Aufgabe 1. *Wir betrachten die zwei Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ ganzer Zahlen, die durch $a_0 = b_0 = 2$ und $a_1 = b_1 = 14$ und durch*

$$\begin{aligned} a_n &= 14a_{n-1} + a_{n-2}, \\ b_n &= 6b_{n-1} - b_{n-2} \end{aligned}$$

für $n \geq 2$ festgelegt sind.

Man entscheide, ob es unendlich viele Zahlen gibt, die in beiden Folgen vorkommen.

(Gerhard Woeginger)

Antwort. Ja.

Lösung 1. Die ersten paar Zahlen in der Folge (a_n) sind 2, 14, 198, 2 786, 39 202, 551 614. Die ersten paar Zahlen in der Folge (b_n) sind 2, 14, 82, 478, 2 786, 16 238, 94 642, 551 614. Dies führt zur Vermutung $a_{2k+1} = b_{3k+1}$ für $k \geq 0$, die auf vielerlei Arten bewiesen werden kann.

Die Rekursion für (a_n) liefert durch Indexverschiebung die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{n+2} - 14a_{n+1} - a_n &= 0, \\ a_{n+1} - 14a_n - a_{n-1} &= 0, \\ a_n - 14a_{n-1} - a_{n-2} &= 0 \end{aligned}$$

für $n \geq 2$. Wenn wir diese drei Gleichungen der Reihe nach mit 1, 14 bzw. -1 multiplizieren und sie dann addieren, so erhalten wir $a_{n+2} - 198a_n + a_{n-2} = 0$ und daher

$$a_{n+2} = 198a_n - a_{n-2}$$

für $n \geq 2$.

Die Rekursion für (b_n) liefert die fünf Gleichungen

$$\begin{aligned} b_{n+3} - 6b_{n+2} + b_{n+1} &= 0, \\ b_{n+2} - 6b_{n+1} + b_n &= 0, \\ b_{n+1} - 6b_n + b_{n-1} &= 0, \\ b_n - 6b_{n-1} + b_{n-2} &= 0, \\ b_{n-1} - 6b_{n-2} + b_{n-3} &= 0 \end{aligned}$$

für $n \geq 3$. Wenn wir diese fünf Gleichungen der Reihe nach mit 1, 6, 35, 6 bzw. 1 multiplizieren und sie dann addieren, so erhalten wir $b_{n+3} - 198b_n + b_{n-3} = 0$ und daher

$$b_{n+3} = 198b_n - b_{n-3}$$

für $n \geq 3$.

Wir sehen nun, dass die beiden Teilfolgen (a_{2k+1}) und (b_{3k+1}) dieselben Anfangswerte $a_1 = b_1 = 14$ und $a_3 = b_4 = 2\,786$ haben, und dass sie dieselbe Rekursion erfüllen. Das impliziert $a_{2k+1} = b_{3k+1}$ für alle $k \geq 0$.

Die gegebene Rekursion der Folge (a_n) zeigt unmittelbar, dass (a_n) streng monoton wachsend ist. Daher gibt es tatsächlich unendlich viele ganze Zahlen, die in beiden Folgen vorkommen.

(Gerhard Woeginger) □

Lösung 1a.

Lemma 1. Sei $x = (x_n)_{n\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen, die einer homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Ordnung d genügt, sowie m eine positive ganze Zahl und r eine ganze Zahl mit $0 \leq r < m$. Dann genügt auch $(x_{tm+r})_{t\geq 0}$ einer homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Ordnung d.

Beweis. Sei N der Vorwärtsshift in n, also $Nz_n = z_{n+1}$ für eine Folge (z_n) und damit auch $N^j z_n = z_{n+j}$ für ganze Zahlen $j \geq 0$ und allgemeiner $\left(\sum_{j=0}^{\ell} c_j N^j\right) z_n := \sum_{j=0}^{\ell} c_j z_{n+j}$ für alle $\ell \geq 0$, Konstanten c_j für $0 \leq j \leq \ell$ und Folgen (z_n). Man rechnet leicht nach, dass für Polynome f und g und Folgen (z_n) gilt, dass $(f(N) \cdot g(N))z_n = f(N)(g(N)z_n)$.

