Warum Außenseiter interessant sind

Einige einfache Aufgaben und Lösungen zum **Extremalprinzip**

Theorie

Satz 1. *Jede endliche (nichtleere) Menge reeller Zahlen hat ein größtes und ein kleinstes Element.*

Nützliche Anwendungen dieser Theorie

Korollar 2. *Jede endliche (nichtleere) Menge von Dingen enthält ein Ding, für das eine betrachtete Eigenschaft am größten oder am kleinsten ist. (Gegebenenfalls können auch mehrere Dinge ex aequo den kleinsten oder größten Wert annehmen.)*

Einige Beispiele:

- In jeder Schulklasse gibt es eine jüngste und eine älteste Person.
- In jeder Stadt gibt es ein höchstes Gebäude.
- In jeder Bücherei gibt es ein dünnstes Buch.
- In jeder endlichen Menge von Punkten gibt es einen linkesten Punkt.

Man kann auch etwas kompliziertere Eigenschaften betrachten und wird trotzdem Dinge finden, für die diese am größten oder am kleinsten sind, solange nur die betrachtete Menge endlich ist:

- In jedem Land gibt es ein Haus, das am weitesten vom nächsten Haus entfernt ist.
  - Endliche Menge: Alle Häuser des Landes.
  - Betrachtete Eigenschaft: Abstand zum nächsten Haus.
- In jeder endlichen Menge von Punkten gibt es zwei, deren Abstand am kleinsten/größten ist.
  - Endliche Menge: Alle Paare von Punkten aus der Menge ($\binom{n}{2}$ Elemente).
  - Betrachtete Eigenschaft: Abstand der Punkte im Paar.
- In jeder endlichen Menge von Punkten gibt es drei, die das Dreieck mit dem kleinsten Umfang bilden.
  - Endliche Menge: Alle Tripel von Punkten aus der Menge ($\binom{n}{3}$ Elemente).
  - Betrachtete Eigenschaft: Umfang des von diesen Punkten gebildeten Dreiecks.
- Unter allen Möglichkeiten, die 50 Bundesstaaten der USA auf zwei Präsidentschaftskandidaten aufzuteilen (wobei jeder Staat eine bestimmte Anzahl von Stimmen hat und entweder alle Stimmen dem einen oder alle dem anderen Kandidaten gibt), gibt es eine, für die das Endergebnis am knappsten ist.
  - Endliche Menge: Alle Möglichkeiten, die 50 Staaten in zwei Gruppen aufzuteilen (2^{50} Elemente).
  - Betrachtete Eigenschaft: Differenz zwischen der Anzahl der Stimmen der beiden Gruppen.

Das **Extremalprinzip** ist eine Taktik zur Lösung mathematischer Aufgaben, die darauf beruht, jedem Element eine Zahl so geschickt zuzuschreiben, dass das Element mit der kleinsten bzw. der größten Zahl irgendwelche nützlichen Eigenschaften zur Lösung der Aufgabe hat.

Die folgende kleine Abwandlung ist noch für natürliche Zahlen nützlich, um auch zumindest manche unendlichen Mengen mit dieser Methode behandeln zu können:

Satz 3. *Jede (nicht-leere) Menge natürlicher Zahlen hat ein kleinstes Element (aber nicht zwingend ein größtes).*

Aufgaben

Anmerkung: In allen Aufgaben steht n für eine beliebige natürliche Zahl, und Schulklassen, Gruppen von Rittern, ... werden als endliche Mengen angenommen.

1. Man zeige: Jedes konvexe Polyeder (mit endlich vielen Seiten) hat zwei Seitenflächen mit derselben Anzahl von Kanten.

2. In einer Schulklasse gelte folgende Eigenschaft: Je zwei Personen mit der gleichen Anzahl von Freunden in der Klasse haben keinen gemeinsamen Freund in der Klasse. (Freundschaften sind immer gegenseitig, und es gibt in der Klasse mindestens eine Freundschaft.) Man zeige: Es gibt eine Person mit genau einem Freund.

