IMO 2019

Aufgabe 1: Es sei $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, so dass

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

für alle ganzen Zahlen a und b gilt.

Lösung: Setzen wir $a = 0$ und $b = n + 1$, erhalten wir

$$f(0) + 2 \cdot f(n+1) = f(f(n+1)),$$

und setzen wir $a = 1$ und $b = n$, erhalten wir

$$f(2) + 2 \cdot f(n) = f(f(n+1)).$$

Da die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen übereinstimmen, gilt für alle ganzen Zahlen n

$$f(0) + 2 \cdot f(n+1) = f(2) + 2 \cot f(n),$$

und somit

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0)) = k.$$

Die auf $\mathbb{Z}$ definierte Funktion f ist somit linear und wir erhalten

$$f(n) = kn + d.$$

Setzen wir diese Funktion in die gegebene Funktionalgleichung ein, erhalten wir

$$2ka + d + 2 \cdot (kb + d) = k \cdot (k \cdot (a+b) + d) + d,$$

oder

$$\begin{aligned} & 2k(a+b) + 3d = k^2(a+b) + kd + d \\ \iff \quad & k^2(a+b) - 2k(a+b) + kd - 2d = 0 \\ \iff \quad & (k-2)(k(a+b) + d) = 0 \end{aligned}$$

für alle $a, b \in \mathbb{Z}$. Dies gilt wenn $k = 2$ und $d \in \mathbb{Z}$ oder $k = d = 0$ gilt. Wir erhalten also als Lösungen der Funktionalgleichung die Funktionen

$$f(n) = 0 \quad \text{und} \quad f(n) = 2n + d$$

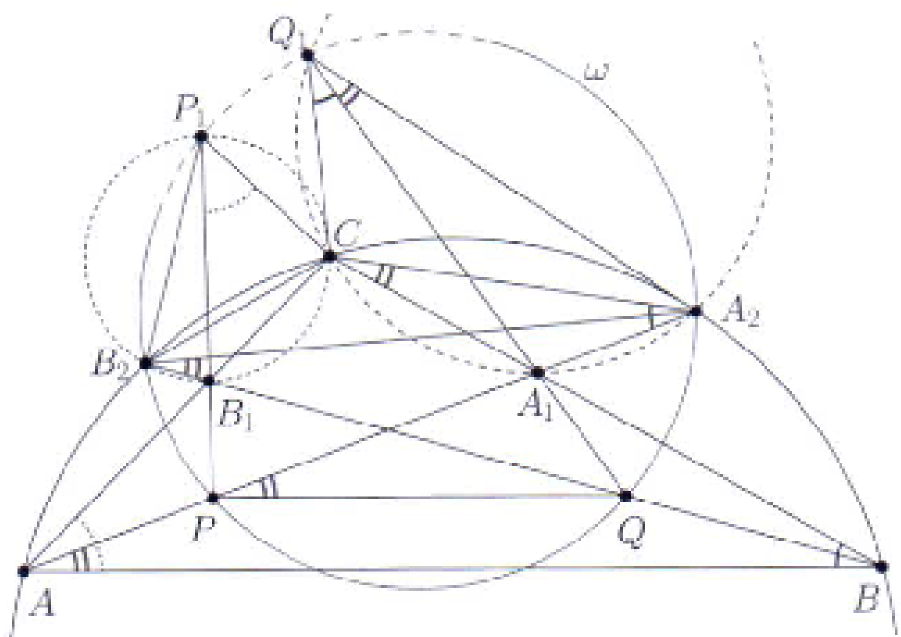
mit $d \in \mathbb{Z}$ beliebig. $\square$

Aufgabe 2: Im Dreieck ABC liegt ein Punkt A_1 auf der Seite BC und ein Punkt B_1 auf der Seite AC. Es seien P und Q Punkte auf den Strecken AA_1 bzw. BB_1, so dass PQ parallel zu AB ist. Es sei P_1 ein Punkt auf der Geraden PB_1, so dass B_1 im Inneren der Strecke PP_1 liegt und $\sphericalangle PP_1C = \sphericalangle BAC$ gilt. Analog, sei Q_1 ein Punkt auf der Geraden QA_1, so dass A_1 im Inneren der Strecke QQ_1 liegt und $\sphericalangle CQ_1Q = \sphericalangle CBA$ gilt.