Laut Voraussetzung gibt es ein normiertes Polynom p vom Grad d, sodass $p(N)x_n = 0$. Schreibt man $p(X) = \prod_{j=1}^{d}(X-\lambda_j)$ für passende λ_j und setzt $q(X) = \prod_{j=1}^{d}(X^m - \lambda_j^m)$, so teilt das Polynom p offensichtlich das Polynom q und daher gilt auch $q(N)x_n = 0$. Nun sind alle Exponenten von N in $q(N)$ durch m teilbar und q hat Grad md. Damit haben wir also eine homogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Ordnung d für $(x_{tm+r})_{t\geq 0}$ erhalten. ∎

Lemma 2. Seien $x = (x_n)_{n\geq 0}$ und $y = (y_n)_{n\geq 0}$ zwei Folgen, die jeweils einer (nicht notwendigerweise derselben) homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Ordnung d genügen. Falls $x_n = y_n$ für $0 \leq n < 2d$ gilt, so gilt $x_n = y_n$ für alle $n \geq 0$.

Beweis. Seien u_j und v_j für $0 \leq j < d$ Konstanten, sodass

$$x_{n+d} = \sum_{j=0}^{d-1} u_j x_{n+j},$$
$$y_{n+d} = \sum_{j=0}^{d-1} v_j y_{n+j}$$

für $n \geq 0$ gilt.

Wir behaupten, dass dann auch

$$y_{n+d} = \sum_{j=0}^{d-1} u_j y_{n+j}$$

für alle $n \geq 0$ gilt. Wir beweisen das durch vollständige Induktion. Für $0 \leq n < d$ gilt das nach Voraussetzung. Für den Schritt von n auf $n+1$ mit $n \geq d-1$ stellen wir zunächst y_{n+1+d} durch die Rekursion für die Folge (y_n) dar und wenden dann die Induktionsvoraussetzung an, sodass wir

$$y_{n+1+d} = \sum_{j=0}^{d-1} v_j y_{n+1+j} = \sum_{j=0}^{d-1} v_j \sum_{k=0}^{d-1} u_k y_{n-d+1+j+k}$$

erhalten; das war möglich, weil $n+1 \geq d$ vorausgesetzt war. Wir vertauschen nun die Summationen und wenden wieder die Rekursion für die Folge (y_n) an und erhalten damit

$$y_{n+1+d} = \sum_{k=0}^{d-1} u_k \sum_{j=0}^{d-1} v_j y_{n-d+1+j+k} = \sum_{k=0}^{d-1} u_k y_{n+1+k},$$

was zu zeigen war.

Damit erfüllen aber beide Folgen dieselbe Rekursion und sind daher wegen des Übereinstimmens von genügend vielen Anfangsgliedern gleich. ∎

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	**2**	**14**	198	**2 786**	39 202	**551 614**	7 761 798	**109 216 786**
b_n	**2**	**14**	82	478	**2 786**	16 238	94 642	**551 614**

n	8	9	10
a_n	1 536 796 802	21 624 372 014	304 278 004 998
b_n	3 215 042	18 738 638	**109 216 786**

Tabelle 1: Aufgabe 1, Lösung 1a, Gemeinsame Werte hervorgehoben

Wir bestimmen die ersten Folgenglieder und erhalten die Werte in Tabelle 1. Wir sehen, dass $a_1 = b_1$, $a_3 = b_4$, $a_5 = b_7$ und $a_7 = b_{10}$. Daher stimmen die beiden Folgen $(a_{2k+1})_{k\geq 0}$ und $(b_{3k+1})_{k\geq 0}$ in den ersten vier Werten überein und genügen nach Lemma 1 jeweils einer homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Ordnung 2. Damit sind diese beiden Folgen nach Lemma 2 gleich.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 1b. Wir geben einen Beweis von Lemma 1 aus Lösung 1a durch ein lineares Gleichungssystem an.