3. Die Ritter der Tafelrunde sitzen um einen runden Tisch. Jeder hat einige ausgetrunkene Gläser Bier vor sich stehen, wobei jeder genau so viel getrunken hat wie der Durchschnitt seiner beiden Sitznachbarn. Man zeige: Alle Ritter haben gleich viel getrunken.

4. Jeder Gitterpunkt der Ebene wird mit einer positiven ganzen Zahl beschriftet, und zwar so, dass jede dieser Zahlen das arithmetische Mittel der vier Nachbarzahlen ist. Man zeige, dass alle Zahlen gleich sind. (Gitterpunkte sind alle Punkte mit ganzzahligen Koordinaten.)

5. In der Ebene liegen $2n+2$ Punkte, sodass keine drei auf einer Geraden liegen. Man zeige, dass man eine Gerade durch zwei dieser Punkte legen kann, die die anderen $2n$ Punkte in zwei Gruppen mit je n Punkten teilt.

6. Von $2n+3$ Punkten in der Ebene seien keine drei kollinear und keine vier liegen auf einem Kreis. Man zeige, dass es einen Kreis durch drei dieser Punkte gibt, in dessen Inneren genau n der übrigen Punkte liegen.

7. Sei M eine Menge von Punkten in der Ebene. Für je zwei Punkte in M liegt der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke dieser Punkte wieder in M. Man zeige, dass M unendlich viele Punkte enthält.

8. Es seien n Punkte in der Ebene gegeben. Je drei von ihnen bilden ein Dreieck, dessen Fläche kleiner oder gleich 1 ist. Man beweise: Es gibt ein Dreieck mit der Fläche 4, das alle n Punkte enthält.

9. In der Ebene seien n verschiedene Punkte $H_1, \ldots, H_n$ (Häuser), sowie n andere Punkte $B_1, \ldots, B_n$ (Brunnen) gegeben. Keine drei von diesen $2n$ Punkten sind kollinear. Man zeige, dass man jedes Haus mit jeweils einem Brunnen so durch eine gerade Strecke verbinden kann, dass sich diese Strecken nicht schneiden.

10. In der einklassigen Raacher Volksschule hat jedes Kind höchstens drei Feinde. Man beweise, dass man die Kinder der Schule so in zwei Klassen einteilen kann, dass jedes Kind in seiner Klasse höchstens einen Feind hat.

11. Eine Klasse hat eine ungerade Anzahl von Kindern, und diese machen eine Schneeballschlacht. Jedes Kind stellt sich irgendwo am (konvexen, baumfreien) Schulhof auf, wobei keine zwei Abstände zwischen Kindern genau gleich sind. Dann formt jedes Kind genau einen Schneeball und schießt damit auf das Kind, das ihm am nächsten ist (und trifft). Man zeige: Es gibt ein Kind, das von keinem Schneeball getroffen wird.

12. Man zeige: Bei der Schneeballschlacht aus der vorigen Aufgabe wird kein Kind von mehr als 5 Schneebällen getroffen.

13. Man zeige: Es gibt keine positiven natürlichen Zahlen a, b, c und d mit $a^2 + b^2 = 3 \cdot (c^2 + d^2)$.

14. Man bestimme alle positiven reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$a + b = c^2 \qquad b + c = d^2 \qquad c + d = e^2 \qquad d + e = a^2 \qquad e + a = b^2$$

15. Man zeige: In jedem konvexen n-Eck ($n \geq 3$) gibt es drei aufeinanderfolgende Eckpunkte, deren Umkreis das gesamte n-Eck überdeckt.

Lösungen

Nachdem das Extremalprinzip ja nun nicht gerade viel Stoff für Theorie bietet, ist es aber umso wichtiger, beim Bewerb die gefundene Lösung gut aufschreiben zu können. Während „laut AM-GM-Ungleichung gilt“ schon relativ genau aussagt, was man gleich tun wird, ist „laut Extremalprinzip gilt“ noch keine sehr genaue Beschreibung – es fehlt die Angabe, *welche* endliche Menge und *welche* Eigenschaft man gerade betrachtet.