Lösung: Alle Winkel im Folgenden seien orientiert. Es bezeichnen A_2 und B_2 die Schnittpunkte von den Geraden AA_1 bzw. BB_1 mit dem Umkreis von ABC. Wegen

$$\sphericalangle QPA_2 = \sphericalangle BAA_2 = \sphericalangle BB_2A_2 = \sphericalangle QB_2A_2$$

ist PQA_2B_2 ein Sehnenviereck. Wir bezeichnen seinen Umkreis als ω und zeigen im Folgenden, dass P_1 und Q_1 auf ω liegen, womit die Behauptung gilt.



Wegen

$$\sphericalangle CA_2A_2 = \sphericalangle CA_2A = \sphericalangle CBA = \sphericalangle CQ_1Q = \sphericalangle CQ_1A_1$$

ist auch $CQ_1A_2A_1$ ein Sehnenviereck. Somit erhalten wir

$$\sphericalangle QQ_1A_1 = \sphericalangle A_1Q_1A_2 = \sphericalangle A_1CA_2 = \sphericalangle BCA_2 = \sphericalangle BAA_2 = \sphericalangle QPA_2,$$

und Q_1 liegt somit, wie behauptet, auf ω. Da dies analog auch für P_1 gilt, ist PQP_1Q_1 wie behauptet ein Sehnenviereck.

□

Aufgabe 3: Ein soziales Netzwerk hat 2019 Nutzer, von denen einige paarweise befreundet sind. Immer wenn der Nutzer A mit dem Nutzer B befreundet ist, dann ist auch der Nutzer B mit dem Nutzer A befreundet. Ereignisse der folgenden Art können wiederholt nacheinander stattfinden:

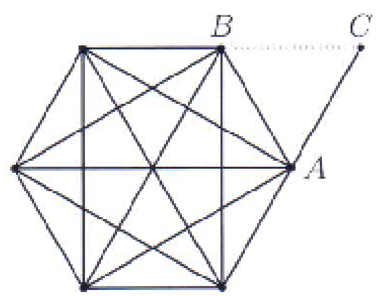
> Drei Nutzer A, B und C, von denen A mit B und C befreundet ist, aber B und C nicht befreundet sind, wechseln den Status ihrer Freundschaften so, dass jetzt B und C befreundet sind, aber A nicht mehr mit B befreundet ist und auch nicht mehr mit C befreundet ist. Der Status aller anderen Freundschaften bleibt unverändert.

Anfangs sind 1010 Nutzer mit jeweils genau 1009 Nutzern befreundet und 1009 Nutzer mit jeweils genau 1010 Nutzern befreundet. Man beweise, dass es eine Folge solcher Ereignisse gibt, nach der jeder Nutzer höchstens mit einem anderen Nutzer befreundet ist.

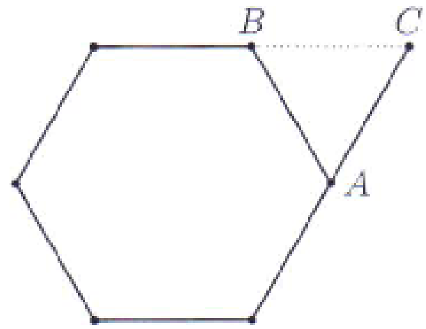
Lösung: Die beschriebene Situation kann auch folgendermaßen untersucht werden. Wir betrachten einen Graphen, dessen Ecken jeweils die Nutzer repräsentieren und dessen Kanten jeweils Freundschafen zwischen diesen repräsentieren. Laut Angabe gibt es dann 2019 Ecken, von denen 1010 mit je genau 1009 durch eine Kante verbunden sind und 1009, die mit je genau 1010 durch eine Kante verbunden sind.