Wir suchen also Konstante u_0, …, u_d, nicht alle 0, sodass $\sum_{j=0}^{d} u_j x_{n+jm} = 0$ für alle $n \geq 0$ gilt. Durch wiederholtes Anwenden der Rekursion für die Folge (x_n) erhalten wir

$$x_{n+jm} = \sum_{k=0}^{d-1} c_{kj} x_{n+k}$$

für passende Konstanten c_{kj} für $0 \leq j \leq d$ und $0 \leq k < d$.

Somit suchen wir u_j für $0 \leq j \leq d$, für die

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^{d} u_j x_{n+jm} \\ &= \sum_{j=0}^{d} u_j \sum_{k=0}^{d-1} c_{kj} x_{n+k} \\ &= \sum_{k=0}^{d-1} x_{n+k} \sum_{j=0}^{d} c_{kj} u_j \end{aligned}$$

für $n \geq 0$ gilt. Das ist sicherlich der Fall, wenn jede der inneren Summen verschwindet, wenn also $(u_0, \ldots, u_d)$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{j=0}^{d} c_{kj} u_j = 0, \qquad 0 \leq k < d,$$

ist. Es handelt sich also um ein homogenes lineares Gleichungssystem in $d+1$ Variablen und d Gleichungen. Nun ist bekannt, dass ein solches Gleichungssystem stets eine Lösung $(u_0, \ldots, u_d) \neq (0, \ldots, 0)$ besitzt.

Bemerkung. Will man den allgemeinen Satz über lineare Gleichungssysteme nicht benutzen, so kann man das Gleichungssystem für Ordnung $d = 2$ als Schnitt von zwei Ebenen interpretieren, die beide den Ursprung enthalten. Da sich zwei Ebenen entweder gar nicht oder mindestens in einer Gerade schneiden, muss es weitere Lösungen außer dem Ursprung geben.

(Theresia Eisenkölbl, Clemens Heuberger) □

Lösung 1c. Wie in Lösung 1 wollen wir zeigen, dass die Folgen $(a_{2k+1})_{k\geq 0}$ und $(b_{3k+1})_{k\geq 0}$ derselben Rekursion genügen.

Wir bezeichnen den Shiftoperator in n wieder mit N. Laut Angabe gilt $(N^2 - 14N - 1)a_n = 0$ für alle n. Damit gilt auch

$$0 = (N^2 + 14N - 1)(N^2 - 14N - 1)a_n = \big((N^2 - 1)^2 - (14N)^2\big)a_n = (N^4 - 198N^2 + 1)a_n$$

für $n \geq 0$. Somit gilt

$$a_{n+4} = 198a_{n+2} - a_n$$

für $n \geq 0$.

Um nun zu zeigen, dass auch

$$b_{n+6} = 198b_{n+3} - b_n \tag{1}$$

für $n \geq 0$ gilt, beobachten wir (beispielsweise durch Division mit Rest), dass

$$N^6 - 198N^3 + 1 = (N^4 + 6N^3 + 35N^2 + 6N + 1)(N^2 - 6N + 1)$$

gilt, woraus (1) angesichts der Rekursion für (b_n) folgt.

Daraus folgt wie in Lösung 1 das Ergebnis.

(Theresia Eisenkölbl, Clemens Heuberger) □

Lösung 2. Die charakteristische Gleichung der ersten Rekursion ist

$$\lambda^2 - 14\lambda - 1 = 0$$

mit den Lösungen $\lambda = 7 \pm \sqrt{50} = 7 \pm 5\sqrt{2} = (1 \pm \sqrt{2})^3$. Durch Ansatz erhält man

$$a_n = (1 + \sqrt{2})^{3n} + (1 - \sqrt{2})^{3n}$$

für $n \geq 0$.

