Blatt 2 2019 United Kingdom

Geretschläger

1) Im Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt von AC. Der Kreis k, der BC in B berührt und durch M geht schneidet die Gerade AB zum zweiten Mal im Punkt P. Beweise $AB \cdot BP = 2BM^2$.

2) An einem runden Tisch sind n Gedecke zum Tee gelegt, und an jedem Platz gibt es ein kleines Stück Kuchen. Alice kommt zuerst an den Tisch, setzt sich und isst ihren Kuchen, der ihr aber nicht gut schmeckt. Darauf kommt der Mad Hatter und sagt Alice, dass es eine sehr einsame Teegesellschaft für sie geben wird, bei der sie immer wieder ihren Platz wechseln muss, und immer den Kuchen am jeweiligen Platz essen, wenn er nicht schon aufgegessen worden ist. Der Mad Hatter ist auch sehr bestimmend, und sagt ihr, dass sie bei ihrem i-ten Umsetzen für $i = 1, 2, \ldots n-1$ sich immer um genau a_i Plätze weitersetzen muss, wobei er ihr eine Liste der Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ in die Hand drückt. Alice mag die Kuchen nicht, und kann mit jedem Mal Umsetzen entscheiden, ob sie sich im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn bewegt. Für welche Werte von n kann es der Mad Hatter erzwingen, dass Alice alle Kuchen aufisst?

3) Es ist bekannt, dass die Zahl

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

für jeden positive ganzen Wert von n eine Quadratzahl ist. Untersuche ob es eine positive ganze Zahl m gibt, sodass

$$(m+1)^3 + (m+2)^3 + \ldots + (2m)^3$$

eine Quadratzahl ist.

4) Es sei f eine reellwertige Funktion, die auf den reellen Zahlen definiert ist. Wir bezeichnen f als *absorbierend*, wenn $f(x) \leq f(y)$ für alle $x \leq y$ gilt und $f^{2018}(z)$ für alle reellen Zahlen z eine ganze Zahl ist.

a) Gibt es eine absorbierende Funktion f, sodass $f(x)$ nur für endlich viele Werte von x ganzzahlig ist?

b) Gibt es eine absorbierende Funktion f und eine monton steigende Folge reeller Zahlen $a_1 < a_2 < \ldots$, sodass $f(x)$ nur dann ganzzahlig ist, wenn $x = a_i$ für irgendein i gilt?

5) Im Dreieck ABC mit $AB = CA$ ist die Seite BC am längsten. Der Punkt n liegt so auf der Seite BC, dass $BN = AB$ gilt. Die Gerade normal zu AB durch N schneidet AB in M. Beweise, dass die Gerade MN sowohl die Fläche als auch den Umfang von ABC halbiert-

6) Wir betrachten Folgen $a_1, a_2, \ldots$ positiver reeller Zahlen mit $a_1 = 1$ und

$$a_{n+1} + a_n = (a_{n+1} - a_n)^2$$

für alle positiven ganzzahligen werte von n. Wie viele Werte gibt es, die a_{2017} annehmen kann?

Blatt 1 2019 Irland

Geretschläger

1) Gegeben sei ein rechtwinkeliges Dreieck ABC mit $\angle BAC = 90°$. Es sei I der Inkreismittelpunkt von ABC und H der Lotfußpunkt von I auf AB. Die Normale zu BC durch H schneide BC in E und die Winkelsymmetrale von $\angle ABC$ in D. Schließlich bezeichnen wir den Lotfußpunkt von A auf BC als F. Beweise $\angle EFD = 45°$.

2) Abigail und Zoe spielen ein Spiel. Abigail wählt zuerst eine ungerade Zahl kleiner als 800 und schreibt sie auf die Tafel. Darauf wählt Zoe eine andere ungerade Zahl kleiner als 1200 und schreibt diese auf die Tafel. Abwechselnd ersetzen sie jetzt ihre Zahl jeweils durch die Differenz ihrer jeweils aktuellen Zahl zur nächstgrößeren Zweierpotenz. Wenn beide im selben Zug 1 anschreiben, endet das Spiel unentschieden; ansonsten verliert diejenige, die als Erste 1 erreicht. Wer hat eine zwingende Gewinnstrategie?

3) Es seien p und q gegebene reelle Zahlen. Beweise, dass es einen Wert $1 \leq x \leq 4$ gibt, sodass

$$\left| px + q + \frac{8}{x} \right| \geq 1$$

gilt.

