Schubfachschluss (Pigeonhole Principle)

Einfachste Variante

Satz 1. *Werden $n+1$ (oder mehr) Objekte auf n Schubfächer verteilt, so enthält mindestens ein Schubfach mindestens zwei Objekte.*

Beispiel 2. Im Konferenzzimmer gibt es 50 Postfächer, und an der Schule unterrichten derzeit 53 Lehrerinnen und Lehrer. Dann gibt es unter ihnen mindestens zwei, die sich ein Postfach teilen müssen.

- *Gibt es sicher ein zweites Postfach, das von zwei Personen geteilt wird?*
  Kann sein, muss aber nicht: Es könnte ja auch sein, dass gleich 4 Personen sich ein Postfach teilen und alle anderen einzeln belegt sind.
- *Gibt es sicher ein Postfach, das von mehr als 2 Personen geteilt wird?*
  Kann sein, muss aber nicht: Sowohl die im vorigen Punkt geschilderte Verteilung, als auch zum Beispiel eine mit 3 doppelt und 47 einfach belegten Fächern ist möglich.
- *Kann es ein Postfach geben, das leersteht?*
  Kann sein, muss aber nicht: Neben den schon betrachteten konkreten Verteilungen wäre zum Beispiel auch möglich, dass alle 53 Personen sich ein und dasselbe Postfach teilen, und 49 Fächer leerstehen. (Soziologisch wohl unwahrscheinlich, mathematisch aber möglich.)

Der Schubfachschluss ist also eine relativ schwache Aussage, die uns einzig und allein *nur* die Existenz eines *einzigen* solchen Schubfachs garantiert.

Damit sie wirklich nützlich für den Bewerb wird, muss man sie daher geschickt anwenden, wozu man zuerst einmal die Schubfächer und die Objekte identifizieren muss – was oft ganz schön gefinkelt sein kann.

Verallgemeinerte Variante

Satz 3. *Werden $kn+1$ (oder mehr) Objekte auf n Schubfächer verteilt, so enthält mindestens ein Schubfach mindestens $k+1$ Objekte.*

Beispiel 4. Zur Klassensprecher*innenwahl treten 3 Personen an. Es werden 29 Stimmen abgegeben. Man zeige: Mindestens ein Kandidat oder eine Kandidatin hat mindestens 10 Stimmen erhalten.

Lösung. Entweder über Widerspuch (wie man auch Satz 3 beweisen würde): Nehmen wir an, alle Kandidat*innen hätten 9 oder weniger Stimmen bekommen. Dann wären in Summe maximal 27 Stimmen abgegeben worden, Widerspruch.

Oder durch Anwendung von Satz 3: Es werden (sogar mehr als) $9 \cdot 3 + 1 = 28$ Stimmen auf 3 Personen verteilt, daher erhält mindestens eine davon mindestens $9 + 1 = 10$ Stimmen. □

Umkehrung

Beispiel 5. In einer Lade befinden sich 19 rote, 23 gelbe, 12 grüne und 14 blaue Buntstifte. Damit es zu keinem Streit kommt, möchte Markus jedem seiner drei Kinder einen Buntstift in derselben Farbe geben. Wie viele Buntstifte muss er (blind) mindestens aus der Lade ziehen, um mindestens drei gleichfarbige Buntstifte zu erhalten?

Lösung. Hier haben wir die Anzahl der Schubfächer (4 Farben $= n$) und die Anzahl der gewünschten Elemente (3 Stifte $= k + 1$) gegeben, und werden nach der mindestens benötigten Anzahl zu verteilender Elemente (Stifte) gefragt. Bei 8 Stiften wäre es im ungünstigsten Fall noch möglich, jede Farbe genau zwei Mal erwischt zu haben. Unter $kn + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$ Stiften kommt laut Schubfachschluss aber mindestens eine der vier Farben mindestens drei Mal vor. □

Geschickt gewählte Gruppen

Oft ist es nützlich, scheinbar verschiedene Objekte zu Gruppen zusammenzufassen. Einige Beispiele:

Beispiel 6. Man zeige: Wählt man zufällig 6 verschiedene Zahlen aus der Menge $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ aus, so befinden sich darunter mindestens zwei Zahlen, deren Summe gleich 11 ist.