Die charakteristische Gleichung der zweiten Rekursion ist

$$\mu^2 - 6\mu + 1 = 0$$

mit den Lösungen $\mu = 3 \pm \sqrt{8} = 3 \pm 2\sqrt{2} = (1 \pm \sqrt{2})^2$. Durch Ansatz erhält man

$$b_n = (1 + \sqrt{2})^{2n+1} + (1 - \sqrt{2})^{2n+1}$$

für $n \geq 0$.

Wenn $3n = 2m + 1$, so gilt offensichtlich $a_n = b_m$. Da $3n$ für jede ungerade ganze Zahl n in der Form $2m + 1$ dargestellt werden kann, gibt es unendlich viele Paare (n, m) mit $a_n = b_m$.

Die gegebene Rekursion der Folge (a_n) zeigt unmittelbar, dass (a_n) streng monoton wachsend ist. Daher gibt es tatsächlich unendlich viele ganze Zahlen, die in beiden Folgen vorkommen.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 2a. Wenn man in Lösung 2 die Faktorisierungen von $7 \pm \sqrt{50}$ bzw. $3 \pm \sqrt{8}$ nicht findet, so erhält man

$$a_n = (7 + \sqrt{50})^n + (7 - \sqrt{50})^n$$

und

$$b_n = (1 + \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{8})^n + (1 - \sqrt{2}) \cdot (3 - \sqrt{8})^n.$$

Aus den ersten Folgenwerten vermuten wir $a_{2k+1} = b_{3k+1}$ für alle k. Zu zeigen ist also

$$(7+\sqrt{50})^{2k+1} + (7-\sqrt{50})^{2k+1} = (1+\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{8})^{3k+1} + (1-\sqrt{2})\cdot(3-\sqrt{8})^{3k+1}$$

für alle k. Es gilt

$$\begin{aligned}(7\pm\sqrt{50})^{2k+1} &= (7\pm\sqrt{50})\cdot((7\pm\sqrt{50})^2)^k\\ &= (7\pm 5\sqrt{2})\cdot(99\pm 70\sqrt{2})^k\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(1\pm\sqrt{2})\cdot(3\pm\sqrt{8})^{3k+1} &= (1\pm\sqrt{2})\cdot(3\pm\sqrt{8})\cdot((3\pm\sqrt{8})^3)^k\\ &= (7\pm 5\sqrt{2})\cdot(99\pm 70\sqrt{2})^k,\end{aligned}$$

womit die Vermutung bewiesen ist und wie in Lösung 2 das Gewünschte folgt.

(Birgit Vera Schmidt) □

Aufgabe 2. *Es sei ABC ein Dreieck und I sein Inkreismittelpunkt. Der Kreis durch A, C und I schneide die Gerade BC ein zweites Mal im Punkt X, der Kreis durch B, C und I schneide die Gerade AC ein zweites Mal im Punkt Y.*

Man zeige, dass die Strecken AY und BX gleich lang sind.

(Theresia Eisenkölbl)

Lösung 1. Wir zeigen, dass immer $AB = BX$ gilt. Da dann analog auch $AB = AY$ gilt, ist die Behauptung bewiesen. Siehe Abbildung 1.