In einem erlaubten Ereignis, werden Ecken A, B und C gefunden, für die gilt, dass A mit B und C verbunden ist, aber B nicht mit C. Beim Ereignis werden die Verbindungen von A zu B und C gelöscht und durch eine neue Verbindung zwischen B und C ersetzt.

Wir bemerken zunächst, dass der Graph offensichtlich nicht vollständig ist, d.h. dass nicht jedes Paar von Ecken durch eine Kante verbunden ist. Diese Eigenschaft bleibt offensichtlich durch jedes Ereignis unverändert. Weiters hat der Ausgangsgraph 1010 Ecken, von denen eine ungerade Anzahl von Kanten ausgehen. Auch diese Eigenschaft bleibt nach jedem Ereignis unverändert, da nach dem Ereignis um zwei Kanten weniger von A ausgehen, aber gleich viele wie zuvor von B bzw. C ausgehen. Die Parität der Kantenzahl in jedem Eck bleibt also stets erhalten.



Ist nun der Graph ein Baum, d.h. enthält er keinen Zyklus unter seinen Kanten, enthält der Graph auch kein Dreieck. Wählen wir als A einen beliebigen Punkt, von dem mehr als eine Kante ausgeht, können wir zwei Kanten durch A beliebig auswählen. Deren Endpunkte B und C sind sicher durch keine Kante verbunden, weil ABC ansonsten ein Dreieck im Graph wäre. Ersetzen wir nun durch ein Ereignis im Graph die Kanten AB und AC durch die Kante BC, enthält der Graph sicher weiterhin keinen Zyklus, da ein Zyklus mit der Kante BC auch durch Ersetzen von BC durch BA und AC ein Zyklus wäre, was aber laut Voraussetzung nicht existiert. Durch das Ereignis wird aber die Gesamtanzahl der Kanten im Graph um 1 reduziert. Führt man also Ereignisse von diesem Ausgangspunkt wiederholt aus, muss einmal ein Zustand erreicht werden, in dem kein Ereignis mehr möglich ist, und dies ist nur der Fall, wenn jedes Eck mit höchstens einem weiteren durch eine Kante verbunden ist. In diesem Fall ist die Gültigkeit der Behauptung also gezeigt.



Es bleibt noch zu zeigen, dass es immer eine Folge von Ereignissen gibt, die einen Graph der gegebenen Art in einen Baum überführen. Zu diesem Zweck genügt es zu zeigen, dass es unter der Voraussetzung, dass der Graph zusammenhängend ist und einen Zyklus enthält, sicher ein Ereignis gefunden werden kann, das den Graph zusammenhängend lässt. Zu diesem Zweck identifizieren wir einen Zyklus Z und Ecken A, B und C, sodass A und B in Z durch eine Kante verbunden sind und C nicht in Z enthalten ist und mit A durch eine Kante verbunden ist, aber nicht mit B. Enthält der Graph ein Dreieck, betrachten wir den größten vollständigen Teilgraphen K, der mindestens drei Ecken enthält. Da der Graph selbst nicht vollständig ist, gibt es ein Eck C, das nicht in K enthalten ist, aber mit einem Eck in A von K durch eine Kante verbunden ist. Da K maximal ist, gibt es ein Eck B in K, das nicht mit C verbunden ist, aber sehr wohl mit A. Z kann also in K beliebig gewählt werden, solang es die Kante AB enthält.

Enthält der Graph kein Dreieck, betrachten wir einen kleinsten Zyklus Z. Dieser kann nicht alle Ecken beinhalten, da der Graph sonst wegen der Minimalität keine weiteren Kanten beinhalten würde, was aber zur Folge hätte, dass von allen Ecken eine gerade Anzahl von Kanten ausgehen würde, was bereits ausgeschlossen wurde. Es muss also ein Eck C geben, dass mit einem Eck A in Z verbunden ist. Dieses Eck ist mit dem Nachbaren B von A sicher nicht verbunden.

