten Koeffizienten gegeben, deren Störterm die oben angegebene Form hat.*
1. *Man löse die Rekursion für die Gleichung ohne den Störterm mit Schritten 1-3 der obigen Methode.*
2. *Man bestimme eine sogenannte partikuläre Lösung, das heißt eine Folge, die die Rekursionsgleichung erfüllt, aber nicht notwendigerweise die richtigen Startwerte hat. Dazu verwende man folgenden Ansatz:*
$$
y_n = (t_0 + t_1 \cdot n + t_2 \cdot n^2 + \cdots + t_r \cdot n^r) \cdot n^v \cdot \alpha^n \tag{1.7}
$$
wobei v die Vielfachheit von α als Nullstelle der gerade gelösten homogenen Gleichung ist. Diesen Ansatz setzt man in die Rekursionsgleichung ein und berechnet die Werte $t_0, t_1, \ldots, t_r$.

3. *Die Lösung der Rekursion erhält man nun als Addition von partikulärer Lösung und Ansatz der homogenen Lösung (wie in Schritt 4 der vorigen Methode).*

4. *Man bestimme die noch ausständigen Koeffizienten wie zuvor.*

5. *Probe!*

Beispiel 1.6. 1. $a_{n+1} = 2 \cdot a_n + a_{n-1} + n$

2. Erhalte Lösungen $q_1 = q_2 = 1$

3. $s(n) = n = (1 \cdot n + 0 \cdot 1) \cdot 1^n \implies \alpha = 1$ ist doppelte Nullstelle der homogenen Lösung.
   Verwende daher Ansatz: $y_n = (A \cdot n + B) \cdot n^2 \cdot 1^n$
   Einsetzen in Rekursionsgleichung ergibt: $(A \cdot (n+1) + B)(n+1)^2 = 2 \cdot (A \cdot n + B) \cdot n^2 - (A \cdot (n-1) + B) \cdot (n-1)^2 + n$
   Durch Koeffizientenvergleich erhält man $A = \frac{1}{6}, B = 0$
   Partikuläre Lösung: $y_n = \frac{1}{6} \cdot n^3$

4. Ansatz für allgemeine Lösung: $a_n = C + D \cdot n + \frac{1}{6} \cdot n^3$.

5. Einsetzen der Startwerte ergibt $C = 2, D = \frac{5}{6}$. Die explizite Form der Rekursionsgleichung lautet daher: $a_n = 2 + \frac{5}{6} \cdot n + \frac{1}{6} \cdot n^3$

6. Probe!! (Kann gar nicht genug Rufzeichen haben.)

Hinweis. Bei mehr als einem Störterm kann man diese auch getrennt betrachten und dann alle partikulären Lösungen zur homogenen Lösung addieren.

1.5 Mehr als eine Rekursion

Manchmal passiert es, dass wir zwei oder sogar mehr Rekursionen gleichzeitig betrachten müssen. In diesem Fall hilft meist nur eines: Mit allen Tricks so lange vereinfachen, bis eine der beiden Folgen nicht mehr von der anderen abhängig ist.

Beispiel 1.7. Seien $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ zwei Folgen, die den folgenden Rekursionsgleichungen genügen:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2 \cdot a_n + b_n \\ b_{n+1} &= a_n + b_n \end{aligned}$$

Seien die Startwerte $a_1 = b_1 = 1$. Man berechne a_n in Abhängigkeit von n.

Lösung. Die zweite der beiden Rekursionsgleichungen lässt sich umformen zu

$$a_n = b_{n+1} - b_n$$

Da dies für jedes n gilt, gilt natürlich auch

$$a_{n+1} = b_{n+2} - b_{n+1}$$

(Diese Vorgehensweise wird als “Indexverschiebung” bezeichnet.)
Wir setzen dies in die erste Rekursionsgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} (b_{n+2} - b_{n+1}) &= 2 \cdot (b_{n+1} - b_n) + b_n \\ b_{n+2} &= 3b_{n+1} - b_n \end{aligned}$$

Ab hier kommen wir wieder mit dem bekannten Verfahren ans Ziel. □

1.6 Erraten expliziter Formeln und Beweis durch vollständige Induktion

Nebst all diesen Verfahren ist es manchmal nach wie vor am einfachsten, die explizite Darstellung mit Hilfe der ersten berechneten Werte zu erraten und durch vollständige Induktion zu beweisen. Praktischerweise können wir für den Induktionsschritt einfach die Rekursionsformel verwenden.

