Spiele (Kombinatorik)

Gewinn- und Verlustpositionen

Wir betrachten Spiele mit folgenden Eigenschaften:

- Es spielen 2 Personen.
- Beide Personen kennen die genaue Situation („perfekte Information“).
- Die Zugmöglichkeiten sind für beide Personen identisch („neutrales Spiel“). Insbesondere gibt es also keine zwei verschiedenen Farben, sondern beide Personen spielen mit denselben Figuren / Gegenständen / Zahlen / ... .
- Die beiden Personen ziehen abwechselnd.
- Das Spiel endet sicher nach endlich vielen Zügen („deterministisch endlich“), und am Ende gewinnt eine Person und die andere verliert, es gibt kein Unentschieden.

(Die folgende Lösungsstrategie lässt sich manchmal in etwas modifizierter Form auch dann anwenden, wenn manche der obigen Bedingungen leicht verletzt sind.)

Solche Spiele lassen sich – eine ausreichend geringe Komplexität des Spiels vorausgesetzt – meist relativ leicht durchanalysieren:

- In jeder Situation hat genau eine der zwei Personen eine Gewinnstrategie.
- In jeder Situation tritt daher genau einer der folgenden zwei Fälle ein:
  - Entweder, die Person, die am Zug ist, hat eine Gewinnstrategie, d.h. egal, wie die andere Person spielt, kann die erste Person immer einen Sieg erzwingen. Eine solche Position nennen wir eine „Gewinnposition“.
  - Oder die andere Person, die als zweites zieht, hat eine Gewinnstrategie, d.h. falls die zweite Person optimal spielt, kann die zuerst ziehende Person nichts dagegen tun, dass sie verliert. Eine solche Position nennen wir (aus Sicht der ersten Person betrachtet) eine „Verlustposition“.
- Wer am Zug ist, möchte erzwingen, dass die andere Person im nächsten Zug vor einer Verlustposition steht – denn im nächsten Zug sind die Rollen vertauscht, und wenn diese Person dann als zweites am Zug ist, sagt die Definition einer Verlustposition ja, dass sie ab dort eine Gewinnstrategie hat.
- Falls die Person am Zug auch nur eine einzige Möglichkeit hat, der anderen Person eine Verlustposition zu überlassen, kann sie diese Möglichkeit spielen. Die aktuelle Position ist daher eine Gewinnposition.
- Hat die Person dagegen nur Züge zur Verfügung, die zu Gewinnposition führen, dann muss sie zwangsläufig der anderen Person eine Gewinnposition überlassen und verliert damit.
- Wir beginnen (meist) beim letzten Zug und arbeiten uns von dort rückwärts, da für jedes mögliche Spielende aus den Regeln klar ist, wer gewonnen und wer verloren hat.

Beispiel 1. Am Tisch liegen 21 Steine. A und B spielen abwechselnd, A beginnt. Wer am Zug ist, nimmt 1 oder 2 Steine. Wer den letzten Stein nimmt, verliert. Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

Lösung. Wenn man an den Zug kommt und nur noch 1 Stein liegt, verliert man, weil man ihn nehmen muss; 1 ist daher Verlustposition. Liegen am Beginn vom Zug 2 Steine, so nimmt man einen und überlässt der anderen Person die Verlustposition 1; daher ist 2 Gewinnposition. Auch bei 3 Steinen gibt es einen legalen Zug zur Verlustposition 1, nämlich zwei Steine zu nehmen; daher ist auch 3 Gewinnposition. Bei 4 Steinen aber führen beide möglichen Züge, nämlich 1 oder 2 Steine zu nehmen, zu Gewinnpositionen, nämlich zu 3 bzw. 2; daher ist 4 eine Verlustposition. Von 5 oder 6 Steinen kann man wieder zu Verlustposition 4 gehen und gewinnt damit, es sind also Gewinnpositionen. Von 7 Steinen muss man zu einer der Gewinnpositionen 5 oder 6 gehen, daher ist 7 eine Verlustposition.

Wir vermuten, dass sich das ab nun wiederholt, und zeigen das durch vollständige Induktion:

Vermutung: Verlustpositionen sind genau jene Positionen, wo die Anzahl der Steine am Beginn des Zuges kongruent 1 modulo 3 ist.

Induktionsbasis: Bis 7 bereits gezeigt, siehe oben.

Induktionsvoraussetzung: Unter den Positionen mit 1, 2, ..., n Steinen sind genau jene kongruent 1 modulo 3 Verlustpositionen, und alle anderen Gewinnpositionen.

Induktionsschritt: Wir müssen zeigen, dass dann auch für $n+1$ die obige Vermutung gilt.