Wir sehen also, dass, solange Zyklen im Graph vorhanden sind, immer geeignete Ereignisse gefunden werden können. Da jedes derartige Ereignis die Anzahl der Kanten um 1 reduziert, kann dies nur endlich oft stattfinden und nach einer Folge von derartigen Ereignissen ist also sicher wie behauptet ein Baum erreicht, womit der Beweis fertig ist.

□

Aufgabe 4: Man bestimme alle Paare (k, n) positiver ganzer Zahlen, so dass

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Lösung: Es bezeichne im Folgenden für eine Primzahl p und eine ganze Zahl N der Ausdruck $v_p(N)$ den Exponenten der höchsten Potenz von p, die N teilt und R_n die rechte Seite der gegebenen Gleichung, also

$$R_n = (2^n - 1)(2^n - 2) \dots (2^n - 2^{n-1}).$$

Einerseits gilt

$$R_n = 2^{1+2+\ldots+(n-1}(2^n - 1)(2^{n-1} - 1)\ldots(2^1 - 1),$$

und somit

$$v_2(R_n) = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Andererseits gilt aber

$$v_2(k!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{k}{2^i} \right\rfloor < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k}{2^i} = k.$$

Mit $k! = R_n$ gilt somit sicher

$$\frac{n(n-1)}{2} < k.$$

Um eine Abschätzung in umgekehrter Richtung zu erhalten, bemerken wir, dass

$$R_n = (2^n - 1)(2^n - 2)\ldots(2^n - 2^{n-1}) < (2^n)^n = 2^{n^2}$$

gilt. Nun gilt aber für $n \geq 6$

$$2^{n^2} < \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!.$$

Um dies zu zeigen, bemerken wir für $n = 6$, dass

$$2^{6^2} = 2^{36} = (2^3)^{12} = 8^{12} < 10^{12}$$

und

$$\left(\frac{6 \cdot 5}{2}\right) = 15! = 1355826528000 > 10^{12}$$

gilt, und für $n \geq 7$, dass

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)! &= 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\
&> 2^{36} \cdot 16^{\frac{n(n-1)}{2} - 15} \\
&= 2^{2n(n-1)-24} \\
&= 2^{n^2} \cdot 2^{n(n-2)-24} \\
&> 2^{n^2}
\end{aligned}$$

gilt. Es folgt somit für $n \geq 6$

$$R_n < 2^{n^2} < \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)! < k! = R_n,$$

was ein Widerspruch ist. Es gibt also keine Lösungen für $n \geq 6$.

Die kleineren Fälle können nun einzeln überprüft werden, und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
n = 1: &\quad R_1 = 1 = 1! \\
n = 2: &\quad R_2 = 6 = 3! \\
n = 3: &\quad 5! < R_3 = 168 < 6! \\
n = 4: &\quad 7! < R_4 = 20160 < 8!, \text{ und} \\
n = 5: &\quad 10! < R_5 = 9999360 < 11!
\end{aligned}
$$

Die einzige Lösungen für (k, n) sind also

$$(1, 1) \quad \text{und} \quad (3, 2).$$

$\square$

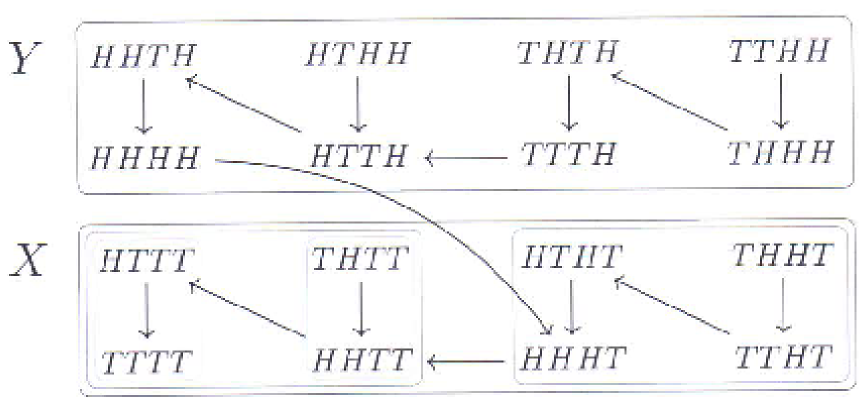
Aufgabe 5: Die Bank of Bath prägt Münzen mit einem H auf der einen Seite und einem T auf der anderen. Harry hat n dieser Münzen von links nach rechts aufgereiht. Er führt wiederholt die folgende Operation durch: Zeigen genau $k > 0$ Münzen ein H, dann dreht er die k-te Münze von links um; falls alle Münzen ein T zeigen, hört er auf. Zum Beispiel wäre für $n = 3$ mit Anfangskonfiguration THT der Prozess $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, welcher nach 3 Operationen endet.