Beispiel 1.8. Man finde eine explizite Form für die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_{n+1} = a_n + n, a_1 = 0$. Die ersten Folgenelemente lauten: $0, 1, 3, 6, 10, 15$. Wir vermuten: $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Lösung. Die Induktionsbasis ist bereits vorhanden, es fehlt nur noch der Induktionsschritt, den wir durch einfaches Nachrechnen der Rekursionsgleichung durchführen:

$$a_{n+1} = a_n + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 - n}{2} + \frac{2n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

□

1.7 Grenzwerte

Manchmal interessiert es uns, was mit einer Folge passiert, wenn n sehr groß wird. Nähert sich die Folge einem Wert immer mehr an, so sagt man, sie konvergiert gegen diesen Wert, den man als Grenzwert bezeichnet. Strebt die Folge gegen unendlich oder schwankt sie zwischen mehreren Werten, ohne sich einem einzelnen anzunähern, so sagt man, dass die Folge divergiert.

Obwohl man über Konvergenz allein ein ganzes Semester lang reden könnte, wollen wir uns aus Zeitgründen auf die fundamentalsten Grundlagen beschränken.

Definition. Der Wert, gegen den eine Folge konvergiert, wird als Grenzwert oder Limes bezeichnet. Die Schreibweise dafür ist

$$\lim_{n \to \infty} a_n \tag{1.8}$$

In der expliziten Darstellung ist es meist etwas leichter als in der rekursiven, Grenzwerte zu bestimmen.

Satz 1.9. *Seien $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ zwei Folgen. Dann gilt: Wenn $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ konvergieren, dann konvergieren auch $\langle a_n + b_n \rangle$, $\langle a_n - b_n \rangle$, $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ und, falls $\langle b_n \rangle$ nicht gegen 0 konvergiert, $\langle \frac{a_n}{b_n} \rangle$. Der Grenzwert entspricht Summe/Differenz/Produkt/Quotient der Grenzwerte von $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$.*

Wenn $\langle a_n \rangle$ konvergiert und $\langle b_n \rangle$ divergiert (oder umgekehrt), dann divergiert die Summe der beiden.

Wenn $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ divergieren, ist über die Summe keine generelle Aussage möglich.

Satz 1.10. *Sei a_n eine rationale Funktion, d.h.*

$$a_n = \frac{P(n)}{Q(n)} \tag{1.9}$$

wobei $P(n)$ und $Q(n)$ Polynome sind. Der Grad eines Polynoms P ist die höchste vorkommende Potenz und wird manchmal als $Grad(P)$ angeschrieben. Seien p_1 und q_1 die Koeffizienten der jeweils höchsten vorkommenden Potenz in P und Q. Es gilt:

- *Wenn $Grad(P) > Grad(Q)$, dann divergiert die Folge.*
- *Wenn $Grad(P) < Grad(Q)$, dann konvergiert die Folge gegen 0.*
- *Wenn $Grad(P) = Grad(Q)$, dann konvergiert die Folge gegen $\frac{p_1}{q_1}$.*

Satz 1.11. *Habe a_n die Form $a_n = q^n, q \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

- *Ist $|q| > 1$, divergiert die Folge.*
- *Ist $|q| < 1$, dann konvergiert die Folge gegen 0.*
- *Ist $q = 1$, dann konvergiert die Folge gegen 1.*
- *Ist $q = -1$, dann divergiert die Folge.*

1.8 Fixpunkte

Wollen wir die Grenzwerte einer Folge bestimmen, von der wir nur die Rekursionsgleichung kennen, wird die Sache etwas schwieriger. Liegt eine (nicht notwendigerweise lineare) Rekursion erster Ordnung vor (d.h. $a_{n+1} = r(a_n)$), so kann man folgendes versuchen: Zunächst müssen wir beweisen, **dass** die Folge überhaupt konvergiert. Danach suchen wir sogenannte Fixpunkte, da bekannt ist, dass die Folge gegen einen dieser Fixpunkte streben muss. Schließlich bleibt noch zu bestimmen, welcher der Fixpunkte der Grenzwert ist.