- Falls $n+1$ kongruent 0 modulo 3 ist, ist $n-1$ kongruent 1 modulo 3 und daher laut Induktionsvoraussetzung Verlustposition. Mit dem erlaubten Zug, zwei Steine zu nehmen, können wir dorthin gelangen, daher ist $n+1$ Gewinnposition.
- Falls $n+1$ kongruent 2 modulo 3 ist, ist n kongruent 1 modulo 3 und daher laut Induktionsvoraussetzung Verlustposition. Mit dem erlaubten Zug, einen Stein zu nehmen, können wir dorthin gelangen, daher ist $n+1$ Gewinnposition.
- Falls $n+1$ aber kongruent 1 modulo 3 ist, dann führen die beiden erlaubten Züge zu n oder $n-1$, und diese sind kongruent 0 bzw. 2 modulo 3. Laut Induktionsvoraussetzung sind diese daher beide Gewinnpositionen, und somit $n+1$ eine Verlustposition.

Somit ist die vollständige Induktion abgeschlossen. Die 21 Steine zu Beginn sind kongruent 0 modulo 3 und daher Gewinnposition, also gewinnt A.

Für diesen Nachweis ist es *nicht* erforderlich, die genaue Strategie von A anzugeben, da wir nur aufgefordert wurden zu bestimmen (und zu beweisen), wer von den beiden gewinnt, was äquivalent dazu ist zu bestimmen, ob 21 eine Gewinn- oder Verlustposition ist. In diesem Falle ist es aber einfach, die Strategie explizit anzugeben: Im ersten Zug nimmt A 2 Steine und lässt 19 übrig. Ab dann: Wenn B 1 Stein nimmt, nimmt A danach 2 Steine, und wenn B 2 Steine nimmt, nimmt A 1 Stein. Somit sind nach dem zweiten Zug von A genau 16 Steine übrig, nach dem dritten Zug 13, und so weiter, bis irgendwann nach einem Zug von A genau 1 Stein übrig ist, den B nehmen muss. □

Die folgende aus der obigen Vorgehensweise abgeleitete Erkenntnis kann manchmal nützlich sein:

Lemma 2. *Wenn es einen legalen Zug von einer Position X zu einer anderen Position Y gibt, dann sind X und Y nicht beide Verlustpositionen.*

Beweis. Falls Y Gewinnposition ist, sind wir fertig. Falls Y Verlustposition ist, ist X sicher Gewinnposition, da es von dort den Zug nach Y gibt. (Anmerkung: Es ist durchaus möglich, dass sowohl X als auch Y Gewinnpositionen sind, siehe zum Beispiel Positionen 5 und 6 im vorigen Beispiel.) □

Eine kleine Warnung noch am Rande für Lösungsausarbeitungen: Wenn eine Person A in einer Verlustposition steht, also so oder so verliert, dann ist es mathematisch falsch zu argumentieren, dass sie „optimal“ spielen versucht und daher den „besseren“ Zug wählt mit dem es „länger“ dauert, bis sie verliert – es liegt keine besondere Ehre darin, das unvermeidliche Spielende hinauszuzögern, verloren ist verloren. Die Gewinnstrategie von Person B muss daher auf *alle* möglichen Züge von A reagieren können; wenn man annimmt, dass A auf eine bestimmte Art spielen wird, fehlt ein Teil der Lösung!

Ich wähl mir meine Strategie („Strategiediebstahl“)

Ein überraschendes aus der obigen Methode abgeleitetes Ergebnis zeigt uns, dass wir bei manchen Spielen wissen können, wer gewinnt, ohne die genaue Strategie zu kennen:

Beispiel 3. („Chomp“) Das linke untere Eck einer $m \times n$-Schokoladentafel ist vergiftet. Wer am Zug ist, wählt ein noch vorhandenes Stück Schokolade und beißt das gesamte Rechteck vom gewählten Stück bis zum rechten oberen Eck herunter. Wer das vergiftete Stück essen muss, verliert.

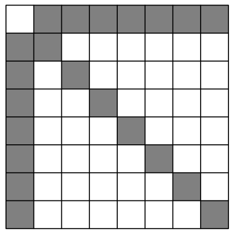
Lösung. Es gewinnt immer die zuerst spielende Person. Nehmen wir an, A beginnt und knabbert nur das eine Stück im rechten oberen Eck herunter. Nun gibt es zwei Fälle: Die verbleibende Situation ist entweder eine Gewinn- oder eine Verlustposition für B. Wenn es eine Verlustposition ist, sind wir fertig.