(a) Man zeige, dass Harry für jede Anfangskonfiguration nach einer endlichen Anzahl von Operationen aufhört.

(b) Für jede Anfangskonfiguration C sei $L(C)$ die Anzahl der Operationen bis Harry aufhört. Beispielsweise sind $L(THT) = 3$ und $L(TTT) = 0$. Man bestimme den Durchschnittswert von $L(C)$ über alle 2^n möglichen Anfangskonfigurationen C.

Lösung: Im Folgenden sei $E(n)$ der gesuchte Durchschnittswert der Längen der Zustandsfolgen. Es bezeichne G_n den gerichteten Graphen in dessen Ecken die Münzfolgen der Länge n stehen und dessen gerichtete Kanten von jeder Münzfolge zu deren Nachfolger führt (mit Ausnahme von $TT\ldots T$, das keinen Nachfolger hat). Weiters seien $\overline{H} = T$ und $\overline{T} = H$.

Wir werden eine rekursive Konstruktion der G_n aus den G_{n-1} angeben, mit deren Hilfe wir dann eine Rekursion für $E(n)$ bestimmen können.



Der Graph G_0 besteht aus einem einzige Eck, nämlich der leeren Münzfolge. (Es git also auch $E(0) = 0$.) Nun können wir G_n auf folgende Art von G_{n-1} ausgehend konstruieren.

- Wir nehmen zwei Kopien X und Y von G_{n-1}.
- In X lassen wir jede Münzfolge von G_{n-1} gleich, hängen aber am Ende ein T an. Mit anderen Worten, ersetzen wir
- In Y drehen wir jede Münze einer vorliegenden Münzfolge um, spiegeln die Reihenfolge der Münzen, und hängen am Ende ein H an. Mit anderen Worten, ersetzen wir $s_1 \ldots s_{n-1}$ durch $\overline{s_{n-1}} \ldots \overline{s_1} H$.
- Schließlich ergänzen wir noch eine Kante, die von Y nach X führt, nämlich von $HH \ldots H$ in Y zu $HH \ldots T$ in X.

In der Graphik sehen wir eine Darstellung dieser Konstruktion für G_4.

Es ist also jetzt notwendig zu zeigen, dass diese Konstruktion aus einem Graphen G_{n-1} tatsächlich ein G_n entstehen lässt.

X ist offensichtlich ein korrekter Teil von G_n, da die Operation auf jeder in T endenden Münzfolge gleich ist wie jene, die ohne diesem T stattfindet. Führt $s_1 \ldots s_{n-1}$ zu $t_1 \ldots t_{n-1}$, so fï¿½hrt $s_1 \ldots s_{n-1}T$ sicher auch zu $t_1 \ldots t_{n-1}T$.

Y ist ebenfalls ein korrekter Teilgraph von G_n. Kommt H in der Münzfolge $s_1 \ldots s_{n-1}H$ genau k Mal vor (mit $k > 0$), so kommt H in der Münzfolge $\overline{s_{n-1}} \ldots \overline{s_1} H$ genau $(n-1-k)+1 = n-k$ Mal vor, und wenn $s_1 \ldots s_{n-1}$ zu $t_1 \ldots t_{n-1}$ führt, führt somit auch $\overline{s_{n-1}} \ldots \overline{s_1} H$ zu $t_{n-1} \ldots t_1 H$.