4) Es liegen die Punkte A, B und P so auf einem Kreis Ω_1, dass $\angle APB$ stumpf ist. Es seien Q der Lotfußpunkt von P auf AB und Ω_2 der Kreis mit Mittelpunkt P und Radius PQ. Die von AB verschiedenen Tangenten von A und B an Ω_2 schneiden Ω_1 in den Punkten F bzw. H. Beweise, dass FH eine Tangente von Ω_2 ist.

5) Eine Folge $\langle x_n \rangle$ ist definiert durch $x_1 = 1$ und $x_n = x_{n-1} + \sqrt{x_{n-1}}$ für $n \geq 2$. Beweise

$$\sum_{n=1}^{2018} \frac{1}{x_n} < 3.$$

6) Bestimme alle Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$, für die

$$f(f(1)) = f(f(0)) = f(f(-1))$$

gilt.

7) Eine Folge $\langle a_n \rangle$ positiver ganzer Zahlen besitzt die Eigenschaft, dass

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2018$$

für alle $n \geq 1$ gilt. Beweise, dass es höchstens einen Index n gibt, für den a_n eine Kubikzahl ist.

Blatt 3   2019   Mongolei

Geretschläger

1) Bestimme alle reellen Polynome P mit der Eigenschaft, dass die Punkte $(x, P(x))$, $(y, P(y))$ und $(z, P(z))$ für alle reellen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 0$ kollinear liegen.

2) Es sei ω ein Kreis und A ein Punkt außerhalb von ω. Seien ferner AB und AC die Tangenten von A an ω und P ein Punkt auf der Verlängerung von AC, jenseits von C. Der Umkreis von ABP scheide ω ein zweites Mal im Punkt E, und Q werde auf der Strecke BP so gewählt, dass $\angle PEQ = \angle APB$ gilt. Beweise $CQ \perp BP$.

3) Es seien $\langle a_n \rangle_{n \geq 1}$ eine Folge positiver ganzer Zahlen und $\langle p_n \rangle_{n \geq 1}$ eine Folge von Primzahlen, sodass

$$p_n | a_n \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{p_n}(p_n^{1000} - 1)$$

gilt. Zeige, dass diese Folge ein durch 2018 teilbares Glied enthalten muss.

4) Es seien ω der Umkreis eines Dreiecks ABC und D ein Punkt auf dem Bogen BC, der nicht A enthält, ungleich dem Mittelpunkt des Bogens. Die Tangente in D schneidet die Gerade BC in K. Eine durch K führende Gerade schneidet ω in den Punkten E und F, und die Strecken AC, AD und AB der Reihe nach in den Punkten N, M und L. Beweise, dass $ML = MN$ gelten muss, wenn gegeben ist, dass $NE = LF$ gilt.

5) Es seien $f(x)$ und $g(x)$ Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten. Es sei für jede positive ganze Zahl n der ggT a_n von $f(n)$ und $g(n)$ kleiner als 2018. Beweise, dass es eine positive ganze Zahl k geben muss, sodass $a_{n+k} = a_n$ für alle n gilt.

6) Ein Quadrupel (a, b, c, d) ganzer Zahlen heißt *gut*, wenn $ad - bc = 2018$ gilt. zwei gute Quadrupel heißen *unähnlich*, wenn eine nicht aus der anderen durch Hintereinaderausführung von endlich vielen der folgenden Operationen erhalten werden kann:

$$(a, b, c, d) \longrightarrow (-c, -d, a, b)$$

$$(a, b, c, d) \longrightarrow (a, b, c + a, d + b)$$

$$(a, b, c, d) \longrightarrow (a, b, c - a, d - b).$$

Zeige, dass jede Menge unähnlicher guter Quadrupel höchstens 3030 Elemente enthalten kann.

7) Es sei D ein Punkt auf der Seite AC eines Dreiecks ABC. Es seien I_1 und I_2 die Inkreismittelpunkte der Dreiecke ABD bzw. BCD. Der Umkreis von BI_1I_2 schneide die Seiten BA und BC in den Punkten X bzw. Y. Beweise

$$AX + CD = CY + AD.$$

Blatt 4 2019 Australien

Geretschläger

1) Für welche ganzen Zahlen $n \geq 2$ ist es möglich, die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ der Reihe nach so anzuschreiben, dass die Differenz aufeinanderfolgender Zahlen immer nur entweder 2 oder 3 ist?

2) Gegeben seien fünf verschiedene ganze Zahlen. Wir betrachten die zehn Differenzen, die von diesen Zahlen bestimmt werden (wovon einige auch gleich sein können). Bestimme die größte Zahl, die das Produkt dieser zehn Zahlen sicher teilt, unabhängig von der Wahl der Ausgangszahlen.