Wenn es eine Gewinnposition ist, dann hat Person B nach Definition jetzt mindestens einen Zug zur Auswahl, mit dem sie Person A in eine Verlustposition zwingt. Aber: Jeder Zug, den B machen kann, hätte A im ersten Zug bereits machen können (da das rechte obere Eck in jedem Rechteck enthalten ist, das B wählen kann). Also „stiehlt“ Person A diese Strategie, indem sie statt dem schlechten ersten Zug direkt die Antwort von B spielt. □

Verhindere den letzten Zug

Bislang haben wir die Optionen gesehen, entweder für alle Positionen zu bestimmen, ob sie Gewinn- oder Verlustpositionen sind, oder dies über Strategiediebstahl nur für die ersten Züge zu tun. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, es nur für die *letzten* Züge zu betrachten: Es gibt wahrscheinlich nur eine Handvoll von Positionen, von denen aus man das Spiel in einem einzigen Zug beenden und damit gewinnen kann. Wenn Person A es dauerhaft verhindern kann, Person B eine solche Position zu überlassen, dann kann B sicher nicht gewinnen (und je nach Definition des Spiels geht es damit unendlich weiter, endet unentschieden, oder A gewinnt).

Beispiel 4. König und Dame eines Schachspiels diskutieren, wer von ihnen wohl die stärkere Figur ist. Zur Klärung dieser Frage legen sie einen Stein auf das rechte untere Feld eines Schachbretts, und ziehen nun abwechselnd mit diesem Stein. Wenn der König an der Reihe ist, macht er damit einen Königszug, zieht also um ein Feld horizontal, vertikal oder diagonal. Wenn die Dame an der Reihe ist, macht sie einen Damenzug, zieht also beliebig weit horizontal, vertikal oder diagonal. Der König beginnt. Die Dame gewinnt, falls sie den Stein auf das linke obere Feld bewegen kann, und der König, falls er das dauerhaft verhindern kann. Wer von den beiden gewinnt?



Lösung. Falls die Dame gewinnen kann, besteht ihr letzter Zug darin, von einem der in der Abbildung grau markierten Feldern auf das Zielfeld links oben zu fahren. Für den König genügt es daher, den Stein nach seinem Zug nie auf einem solchen Feld stehen zu lassen. Wir können leicht überprüfen, dass es für den König von jedem Feld aus mindestens einen möglichen Zug gibt, der *nicht* auf eines der grau markierten Felder führt (ausgenommen vom Zielfeld selbst aus, das aber nie Startposition von seinem Zug sein kann, da das Spiel da schon zu Ende wäre). Der König kann einen Sieg der Dame daher dauerhaft verhindern. □

Mit den eigenen Waffen schlagen (Symmetrieargumente)

Zuletzt sei noch eine Klasse von Aufgaben betrachtet, wo das Bestimmen aller Gewinn- und Verlustpositionen vielleicht relativ aufwändig ist, aber das Finden einer konkreten Strategie relativ leicht, da man einfach den Zug des Gegners in irgendeiner Form kopiert oder spiegelt.

Ein Beispiel haben wir schon gesehen: In der expliziten Strategie von Beispiel 1 spielt A ab dem zweiten Zug gegengleich zu B, d.h. wenn A zwei Steine nimmt, nimmt B einen Stein, und umgekehrt.

Beispiel 5. Alice und Bob setzen abwechselnd Steine auf ein Schachbrett, wobei Alice beginnt. Dabei darf niemals ein Stein waagrecht oder senkrecht direkt neben einen anderen gesetzt werden oder in dasselbe Feld gesetzt werden. Wer keinen Stein mehr setzen kann, verliert. Zeige, dass Bob immer gewinnen kann, egal, was Alice macht.

Lösung. Bob spielt punktsymmetrisch um den Mittelpunkt des Schachbretts: Auf jeden Zug von Alice reagiert er, indem er einen Stein auf das genau gegenüberliegende Feld (gespiegelt am Mittelpunkt) legt. Nach jedem Zug von Bob ist das Brett daher wieder punktsymmetrisch um den Mittelpunkt. Das Feld, auf das Bob legen möchte, ist ist sicher frei und erlaubt, da auch das Feld, auf das Alice gesetzt hat, frei und erlaubt war, und vor Alices Zug alles punktsymmetrisch war. Daher kann Bob immer ziehen. Das Spiel endet aber sicher irgendwann, deswegen muss es Alice sein, der die Zugmöglichkeiten ausgehen. □

Beispiel 6. Am rechten unteren Feld eines Schachbretts steht ein Stein, mit dem Alice und Bob abwechselnd ziehen, wobei Alice beginnt. Wer am Zug ist, zieht den Stein entweder beliebig viele Felder weit nach oben oder beliebig viele Felder weit nach links. Es gewinnt, wer auf das linke obere Eck zieht. Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

Lösung. Wenn Alice um x Felder nach links zieht, zieht Bob um x Felder nach oben, und umgekehrt. Nach jedem Zug von Bob steht der Stein daher auf der Diagonale von links oben nach rechts unten, wogegen Alice ihn von dieser Diagonale immer wegbewegen muss. Das Spiel endet sicher, und da Alice das Zielfeld nie erreichen kann, ist es sicher Bob, der den Stein dorthin bewegt. □