Definition. Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt *monoton steigend* (fallend), wenn aus $n > m$ folgt, dass $a_n \geq a_m$ $(a_n \leq a_m)$. Ist die Ungleichung strikt, d.h. $a_n > a_m$ $(a_n < a_m)$, so sagt man, dass die Folge *streng monoton steigend* (fallend) ist.

Satz 1.12. *Sei die Folge $\langle a_n \rangle$ monoton steigend (fallend) und nach oben (unten) beschränkt. Dann konvergiert die Folge.*

Achtung. Die Umkehrung stimmt nicht. Eine Folge kann konvergent sein, ohne monoton zu sein. (Allerdings ist jede konvergente Folge beschränkt.)

Definition. Ein Fixpunkt ist ein Wert a, für den gilt, dass $a = r(a)$.

Methode 1.13.

0. *Die Rekursionsformel genügt der Form $a_{n+1} = r(a_n)$.*
1. *Man beweise, dass die Folge für den gegebenen Startwert monoton steigend (fallend) und nach oben (unten) beschränkt ist.*
2. *Man bestimme die Fixpunkte, indem man für a_{n+1} und jedes a_n eine noch zu bestimmende Konstante a einsetzt, und löse die entstehende Gleichung in a.*
3. *Man bestimme, welcher der Fixpunkte der Grenzwert der Folge ist.*

Beispiel 1.14. Man bestimme den Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n}$ und $a_1 = 1$.

Lösung. Wir zeigen zunächst **Beschränktheit:**
Vermutung: $n \leq 4$. Beweisen dies durch Vollständige Induktion:
Basis: $a_1 = 1 \leq 4$ ok.
Annahme: $a_n \leq 4, n = 1, \ldots, N$.
Schritt: $a_{N+1} = \sqrt{12 + a_N} \leq \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$ q.e.d.
Analog dazu zeigen wir auch, dass $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Monotonie: Vermutung: Folge ist monoton steigend.
Beweis:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\overset{!}{\geq} a_n \\ \sqrt{12 + a_n} &\overset{!}{\geq} a_n \qquad \Big/^2 \qquad (\text{ÄU da } a_n \geq 0) \\ 12 + a_n &\overset{!}{\geq} a_n^2 \\ -a_n^2 + a_n + 12 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $a_n \in [-3, 4]$. Auf Grund der zuvor bewiesenen Beschränktheit ist das der Fall.

Nun gilt es nur noch, den Grenzwert zu finden. Dazu bestimmen wir zunächst alle Fixpunkte, indem wir in der Rekursionsgleichung Folgenelemente durch ein konstantes c ersetzen:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{12+c} \qquad \Big/^{2} \\ c^2 &= 12 + c \end{aligned}$$

Lösen dieser quadratischen Gleichung ergibt:

$$c_1 = 4, c_2 = -3$$

Da wir wissen, dass $a_n \geq 0$, können wir den zweiten Fixpunkt als Grenzwert ausschließen. Die Folge konvergiert daher gegen 4. $\square$

Eine Frage ist noch offen: Woher kam die anfängliche Vermutung, $a_n \leq 4$? Einerseits kann man einfach die ersten Werte berechnen und dann raten. Für diese Folge sind die ersten fünf Werte (abgerundet) $1, 3.6, 3.95, 3.99, 3.99$. Der Schluss liegt nahe.

Oft kann es aber wesentlich einfacher sein, **zuerst** die Fixpunkte zu bestimmen und daraus Rückschlüsse über die Folge zu ziehen. Achtung: Sowas ist höchstens auf dem Konzeptpapier erlaubt, aber nicht in der Reinschrift. Außerdem gilt: Nicht alles, was Fixpunkt ist, kann auch Grenzwert sein.