Lösung. Aus mindestens einer der 5 Gruppen $\{1,10\}$, $\{2,9\}$, $\{3,8\}$, $\{4,7\}$ oder $\{5,6\}$ müssen mindestens zwei, also beide, Elemente gewählt werden, deren Summe daher 11 ergibt. □

Beispiel 7. Man zeige: Unter $n+1$ Zahlen aus der Menge $\{1,2,3,\ldots,2n\}$ befinden sich mindestens zwei Zahlen, die teilerfremd sind.

Lösung. Wir nutzen aus, dass aufeinanderfolgende Zahlen sicher teilerfremd sind, und zerteilen die Menge $\{1,2,3,\ldots,2n\}$ in n Gruppen $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, …, $\{2n-1,2n\}$. Da $n+1$ Zahlen gewählt werden, werden aus mindestens einer dieser n Gruppen mindestens 2 Zahlen gewählt, die daher teilerfremd sind. □

Beispiel 8. Man zeige: Unter $n+1$ Zahlen aus der Menge $\{1,2,3,\ldots,2n\}$ befinden sich mindestens zwei Zahlen, von denen eine die andere teilt.

Lösung. Jede Zahl x kann eindeutig dargestellt werden als $x=2^k\cdot m$ mit einer ganzen Zahl $k\geq 0$ und einer ungeraden ganzen Zahl m (d.h. k ist die Vielfachheit von 2 in der Primfaktorenzerlegung von x, und m ist der größte ungerade Teiler).

Wir fassen aus der Menge $\{1,2,3,\ldots,2n\}$ jeweils Zahlen mit demselben größten ungeraden Teiler m zu einer Gruppe zusammen, d.h. wir erhalten Gruppen $M_1=\{1,2,4,8,\ldots\}$, $M_3=\{3,6,12,24,\ldots\}$, $M_5=\{5,10,20,40,\ldots\}$ et cetera, bis hin zu $M_{2n-1}=\{2n-1\}$. Jede Zahl aus einer solcher Gruppe ist durch jede andere Zahl aus derselben Gruppe teilbar.

Da es genau n solche Gruppen gibt (M_1, M_3, …, M_{2n-1}), müssen bei der Auswahl von $n+1$ Zahlen mindestens zwei davon aus derselben Gruppe kommen, und somit eine die andere teilen. □

Unendlich viele Tauben in endlich vielen Fächern

Satz 9. *Werden unendlich viele Objekte auf endlich viele Schubfächer verteilt, so enthält mindestens ein Schubfach unendlich viele Objekte.*

Beweis. Sei n die (endliche) Anzahl der Schubfächer. Nehmen wir an, jedes Schubfach enthält nur endlich viele Objekte, und sei a_i die Anzahl der Objekte im i-ten Schubfach. Unter den endlich vielen endlichen Zahlen $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ gibt es eine größte, d.h. es gibt eine endliche Zahl A, sodass $a_i\leq A$ für alle $1\leq i\leq n$.

Daher enthalten die Schubfächer in Summe höchstens $n\cdot A$ Objekte, ein Widerspruch zur unendlichen Anzahl der Objekte.

(Man könnte auch etwas kürzer schon als bekannt voraussetzen, dass eine Summe von endlich vielen endlichen Zahlen endlich ist.) □

Beispiel 10. Auf jedem Feld eines 100×100-Schachbretts ist ein Pfeil, der nach oben, unten, links oder rechts zeigt. Das gesamte Schachbrett ist von einer Mauer umgeben, bis auf den linken Rand des obersten linken Feldes. Eine Ratte beginnt auf einem beliebigen Feld. In jedem Zug bewegt sie sich um ein Feld in Pfeilrichtung, danach dreht sich der Pfeil, von dem sie gestartet ist, um 90° im Uhrzeigersinn. Falls der Ratte in die gewünschte Richtung keine Bewegung möglich ist, bleibt sie stehen, der Pfeil unter ihr dreht sich aber trotzdem. Man zeige, dass die Ratte irgendwann das Schachbrett verlässt.

Lösung. Nehmen wir an, die Ratte wäre für immer gefangen, dann betritt sie mindestens eines der (endlich vielen) Felder unendlich oft. Da der Pfeil sich dreht, betritt sie dann auch jedes Nachbarfeld davon unendlich oft, und damit weiters auch deren Nachbarfelder und so weiter. Also betritt sie jedes Feld unendlich oft, insbesondere auch das Feld links oben – das sie aber spätestens beim vierten Betreten verlassen kann. □