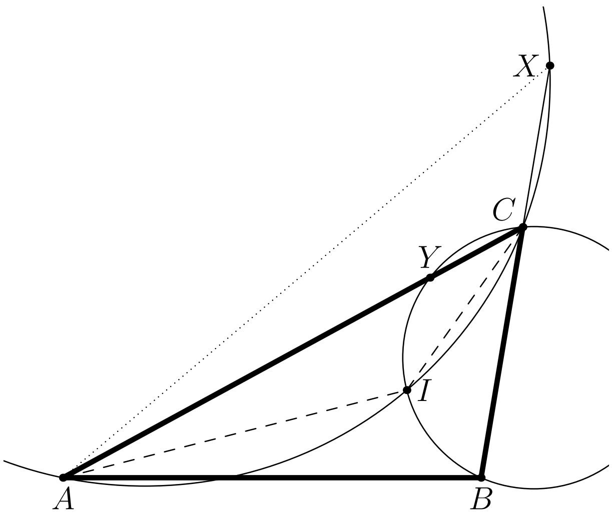

Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 1

Wir verwenden in dieser Lösung gerichtete Winkel zwischen Geraden (modulo 180°) in der Notation $\sphericalangle PQR$ und bezeichnen wie üblich die Winkel des Dreiecks ABC mit $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle CBA$ bzw. $\gamma = \sphericalangle ACB$.

Es gilt unter Verwendung des Peripheriewinkelsatzes:

$$\sphericalangle AXB = \sphericalangle AXC = \sphericalangle AIC = -\sphericalangle CIA = 180^\circ - \sphericalangle CIA = \sphericalangle IAC + \sphericalangle ACI = \frac{1}{2}(\alpha+\gamma).$$

Damit gilt auch

$$\sphericalangle BAX = -\sphericalangle AXB - \sphericalangle XBA = -\frac{1}{2}(\alpha+\gamma) - \beta = \frac{1}{2}(\alpha+\gamma).$$

Also ist das Dreieck ABX gleichschenkelig und somit ist alles bewiesen.

(Theresia Eisenkölbl) □

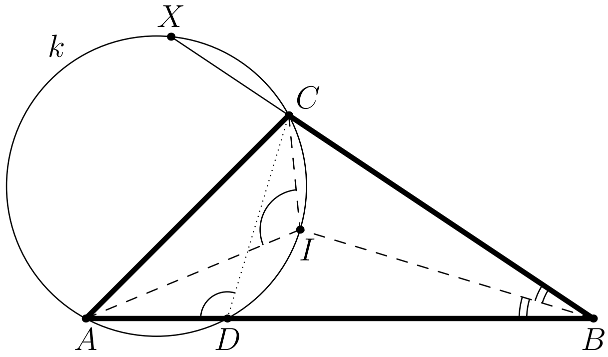

Abbildung 2: Aufgabe 2, Lösung 2

Lösung 2. Seien α, β und γ wie üblich die drei Winkel des Dreiecks ABC. Wir verwenden wie in Lösung 1 gerichtete Winkel zwischen Geraden modulo 180°. Sei D der Punkt auf AB auf derselben Seite von B wie A, für den $BC = BD$ gilt (vgl. Abbildung 2). Es gilt wegen der Gleichschenkeligkeit $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC = 90° - \beta/2 = \alpha/2 + \gamma/2 = \sphericalangle AIC$. Also liegt D auf dem Umkreis von $AICX$ und die Potenz von B an diesem Kreis ist $BD \cdot BA = BC \cdot BX$ und somit $BX = BA$. Analog gilt $AY = AB$, womit alles bewiesen ist.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 3. Wir bezeichnen den zweiten Schnittpunkt von BI mit dem Umkreis k von AIC mit V, siehe Abbildung 3.