3) Bestimme alle reelle Funktionen f, für die

$$f(x^2 + f(y)) = f(xy)$$

für alle reellen Zahlen x und y gilt.

4) Gegeben seien eine Menge S von 2017 Punkte in der Ebene, die nicht alle kollinear liegen. Beweise, dass es in S drei Punkte gibt, die ein Dreieck bilden, dessen Umkreismittelpunkt nicht in S enthalten ist.

5) Bestimme die Anzahl positiver ganzer Zahlen kleiner als 1000000, für die der Wert des Ausdrucks

$$\frac{1}{2 \cdot \lfloor \sqrt{1} \rfloor + 1} + \frac{1}{2 \cdot \lfloor \sqrt{2} \rfloor + 1} + \frac{1}{2 \cdot \lfloor \sqrt{3} \rfloor + 1} + \ldots + \frac{1}{2 \cdot \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1}$$

ganzzahlig ist.

6) Die Kreise K_1 und K_2 schneiden sich in zwei verschiedenen Punkten A und M. Die Tangente an K_1 in A schneidet K_2 ein zweites Mal in B und die Tangente an K_2 in A schneidet K_1 ein zweites Mal in D. Es sei C der symmetrische Punkt zu M bezüglich A. Beweise, dass $ABCD$ ein Sehnenviereck ist.

7) Ein tausend Sportler stehen in gleichmäßigen Abständen auf einer kreisförmigen, 1 km langen Rennbahn.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Sportler so in 500 Paare aufzuteilen, dass die beiden Sportler eines Paares jeweils längs der Bahn genau 335 m auseinander stehen?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Sportler so in 500 Paare aufzuteilen, dass die beiden Sportler eines Paares jeweils längs der Bahn genau 336 m auseinander stehen?

8) Es sei $f(x) = x^2 - 45x + 2$. Bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 2$, für die genau eine der Zahlen $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ durch n teilbar ist.

Blatt 5 2019 Kroatien

Geretschläger

1) Es seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $a + b + c = 2$. Beweise

$$\frac{(a-1)^2}{b} + \frac{(b-1)^2}{c} + \frac{(c-1)^2}{a} \geq \frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a}\right).$$

2) Es sei n eine positive ganze Zahl. Es sei ein *gutes Wort* eine Folge von $3n$ Buchstaben, in der jede der Buchstaben A, B und C genau n-mal vorkommt. Beweise, dass es zu jedem guten Wort X eine gutes Wort Y mit der Eigenschaft gibt, dass Y aus X nicht erhalten werden kann, indem man weniger als $\frac{3}{2}n^2$ Mal benachbarte Buchstaben tauscht.

3) Es seien k ein Kreis mit Mittelpunkt O, AB ein Sehne des Kreises und M der Mittelpunkt von AB. Die Tangenten von k in A und B schneiden sich in T. Die Gerade ℓ gehe durch T und schneide den kleineren Bogen AB in C und den größeren Bogen AB in D, sodass $BC = BM$ gilt. Beweise, dass des Umkreismittelpunkt von ADM symmetrisch zu O bezüglich AD liegt.

4) Bestimme alle Paare (m, n) positiver ganzer Zahlen mit

$$2^m = 7n^2 + 1.$$

5) Bestimme alle reellen Funktionen, für die

$$f(xf(y)) = (1-y)f(xy) + x^2y^2f(y)$$

für alle reellen Zahlen x und y gilt.

6) Es sei n eine positive ganze Zahl. Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ liegen im Inneren eines Kreises und Punkte $B_1, B_2, \ldots, B_n$ liegen so auf dem Kreis, dass die Strecken $A_1B_1, \ldots, A_nB_n$ paarweise disjunkt sind. Eine Heuschrecke kann genau dann vom Punkt A_i zum Punkt A_j springen, wenn die Gerade A_iA_j keine der Strecken A_kB_k in einem inneren Punkt schneidet. Zeige, dass es der Heuschrecke möglich ist, von jedem Punkt A_i durch eine Folge von Sprüngen zu jedem Punkt A_j zu springen.

7) Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck mit $AB < AC$. Sei D der Mittelpunkt des kürzeren Bogens BC des Umkreises von ABC. Ferner seien I der Inkreismittelpunkt von ABC und J der zu I symmetrische Punkt bezüglich BC. Die Gerade DJ schneide den Umkreis von ABC im Punkt E auf dem kurzen Bogen AB. Beweise $AI = IE$.

8) Es sei n eine positive ganze Zahl. Beweise, dass eine positive ganze Zahl k existiert, sodass $51^k - 17$ durch 2^n teilbar ist.