Beispiel 1.15 (Abschreckendes Beispiel)**.**

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 3, a_1 = 1$$

Wir bestimmen die Fixpunkte:

$$\begin{aligned} c &= 2 \cdot c + 3 \\ c &= -3 \end{aligned}$$

Dass die Folge monoton steigend ist, ist offensichtlich, und das mit der Beschränktheit “wird schon passen”, also ist -3 der Grenzwert. Irrtum, die Folge divergiert.

Weiterer wertvoller Hinweis: Eine Folge muss nicht notwendigerweise gegen den “nächsten” Fixpunkt konvergieren, d.h. eine monoton steigende Folge mit Startwert 1 und Fixpunkten 5 und 10 kann durchaus gegen 10 konvergieren.

Kapitel 2

Reihen

2.1 Einleitung

Nach all diesen Diskussionen über Folgen gibt es noch einen weiteren interessanten Punkt, den wir bislang ignoriert haben: Was passiert, wenn man die Folgenelemente addiert?

Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge. Dann nennt man

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.1}$$

die dazugehörige Reihe. Deren Wert ist folgendermaßen definiert:

Definition. Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge, und bezeichne

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{2.2}$$

die Summe der ersten n Folgenelemente. Der Wert der Reihe wird berechnet als

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n \tag{2.3}$$

Definition. Falls $\langle S_n \rangle$ divergiert, so sagt man, die Reihe divergiert. Falls $\langle S_n \rangle$ konvergiert, spricht man von einer konvergenten Reihe.

2.2 Wichtige Sätze

Satz 2.1. *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, dann konvergiert $\langle a_n \rangle$ gegen 0.*

Korollar 2.2. *Konvergiert $\langle a_n \rangle$ gegen $c \neq 0$, dann divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Satz 2.3. *Für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ gilt:*

- *Falls $\alpha > 1$ konvergiert die Reihe.*
- *Falls $\alpha \leq 1$ divergiert die Reihe.*

2.3 Arithmetische Reihen

Satz 2.4.

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N \cdot (N+1)}{2} \tag{2.4}$$

Satz 2.5. *Sei $\langle a_n \rangle$ eine arithmetische Folge mit $a_n = a_0 + n \cdot c$. Dann gilt:*

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert dann und nur dann, wenn* $a_0 = c = 0$
-
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_n &= a_0 + a_0 + c + a_0 + 2 \cdot c + \cdots + a_0 + N \cdot c \\ &= (N+1) \cdot a_0 + c \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + N) \\ &= (N+1) \cdot a_0 + c \cdot \frac{N \cdot (N+1)}{2}\end{aligned}$$

2.4 Geometrische Reihen

Satz 2.6.
$$\sum_{n=1}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1-q} \qquad \textit{für } q \neq 1 \tag{2.5}$$

(und =(n+1) für q = 1)

Satz 2.7. *Sei $\langle a_n \rangle$ eine geometrische Folge mit $a_n = a_0 \cdot q^n, q \neq 1$. Dann gilt:*

-
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_n &= a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + \cdots + a0 \cdot q^N \\ &= a_0 \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^N) \\ &= a_0 \cdot \frac{1 - q^{N+1}}{1-q} \qquad \textit{für } q \neq 1\end{aligned}$$

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 \cdot \frac{1}{1-q}$ *für $|q| < 1$, sonst divergent*

Kapitel 3

Beispiele

1. Man bestimme die Anzahl der Teilmengen von $\{1, ..., n\}$, die keine aufeinanderfolgenden Zahlen beinhalten.

2. Mischa hat rote und schwarze Plastikperlen und möchte daraus eine Halskette mit n Perlen basteln, wobei keine zwei roten Perlen direkt nebeneinander aufgefädelt sein sollen. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

3. Sam möchte einen Streifen der Größe $2 \times n$ mit 1×2 großen Dominosteinen überdecken. Wieviele Möglichkeiten gibt es dafür?