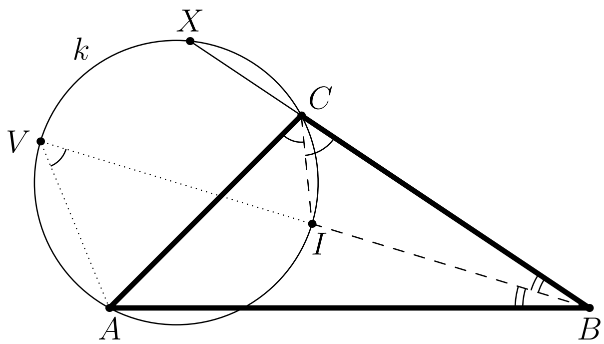

Abbildung 3: Aufgabe 2, Lösung 3

Die Potenz von B bezüglich dieses Umkreises k ist $BC \cdot BX = BI \cdot BV$, wir wollen daher $BX = \frac{BI \cdot BV}{BC}$ bestimmen. Nach Peripheriewinkelsatz über der Sehne AI von k und nach Konstruktion gilt $\sphericalangle BVA = \sphericalangle IVA = \sphericalangle ICA = \sphericalangle BCI$. Nach Konstruktion gilt $\sphericalangle VBA = \sphericalangle CBI$. Daher sind die Dreiecke BVA und BCI ähnlich und es gilt $BV : AB = BC : BI$. Daraus ergibt sich $BX = \frac{BI \cdot BV}{BC} = AB$. Analog gilt $AY = AB$ und daher gilt wie gefordert $BX = AY$.

(Clemens Heuberger) □

Aufgabe 3. *Es sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Ariane und Bérénice spielen ein Spiel auf der Menge der Restklassen modulo n. Zu Beginn steht auf einem Zettel die Restklasse 1. In jedem Spielzug ersetzt die Spielerin, die am Zug ist, die aktuelle Restklasse x entweder durch $x + 1$ oder durch $2x$. Die beiden Spielerinnen wechseln sich ab, wobei Ariane beginnt.*

Ariane hat gewonnen, wenn im Laufe des Spiels die Restklasse 0 erreicht wird. Bérénice hat gewonnen, wenn sie das dauerhaft verhindern kann.

Man bestimme in Abhängigkeit von n, wer von beiden eine Gewinnstrategie hat.

(Theresia Eisenkölbl)

Antwort. Ariane gewinnt für $n = 2$, 4 und 8, für alle anderen $n \geq 2$ gewinnt Bérénice.

Lösung 1. Wir betrachten zuerst einzeln die Fälle $n = 2$, 3, 4, 6 und 8 und zeigen dann, dass Bérénice für alle anderen n gewinnt. Alle Kongruenzen in dieser Lösung sind modulo n zu verstehen.

- Für $n = 2$ geht Ariane im ersten Schritt auf 0 und hat gewonnen.
- Für $n = 3$ geht Ariane im ersten Schritt gezwungenermaßen auf $1+1 = 2 \cdot 1 = 2$, Bérénice kann auf $2 \cdot 2 \equiv 1$ gehen, somit kann Bérénice erzwingen, dass das Spiel immer zwischen 1 und 2 abwechselt und niemals zu 0 kommt. Somit hat Bérénice gewonnen.
- Für $n = 4$ geht Ariane wieder im ersten Schritt auf 2. Bérénice muss nun $2 + 1 = 3$ oder $2 \cdot 2 = 4$ wählen. Wählt sie $4 \equiv 0$, hat sie sofort verloren, wählt sie 3, kann Ariane im nächsten Schritt gewinnen, da sie $3 + 1 = 4 \equiv 0$ wählen kann. Ariane hat also eine Gewinnstrategie.
- Für $n = 6$ gewinnt Bérénice bei optimalem Spiel, da sie mit der Strategie für $n = 3$ bereits vermeiden kann, dass die Zahl jemals durch 3 teilbar ist.
- Für $n = 8$ geht Ariane wieder im ersten Schritt auf 2. Wählt Bérénice 4, kann Ariane sofort mit $8 \equiv 0$ gewinnen. Wählt Bérénice 3, so kann Ariane 6 wählen. Nimmt nun Bérénice 7, hat Ariane mit $7 + 1 = 8 \equiv 0$ gewonnen, wählt Bérénice $2 \cdot 6 = 12 \equiv 4$, so hat Ariane mit $2 \cdot 4 = 8 \equiv 0$ gewonnen. Ariane gewinnt also bei optimalem Spiel.