In diesem Sinne sind diese Musterlösungen nun einmal bewusst *nicht* lehrbuchhaft geschrieben, sondern entsprechen dem, was man als Schüler*in beim Bewerb so als *Mindestmaß* hinschreiben sollte, um halbwegs vollständige Punkte zu bekommen.

Aufgabe 1. Wir betrachten die Seite S mit den meisten Kanten. Sei k die Anzahl dieser Kanten. Nun schauen wir die k Nachbarflächen von S an. Jede davon hat mindestens 3 Kanten (Dreieck) und höchstens k Kanten (weil S sonst nicht die Seite mit den meisten Kanten wäre). Also muss nach Schubfachschluss (k Nachbarn, aber nur $k-2$ mögliche Werte) unter den Nachbarn eine Kantenanzahl doppelt vorkommen.

Aufgabe 2. Betrachte die Person mit den meisten Freunden, oBdA sei das Willi. Sei k die Anzahl der Freunde von Willi. Je zwei Freunde von Willi müssen laut Angabe eine verschiedene Anzahl von Freunden haben, weil sie ja Willi als gemeinsamen Freund haben. Außerdem hat jeder von ihnen höchstens k Freunde (weil das das Maximum ist) und mindestens einen Freund (Willi). Also muss unter den k Freunden von Willi jede Freundeszahl von 1 bis k vorkommen, insbesondere eben auch 1.

Aufgabe 3. Betrachte den Ritter X, der am meisten getrunken hat. Falls einer seiner Nachbarn weniger getrunken hätte, hätte der andere Nachbar entsprechend mehr trinken müssen, damit X das arithmetische Mittel getrunken hat. Das geht aber nicht, weil er dann ja mehr getrunken hätte als X. Also müssen beide Nachbarn von X genau gleich viel getrunken haben.

Dann haben die Nachbarn ebenfalls (ex aequo) am meisten getrunken, also kann man dasselbe Argument auf diese anwenden, und dann auf deren Nachbarn und so weiter um den ganzen Tisch herum.

Aufgabe 4. Die Menge aller verwendeten Werte enthält nur positive ganze Zahlen, also hat sie ein kleinstes Element. Betrachte einen Punkt X, der diesen kleinsten Wert zugewiesen bekommen hat. Wie bei den Rittern in der vorigen Aufgabe sehen wir, dass dann die vier Nachbarn denselben Wert haben müssen (weil keiner der Nachbarn einen kleineren Wert haben kann und das arithmetische Mittel erfüllt werden muss). Dieses Argument können wir wieder auf die Nachbarn fortsetzen, bis wir die ganze Ebene haben.

(Ganz korrekt: Nehmen wir an, es gibt einen Punkt Y, der einen höheren Wert hat. Dann suche ich den kürzesten Weg (entlang Gitterlinien) von X nach Y, und wende das Argument der Reihe nach auf alle Punkte auf diesem Weg an und sehe, dass Y doch denselben Wert wie X haben müsste, Widerspruch.)

Aufgabe 5. Ich wähle den linkesten Punkt L und beginne mit einer Gerade, die senkrecht nach unten geht. Dann drehe ich die Gerade langsam um L. Am Anfang sind alle Punkte auf derselben Seite, und dann kommt einer nach dem anderen (nie zwei gleichzeitig laut Angabe) auf die anderen Seite (jedes Mal, wenn die Gerade einen Punkt „überfährt“). Das mache ich so lange, bis ich den $n+1$-ten Punkt treffe, dann sind auf jeder Seite n Punkte.

Aufgabe 6. Ich wähle die beiden linkesten Punkte A und B. Für alle anderen Punkte $X_1, \ldots, X_{2n+1}$ bestimme ich die Winkel AX_iB. Diese Winkel sind alle verschieden, weil sonst vier Punkte auf einem Kreis wären (Peripheriewinkelsatz). Also kann ich sie der Größe nach sortieren und wähle denjenigen genau in der Mitte, und zeichne einen Kreis durch A, B und diesen Punkt. Dann sind nach Peripheriewinkelsatz alle Punkte mit größerem Winkel innerhalb, und alle mit kleinerem Winkel außerhalb von dem Kreis.

