1. Auf einer Party sind einige Gäste. Wenn zwei Personen einander nicht kennen, haben sie immer genau zwei gemeinsame Freunde. Antonia und Bernadette kennen einander, haben aber keine gemeinsamen Freunde. Man zeige, dass Antonia und Bernadette genau gleich viele Freunde auf der Party haben. (Vorrunde Tschechien und Slovakei Oktober 2011)

2. In einer Schule mit 90 Kindern hat jedes Kind mindestens 30 Freunde. Man zeige, dass es möglich ist, die Kinder so auf drei Klassen zu je 30 Schülern aufzuteilen, dass jedes Kind mindestens einen Freund in seiner Klasse hat. (Tschechien und Slovakei Endrunde 2012)

3. Auf jedem Feld eines Schachbretts sitzen zwei Kakerlaken. Jede Kakerlake kriecht auf ein benachbartes Feld. Dabei kriechen die Kakerlaken, die auf dem gleichen Feld waren, auf verschiedene Felder. Welches ist die maximale Anzahl Felder, die frei werden kann? (Schweiz Finalrunde 2011)

4. Betrachte ein Spielfeld mit ungeraden Seitenlängen, das in Einheitsquadrate aufgeteilt ist. Das Brett wird mit Ausnahme eines Eckfeldes mt Dominosteinen bedeckt. Man kann nun in jedem Zug einen Dominostein in Längsrichtung um ein Feld auf das leere Feld verschieben, sodass stattdessen ein neues Feld (zwei Felder davon entfernt) frei wird. Beweise, dass das leere Feld in jede beliebige Ecke des Brettes verschoben werden kann. (Schweiz IMO-Auswahl 2011)

5. Sei n eine natürliche Zahl. In einem Affenkäfig mit n Affen stehen n Kletterstangen. Damit die Affen etwas Bewegung bekommen, platzieren die Wärter zur Fütterung jeweils eine Banane oben an jeder Stange. Zusätzlich verbinden sie die Stangen mit einer endlichen Anzahl Seilen, sodass zwei verschiedene Seilenden an verschiedenen Punkten festgemacht werden. Wenn ein Affe eine Stange hochklettert und ein Seil findet, kann er nicht widerstehen und wird sich über das Seil hangeln, bevor er seinen Aufstieg fortsetzt. Jeder Affe startet bei einer anderen Stange. Man zeige, dass jeder Affe eine Banane bekommt. (Schweiz IMO-Auswahl 2011)

6. Es sei N eine positive ganze Zahl. Eine Menge $S \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ heißt *erlaubt*, falls sie keine drei paarweise verschiedene Elemente a, b, c enthält, so dass a ein Teiler von b und b ein Teiler von c ist. Man bestimme die größtmögliche Anzahl von Elementen in einer erlaubten Menge S. (MEMO 2012, I-2)

7. Es sei n eine positive ganze Zahl. Man betrachte Wörter der Länge n, die aus Buchstaben aus der Menge $\{M, E, O\}$ bestehen. Es sei a die Anzahl solcher Wörter, die eine gerade Anzahl (möglicherweise 0) von Blöcken ME und eine gerade Anzahl (möglicherweise 0) von Blöcken MO enthalten. Entsprechend sei b die Anzahl solcher Wörter, die eine ungerade Anzahl von Blöcken ME und eine ungerade Anzahl von Blöcken MO enthalten. Man beweise, dass $a > b$ gilt. (MEMO 2012, T-3)

8. Es sei K der Mittelpunkt der Seite AB eines gegebenen Dreiecks ABC. Die Punkte L und M liegen so auf den Seiten AC beziehungsweise BC, dass $\sphericalangle CLK = \sphericalangle KMC$ gilt. Man beweise, dass die Senkrechten zu den Seiten AB, AC und BC durch K, L beziehungsweise M einander in einem gemeinsamen Punkt schneiden. (MEMO 2012, T-5)

9. Man finde alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen mit
$$\begin{aligned} 2x^3 + 1 &= 3zx, \\ 2y^3 + 1 &= 3xy, \\ 2z^3 + 1 &= 3yz. \end{aligned}$$
(MEMO 2012, T-1)

10. Es sei $p > 2$ eine Primzahl. Für jede Permutation $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(p))$ der Menge $S = \{1, 2, \ldots, p\}$ gebe $f(\pi)$ an, wieviele unter den p Zahlen
$$\pi(1),\ \pi(1) + \pi(2),\ \ldots,\ \pi(1) + \pi(2) + \cdots + \pi(p)$$
Vielfache von p sind. Man bestimme den Durchschnittswert von $f(\pi)$, wobei π alle Permutationen von S durchläuft. (MEMO 2012, T-4)