Sei nun $n \geq 2$ mit $n \neq 2$, 3, 4, 6 oder 8. Ariane gewinnt sicher nicht im ersten Schritt, da $2 \not\equiv 0$ ist. Wenn es Bérénice dauerhaft vermeiden kann, n, $n - 1$ oder $n/2$ (falls n gerade) zu wählen, dann kann Ariane nie gewinnen. Wir müssen also überprüfen, für welche Zahl x auf dem Zettel Bérénice gezwungen ist, danach eine dieser Zahlen zu wählen, weil beide ihrer Möglichkeiten auf dieser Liste sind.

Wenn $x + 1$ kongruent zu einer der Zahlen n, $n - 1$ oder $n/2$ ist, so ist $4x$ kongruent zu -4 oder -8. Wenn $2x$ kongruent zu einer der Zahlen n, $n - 1$ oder $n/2$ ist, so ist $4x$ kongruent zu 0 oder -2. Es können also nur dann beide Optionen ungünstig sein, wenn n eine der Differenzen 2, 4, 6 oder 8 zwischen den beschriebenen Werten für $4x$ teilt. Alle diese Teiler haben wir aber zuvor separat behandelt.

Bérénice ist also für $n \neq 2$, 3, 4, 6 oder 8 niemals gezwungen, selbst 0 zu wählen oder Ariane diese Möglichkeit zu eröffnen, somit kann Ariane für diese Zahlen niemals gewinnen. Die Gewinnstrategie von Bérénice ist also ganz einfach, die Zahlen n, $n - 1$ und $n/2$ zu vermeiden und ansonsten beliebig zu spielen.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 1a. Bérénice verwendet die folgende Strategie. Für $x \neq n - 1$, $n - 2$ oder $n/2 - 1$ verwendet sie $x + 1$, das ist weder 0 noch kann Ariane damit im nächsten Schritt gewinnen.

- Für $x = n - 1$ und $x = n/2 - 1$ verwendet Bérénice $2x$, also in beiden Fällen die Restklasse $n - 2$, das ist aber 0 für $n = 2$ und $n/2$ für $n = 4$, sodass diese Fälle später noch extra behandelt werden müssen. In allen anderen Fällen ist das aber weder 0 noch kann Ariane im nächsten Schritt gewinnen.
- Für $x = n - 2$ verwendet Bérénice wieder $2x$, also die Restklasse $n - 4$, das ist aber 0 für $n = 4$, $n/2$ für $n = 8$ und $n - 1$ für $n = 3$, sodass diese Fälle später noch extra behandelt werden müssen. In allen anderen Fällen ist das aber weder 0 noch kann Ariane im nächsten Schritt gewinnen.

Wie in Lösung 1 sieht man für die verbleibenden Fälle 2, 3, 4 und 8, dass Ariane genau für 2, 4 und 8 gewinnt.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. Wir stellen zunächst fest: Wenn Ariane für ein bestimmtes n gewinnen kann, gewinnt sie auch für alle Teiler von n, und umgekehrt, wenn Bérénice für ein bestimmtes n gewinnen kann, gewinnt sie auch für alle Vielfachen von n, da die Restklasse 0 modulo n automatisch auch 0 für alle Teiler von n ist.

Es reicht also zu zeigen, dass Ariane für $n = 8$ gewinnt und dass Bérénice für $n = 16$ und für ungerades n gewinnt.

Alle Kongruenzen in dieser Lösung sind modulo n zu verstehen.

- Für $n = 8$ geht Ariane im ersten Schritt gezwungenermaßen auf 2. Wählt Bérénice 4, kann Ariane sofort $8 \equiv 0$ wählen und hat gewonnen. Wählt Bérénice 3, so kann Ariane 6 wählen. Nimmt nun Bérénice 7, hat Ariane mit $7 + 1 = 8 \equiv 0$ gewonnen, wählt Bérénice $2 \cdot 6 = 12 \equiv 4$, so hat Ariane mit $2 \cdot 4 = 8 \equiv 0$ gewonnen. Ariane gewinnt also.