4. Alex zeichnet ein Muster aus rechtwinkeligen Dreiecken. Er beginnt mit einer 200mm langen Grundlinie. Genau in der Mitte davon zeichnet er im rechten Winkel dazu eine 2 mm lange Linie und verbindet deren Endpunkt mit einem zufälligen der beiden Endpunkte der Grundlinie. Die so entstehende Linie verwendet er als neue Grundlinie und wiederholt den Vorgang. Das zweite Dreieck ist viel kleiner als das erste, das dritte kleiner als das zweite. Alex fragt sich, wie die Dreiecke wohl aussehen würden, wenn er unendlich lange so weitermachen würde. Außerdem möchte er wissen, wie lange die 2008-te Grundlinie ist.

5. Michi zeichnet ein Muster aus Kreisen. In die Ecke eines Blattes Papier zeichnet sie einen großen Kreis mit Radius 1 dm, sodass dieser beide Ränder des Blattes berührt. Dann zeichnet sie in das Eck zwischen erstem Kreis und Papierrand den größtmöglichen Kreis ein, der Platz hat. Im Eck darunter wieder, und so weiter. Wie groß ist die Summe der Radien, Umfänge und Flächen?

6. Josef hat auf einem Konto 100 Euro. Jedes Jahr bekommt er 4% Guthabenszinsen und zahlt 3 Euro Kontoverwaltungsgebühr. Wieviel Geld besitzt er nach 10 Jahren?

7. Das Gasthaus Möller aktualisiert und erweitert seine Speisekarte am Anfang jedes Monats nach folgendem Prinzip: Zuerst werden gleich viele neue Gerichte erfunden, wie bereits auf der Karte stehen. Dann werden alle gestrichen, die bereits seit 2 Monaten auf der Karte waren. Im September 2008 gab es nur 5 verschiedene Gerichte, im Oktober 7. Wieviele wird es im Juli 2009 geben?

8. Man zeige: $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ (wobei $\langle F_n \rangle$ die Folge der Fibonacci-Zahlen ist).

9. Ein nicht namentlich genannter Student kocht jeden Tag mit folgenden Zutaten: 60% frische Zutaten, 30% Reste des Essens vom Vortag, 10% Reste von vorgestern. Nach einiger Zeit möchte er wissen, wie alt sein Essen im Durchschnitt ist, und gegen welches Durchschnittsalter es konvergieren wird, wenn er die Methode für den Rest seines Lebens fortsetzt. (Heute bedeutet 0 Tage alt, und an den ersten beiden Tagen seines Studentenlebens hat er nur frische Zutaten verwendet.)

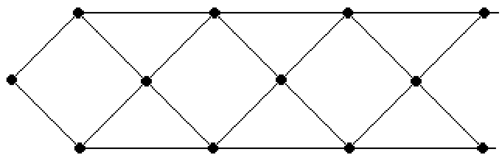
10. Sein Wohnungskollege plant eine ähnliche Kochmethode: Er möchte jeden Tag mit $c\%$ frischen Zutaten kochen und den Rest mit Resten vom Vortag auffüllen. Er fragt sich, wie hoch er c wählen muss, damit sein Essen im Durchschnitt nie älter als a) 3, b) t Tage wird.

11. Max und Moritz stehlen einander mit Begeisterung das Taschengeld. Jede Nacht stiehlt Max ein Drittel von Moritzs Besitz, während Moritz gleichzeitig die Hälfte aus Maxs Sparschwein plündert.

12. Zwischen den Staaten Aswan und Bedran ist ein Wettrüsten ausgebrochen. Der Verteidigungsminister von Aswan hat beschlossen, den Waffenbestand jedes Jahr um 10% zu erhöhen und zusätzlich 80% dessen zu produzieren, was dem Geheimdienst zu Folge Bedran im Vorjahr produziert hat. Der Verteidigungsminister von Bedran hat seiner Regierung vorgeschlagen, den Waffenbestand jedes Jahr um 20% zu erhöhen und zusätzlich um 10% des zuletzt bekannten Bestandes von Aswan. Zu Beginn haben beide Staaten 10 Atombomben. Sobald ein Staat mindestens 20% mehr Atombomben hat als der andere, oder mindestens 10000 Atombomben besitzt, greift er an. Wann ist der dritte Weltkrieg, welcher Staat greift zuerst an, und aus welchem der zwei möglichen Gründe?