Aufgabe 7. Nehmen wir an, es gäbe nur endlich viele Punkte. Ich suche die beiden Punkte, die den kleinsten Abstand haben (müssen bei einer endlichen Menge existieren) und nenne sie A und B. Der Mittelpunkt X zwischen diesen liegt wieder in M. Dann wäre der Abstand von X zu A aber noch kleiner $\longrightarrow$ Widerspruch zur Auswahl von A und B.

Aufgabe 8. Unter allen Dreiecken, die man mit 3 Punkten aus der Menge bilden kann ($\binom{n}{3}$ Möglichkeiten), sei ABC das Dreieck mit der größten Fläche. Wir zeichnen durch die drei Eckpunkte jeweils Parallelen zur gegenüberliegenden Seite und erhalten damit ein Dreieck $A'B'C'$, wobei A' gegenüber von A liegt, B' gegenüber von B und C' gegenüber von C (siehe Zeichnung). Die Fläche von $A'B'C'$ ist 4 Mal so groß wie die von ABC, also höchstens 4.

Behauptung: Alle Punkte liegen innerhalb von $A'B'C'$. Beweis: Angenommen, es gäbe einen Punkt X in der Menge, der „oBdA"(*) „oberhalb" von $B'C'$ liegt. Dann hätte ABX die gleiche Grundlinie AB, aber eine größere Höhe als ABC $\longrightarrow$ Widerspruch dazu, dass ABC das größte Dreieck war.

(*) Ich darf „oBdA" verwenden, weil ich, wenn es eine andere Seite wäre, die Punkte A, B und C sowie A', B' und C' einfach zyklisch umbenennen könnte.

Aufgabe 9. Es gibt $n!$ Möglichkeiten, den Häusern Brunnen zuzuordnen. Wir untersuchen die Zuordnung, für die die Summe der Wegstrecken am kleinsten ist. Nehmen wir an, dort würden sich zwei Wege kreuzen. Dann könnte ich die Brunnen-Zuteilungen der zwei beteiligten Häuser austauschen, und erhalte eine Zuordnung mit noch kürzeren Wegen(*), Widerspruch. Also gibt es in der Zuordnung mit den kürzesten Wegen keine Kreuzungen.

(*) In jedem Viereck $ABCD$ sind die Seiten AB und CD zusammen kürzer als die beiden Diagonalen. Beweis: Sei M der Schnittpunkt der Diagonalen, dann ist nach Dreiecksungleichung $AB < AM + BM$ und $CD < CM + DM$, also zusammengezählt $AB + CD < AM + BM + CM + DM = AC + BD$.

Aufgabe 10. Für jede mögliche Klasseneinteilung (es gibt 2^n Einteilungen) zählen wir die Gesamtanzahl der Feindschaften innerhalb der beiden Klassen. Wir wählen die Einteilung mit den wenigsten Feindschaften. Wenn jetzt noch ein Kind zwei Feinde in seiner Klasse hätte, müsste es nur die Klasse wechseln, und die Gesamtzahl der Feindschaften innerhalb der Klassen würde sinken $\longrightarrow$ Widerspruch zur Auswahl der Einteilung. Die Einteilung mit den wenigstens Feindschaften erfüllt also die Bedingung.