Schließlich führt auch $HH \ldots H$ zu $HH \ldots T$, womit die Verbindungskante von Y zu X ebenfalls korrekt ist.

Da X aus allen möglichen Münzfolgen mit T als letztem Element besteht und Y aus allen mit H als letztem Element, ist somit der resultierende Graph tatsächlich G_n.

Nun nehmen wir an, dass die Durchschnittliche Länge der Zustandsfolgen in G_{n-1} gleich $E(n-1)$ sei. Dies ist dann auch die durchschnttliche Länge der Zustandsfolgen, die in X beginnen. Ebenso ist es die durchschnittliche Länge der Folgen, die ausgehend von einem Eck in Y zu $HH \ldots H$ führen, wonach jede dieser Folgen noch n Schritte bis zum Ende benötigt. Wir erhalten also die Rekursion

$$E(n) = \frac{1}{2} \cdot (E(n-1) + (E(n-1) + n)) = E(n-1) + \frac{n}{2}.$$

Wegen $E(0) = 0$ in G_0 erhalten wir somit induktiv

$$E(n) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = \frac{1}{4} \cdot n(n+1),$$

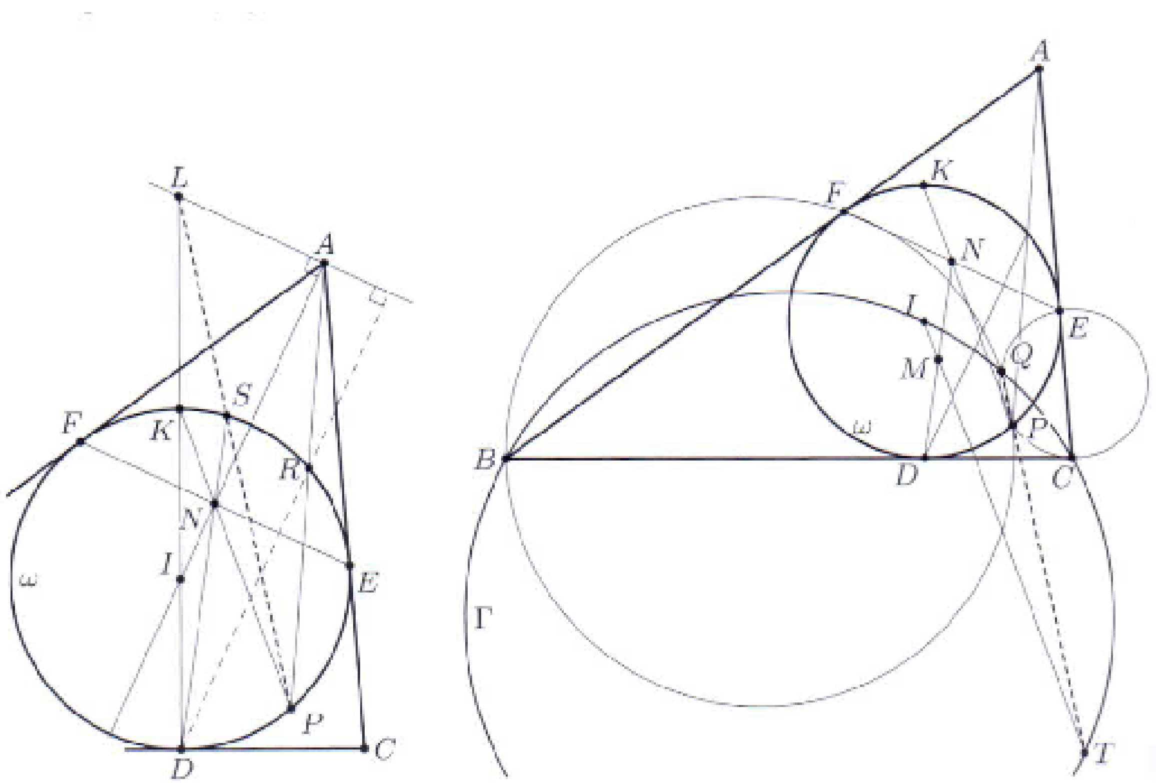
was auch sicher endlich ist, was den Beweis abschließt.