13. Um jeden Gitterpunkt (x, y) mit nicht negativen ganzen Zahlen als Koordinaten wird ein Quadrat mit dem Gitterpunkt als Mittelpunkt und der Seitenlänge $\frac{0.9}{2^x 5^y}$ in beliebiger Lage gelegt. Man bestimme den minimalen Flächeninhalt dieser aus unendlich vielen Quadraten bestehenden Figur. (BWF2, 2003)

14. In einem Straßennetz, dessen Anfang dargestellt ist, sind die Punkte in der mittleren Horizontalen der Reihe nach mit 1, 4, 7, ... bezeichnet, die oberen Punkte der Reihe nach mit 2, 5, 8, ... und die unteren der Reihe nach mit 3, 6, 9, ... Wie viele Wege von "1" nach "3n+1" gibt es, die Punkte nur in monoton wachsender Reihenfolge besuchen? (BWF2,



2002)

15. Für jede reelle Zahl b bestimme man alle reellen Zahlen x mit $x - b = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. (GWF, 2003)

16. Es sei $A_0 = \{1, 2\}$ und für $n > 0$ entsteht A_n aus A_{n-1} indem man zu A_{n-1} die natürlichen Zahlen hinzunimmt, die sich als Summe von zwei verschiedenen Zahlen aus A_{n-1} darstellen lassen. Es sei $a_n = |A_n|$ die Anzahl der Zahlen in A_n. Man bestimme a_n als Funktion von n. (GFW, 2001)

17. An der TU Graz werden jeden Dezember die Studentenzahlen ermittelt. Es ist bekannt, dass

    - jeden Juni 15% der Studenten ihr Studium beenden
    - jeden August 10% der verbleibenden Studenten ein Auslandsjahr beginnen
    - und entsprechend Ende August die Studenten, die gerade für ein Jahr im Ausland waren, zurück kommen
    - jeden Oktober pro 100 Studenten, die bereits im September inskribiert waren, 20 neue Studenten an die Uni kommen
    - im Dezember 2007 10000 Studenten an der TU Graz studiert haben und 750 auf Auslandsjahr waren.

    Wie viele Studenten werden im Dezember 2030 an der TU Graz sein? (Hinweis: Zahlen müssen nicht ganzzahlig sein.)

18. Antons Mutter zahlt Anton Taschengeld folgendermaßen aus: Jeden Monat bekommt er den Betrag, um den sein Vermögen seit dem letzten Monat gewachsen ist (wobei der Vermögensstand am 1. eines jeden Monats gemessen wird und die Taschengeldauszahlung danach erfolgt, also zu den Einnahmen des aktuellen Monats gerechnet werden kann). Anton beginnt völlig pleite und verdient im ersten Monat durch Gartenarbeiten 10 Euro. Er möchte wissen, wie sich sein Vermögen entwickelt, wenn er a) gar nichts tut, b) jeden Monat 1 Euro ausgibt, c) jeden Monat 1 Euro verdient, d) jeden Monat 2 Euro verdient. Außerdem möchte er wissen, um wieviel % er mit d) im n-ten Monat mehr besitzt als mit Methode c) oder b).

19. Man bestimme den Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_0 = 0, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$.

20. Wilma und Fred Feuerstein fahren gemeinsam Auto. Sie wechseln sich dabei ab. Wilma fährt immer genau gleich weit wie Fred gerade gefahren ist, aber Fred fährt nur 90% der Strecke, die Wilma soeben zurückgelegt hat. Am Anfang sitzt Fred am Steuer und fährt 1000m. Wie weit kommen die beiden? Wie lange brauchen sie bis ins 4 km entfernte Felsental?