Aufgabe 11. Es genügt zu zeigen, dass irgendein Kind mindestens zwei Schneebälle abbekommt, weil dann für ein anderes Kind kein Schneeball mehr übrig ist. Betrachte die beiden Kinder mit dem kleinsten Abstand. Diese beiden schießen aufeinander. Wenn von den restlichen Kindern ebenfalls eines auf eines dieser beiden Kinder schießt, hat dieses zwei Treffer und wir sind fertig. Wenn nicht, dann ignorieren wir diese beiden ab jetzt und betrachten die jetzt um 2 Kinder kleinere Menge (Anzahl wieder ungerade). Dort suchen wir wieder die beiden Kinder mit dem kleinsten Abstand und wiederholen das, so lange bis (falls wir nicht schon vorher ein Kind mit zwei Treffern gefunden haben und abbrechen) nur noch 3 Kinder übrig sind. Von diesen haben wieder zwei den kleinsten Abstand und schießen aufeinander, und das dritte Kind schießt ebenfalls auf eines der beiden und verursacht damit einen zweiten Treffer. Also bekommt immer ein Kind mindestens 2 Treffer.

Aufgabe 12. Wir betrachten das Kind K, das die meisten Schneebälle abbekommen hat. Nehmen wir an, das wären 6 oder mehr gewesen. Wir nummerieren die ersten 6 Schützen im Uhrzeigersinn von A_1 bis A_6. Die Summe der 6 Winkel $\sphericalangle A_1KA_2$, $\sphericalangle A_2KA_3$, $\sphericalangle A_3KA_4$, $\sphericalangle A_4KA_5$, $\sphericalangle A_5KA_6$, $\sphericalangle A_6KA_1$ ist $360°$, also ist mindestens einer davon höchstens $60°$ groß. OBdA(*) sei $\sphericalangle A_3KA_4$ dieser Winkel.

In jedem Dreieck ist der größte Winkel größer oder gleich $60°$. Im Dreieck A_3KA_4 können nicht alle drei Winkel gleich $60°$ sein, sonst wäre es gleichseitig und das geht laut Angabe nicht. Also ist der größte Winkel echt größer als $60°$. OBdA(**) sei der Winkel in A_3 der größte Winkel. (Es kann nicht der Winkel in K sein, weil dieser ja $\leq 60°$ und der größte Winkel $> 60°$ ist.) Dem größten Winkel im Dreieck muss aber die längste Seite gegenüberliegen. Also ist KA_4 die längste Seite im Dreieck. Dann hätte A_4 aber gar nicht auf K schießen dürfen, weil A_3 für ihn näher gewesen wäre. Widerspruch.

(*) Ich darf hier „oBdA" verwenden, weil ich mit der Nummerierung im Uhrzeigersinn bei Bedarf woanders anfangen könnte, damit die beiden Schützen bei diesem Winkel die Nummern A_3 und A_4 bekommen.

(**) Ich darf hier „oBdA" verwenden, weil ich sonst die Beschriftung von A_3 und A_4 vertauschen könnte und das folgende Argument wieder funktioniert.

Aufgabe 13. Angenommen es gäbe Lösungen. Dann gibt es eine Lösung, für die a^2+b^2 am kleinsten ist. (Für jede Lösung ist a^2+b^2 eine natürliche Zahl, und eine Menge von natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element.) Es gilt $a^2+b^2 = 3\cdot(c^2+d^2)$, also ist a^2+b^2 durch 3 teilbar. Da Quadratzahlen modulo 3 nur gleich 0 oder 1 sein können, müssen a und b auch durch 3 teilbar sein, sonst kann die Summe ihrer Quadrate nicht 0 modulo 3 sein. Also gibt es ganze Zahlen x und y mit $a=3x$ und $b=3y$. Dann gilt $a^2+b^2 = (3x)^2+(3y)^2 = 9\cdot(x^2+y^2) = 3\cdot(c^2+d^2)$, und nach Division durch 3 (Äquivalenzumformung) $c^2+d^2 = 3\cdot(x^2+y^2)$. Aber dann wäre (c,d,x,y) eine noch kleinere Lösung $\longrightarrow$ Widerspruch zur Minimalität von a^2+b^2.

Aufgabe 14. Sei (a,b,c,d,e) eine Lösung, und sei x die größte und y die kleinste der Zahlen a, b, c, d und e. Dann folgt aus den Gleichungen $2x \geq x^2$ (wenn man die Zeile anschaut, wo x^2 rechts steht), und $2y \leq y^2$ (in der Zeile mit y^2 auf der rechten Seite). Weil x und y positiv sind, können wir durch sie dividieren und erhalten $2 \geq x$ und $2 \leq y$. Aber x ist die größte und y die kleinste Zahl, also müssen alle 5 Zahlen gleich 2 sein.