$\square$

Aufgabe 6: Es sei I der Inkreismittelpunkt des spitzwinkligen Dreiecks ABC mit $AB \neq AC$. Der Inkreis ω von ABC berühre die Seiten BC, CA und AB in D, E bzw. F. Die Gerade durch D senkrecht zu EF schneide ω außerdem in R. Die Gerade AR schneide ω außerdem in P. Die Umkreise der Dreiecke PCE und PBF schneiden sich außerdem in Q.

Man beweise, dass sich die Geraden DI und PQ auf der Geraden durch A schneiden, die senkrecht zu AI ist.

Lösung: Im Folgenden bezeichne $\sphericalangle(a, b)$ stets den orientierten Winkel zwischen a und b modulo π.



Schritt 1: Es seien L der Schnittpunkt von DI mit der Normalen zu AI durch A und K der zweite Schnittpunkt von DI mit ω. Weiters sei N der Mittelpunkt von EF, welcher auf IA liegtund der Pol von AL bezüglich ω ist. Da

$$AN \cdot AI = AE^2 = AR \cdot AP$$

gilt, ist $RNIP$ ein Sehnenviereck. Wegen $IR = IP$ ist die Gerade NI Außenwinkelsymmetrale von $\sphericalangle PNR$, und PN schneidet ω somit in einem zweiten Punkt R, der bezüglich AN symmetrisch zu R liegt, also in K.

Nun sei S der zweite Schnittpunkt von DN mit ω. Gegenüberliegende Seiten eines in ω eingeschriebenen Vierecks schneiden einander auf der Polaren bezüglich ω zum Diagonalenschnittpunkt. Da L auf der Polaren AL zu N bezüglich ω liegt, geht die Gerade PS sicher durch L. Es genügt also, um die Behauptung dieser Aufgabe zu zeigen, nachzuweisen, dass S, Q und P auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Schritt 2: Es sei Γ der Umkreis von $\triangle BIC$. Es gilt

$$\sphericalangle(BQ, QC) = \sphericalangle(BQ, QP) + \sphericalangle(PQ, QC) = \sphericalangle(BF, FP) + \sphericalangle(PE, EC) =$$

$$=\sphericalangle(EF,EP)+\sphericalangle(FP,FE)=\sphericalangle(FP,EP)=\sphericalangle(DF,DE)=\sphericalangle(BI,IC),$$

und Q liegt somit sicher auf Γ. Nun sei T der zweite Schnittpunkt von QP mit Γ. Es genügt zu zeigen, dass S, P und T auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Es gilt

$$\sphericalangle(BI,IT]=\sphericalangle(BQ,QT)=\sphericalangle(BF,FP)=\sphericalangle(FK,KP).$$

Wegen $FD \perp FK$ und $FD \perp BI$ gilt $FK \| BI$, und IT liegt somit parallel zur Geraden KNP. Wegen $DI = IK$ halbiert IT somit die Strecke DN im Mittelpunkt M.

Schritt 3: Es seien F' und E' die Mittelpunkte von DE bzw. DF. Wegen

$$DE' \cdot E'F = DE'^2 = BE' \cdot E'I$$

liegt E' auf der Potenzgerade von ωund Γ. Analog gilt dies auch fï¿$\frac{1}{2}$r F' und $E'F'$ ist somit die Potenzgerade und diese geht durch den Punkt M. Es gilt daher

$$IM \cdot MT = DM \cdot MS,$$

und $SIDT$ ist daher ein Sehnenviereck. Daraus folgt

$$\sphericalangle(DS,ST)=\sphericalangle(DI,IT)=\sphericalangle(DK,KP)=\sphericalangle(DS,SP),$$

und S, P und T liegen somit auf einer gemeinsamen Geraden, woraus wie behauptet folgt, dass sich DI und PQ in L schneiden.

$\square$