Aufgabe 15. Ich betrachte alle Kreise durch drei (nicht notwendigerweise benachbarte) Eckpunkte ($\binom{n}{3}$ Möglichkeiten). Sei der Umkreis von ABC der größte davon. Behauptung: Dieser erfüllt die Bedingung. Beweis:

1) Es liegen alle Eckpunkte innerhalb. Wenn ein Punkt X außerhalb liegen würde, wobei oBdA(*) $ABCX$ in dieser Reihenfolge ein konvexes Viereck sei, dann kann ich die Punkte A und B auf dem Kreis festhalten und den Kreis so lange wachsen lassen, bis er durch X geht, und erhalte einen größeren Kreis durch 3 Punkte, Widerspruch zur Wahl von ABC.

2) Die Punkte A, B und C sind benachbart. Jedes Dreieck hat mindestens 2 spitze Winkel, und ich wähle die Beschriftung so, dass die Seiten AB und BC spitzen Winkeln gegenüberliegen und damit der Umkreismittelpunkt „oberhalb" von ihnen liegt. (Ich vermute also, dass A direkt zu B und B direkt zu C benachbart ist, aber zwischen C und A alle restlichen Punkte liegen.)

Wenn jetzt noch ein Punkt X zwischen A und B oder zwischen B und C liegen würde – oBdA(**) liege X zwischen B und C –, dann wäre der Umkreis von BXC größer als der von ABC (nach Peripheriewinkelsatz, weil der Winkel $\sphericalangle BXC$ größer ist als der Winkel $\sphericalangle BYC$ zu jedem Punkt Y auf dem Umkreis von ABC zwischen B und C).

(*) Ich darf „oBdA" verwenden, weil ich die Beschriftung von A, B und C vertauschen könnte.

(**) Ich darf „oBdA" verwenden, weil ich die Beschriftung von A und C vertauschen könnte.

Eine MEMO-Aufgabe zum Abschluss (MEMO 2013, T-4)

16. Man betrachte endlich viele Punkte in der Ebene, von denen keine drei Punkte auf einer Geraden liegen. Alle diese Punkte können derart rot oder grün gefärbt werden, dass jedes Dreieck mit gleichfarbigen Eckpunkten im Inneren mindestens einen Punkt der anderen Farbe enthält.

    Was ist die größtmögliche Anzahl von Punkten mit dieser Eigenschaft?

Aufgabe 16 (Lösungsskizze)**.** Nehmen wir an, es gäbe eine Punktmenge M mit 9 oder mehr Punkten, die die Bedingung erfüllt. Wir betrachten die (endliche, nicht-leere) Menge aller möglichen Auswahlen von 5 gleichfarbigen Punkten aus M. (Nicht leer, weil mindestens eine Farbe mindestens 5 Punkte hat.) Unter all diesen Auswahlen von 5 Punkten wählen wir diejenige, deren konvexe Hülle die kleinste Fläche hat.

Wenn wir jetzt zeigen können, dass innerhalb dieser konvexen Hülle fünf Punkte der anderen Farbe liegen müssen, haben wir einen Widerspruch zur Auswahl der fünf Punkte und sind fertig.

Noch zu zeigen (und dem geneigten Leser zur Übung überlassen):

- Jede Menge von 5 gleichfarbigen Punkten aus M enthält innerhalb ihrer konvexen Hülle 5 Punkte der anderen Farbe. (Tipps: Fallunterscheidung nach Form der konvexen Hülle (Dreieck, Viereck, Fünfeck), Triangulierung, Dreiecke der zweiten und dadurch weitere Punkte der ersten Farbe innerhalb finden, ...)

- Mit 8 Punkten, je 4 grünen und 4 roten, ist eine Anordnung möglich (Beispiel finden und aufzeichnen).