- Für $n = 16$ geht Bérénice für alle Zahlen außer 4 und 8 auf $2x$. Das ergibt offensichtlich niemals 0, 15 oder 8, sodass auch Ariane niemals auf 0 gehen kann.

- Für $n = 3$ muss Ariane im ersten Schritt 2 wählen, dann kann Bérénice zurück auf 1 gehen, sodass Bérénice gewinnt.

- Für ungerades $n > 3$ kann 0 niemals mit $2x$ erreicht werden. Das einzige Problem, das für Bérénice auftauchen könnte, ist, dass ihre beiden Optionen n und $n - 1$ sind, sodass entweder sie oder Ariane 0 wählt. Das bedeutet aber für die Restklasse x, die Bérénice ersetzen muss, dass entweder $x+1 \equiv -1$ und damit $2x \equiv -4$, was verschieden von den Klassen 0 und -1 ist, oder $x+1 \equiv 0$ und damit $2x \equiv -2$, was ebenfalls verschieden von den Restklassen 0 und -1 ist. Daher kann Bérénice vermeiden, dass die Restklasse 0 auftaucht.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 4. *Man bestimme alle Paare (a, b) reeller Zahlen, sodass*

$$a \cdot \lfloor b \cdot n \rfloor = b \cdot \lfloor a \cdot n \rfloor$$

für alle positiven ganzen Zahlen n gilt.

(Für eine reelle Zahl x bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.)

(Walther Janous)

Antwort. Die Lösungen sind alle Paare (a, b) mit $a = 0$ oder $b = 0$ oder $a = b$ oder jene, in denen sowohl a als auch b ganzzahlig sind.

Lösung 1. Es seien $a_0 = \lfloor a \rfloor$ und a_i die Binärziffern des Nachkommateils von a, also $a = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$ mit $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_i \in \{0, 1\}$ für $i \geq 1$. In entsprechender Weise soll $b = b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}$ mit $b_0 \in \mathbb{Z}$ und $b_i \in \{0, 1\}$ für $i \geq 1$ sein. Falls die Binärentwicklung nicht eindeutig sein sollte, wählen wir die Entwicklung, die mit unendlich vielen Nullern endet.

Nun setzen wir in der gegebenen Gleichung $n = 2^k$ und $n = 2^{k-1}$ und erhalten

$$a\left(2^k b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i 2^{k-i}\right) = b\left(2^k a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i 2^{k-i}\right),$$

$$a\left(2^{k-1} b_0 + \sum_{i=1}^{k-1} b_i 2^{k-i-1}\right) = b\left(2^{k-1} a_0 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i 2^{k-i-1}\right).$$

Die erste Gleichung für $k = 0$ und die Differenz der ersten Gleichung und der verdoppelten zweiten Gleichung für $k \geq 1$ ergibt

$$ab_k = ba_k \tag{2}$$

für $k \geq 0$.

Wir betrachten im Weiteren drei Fälle. Wenn eine oder beide der Zahlen a und b null sind, dann ist die Originalgleichung klarerweise erfüllt. Wenn beide Nachkommaanteile null sind, dann sind beide Zahlen ganz und die Originalgleichung ist erfüllt. Abschließend betrachten wir den Fall, in dem $a, b \neq 0$ gilt und es für ein $k \geq 1$ eine Ziffer $a_k = 1$ gibt. Die Gleichung (2) zeigt, dass b_k nicht null sein kann, also muss $b_k = 1$ sein. Damit wird die Gleichung zu $a = b$, was natürlich eine Lösung der Originalgleichung ist. Der Fall, dass es ein $b_k = 1$ gibt, verläuft analog.

Damit haben wir genau die Lösungspaare erhalten, die in der Antwort angegeben sind.

Bemerkung. In dieser Lösung wird implizit die allgemein gültige Formel $\lfloor 2^j x \rfloor - 2\lfloor 2^{j-1} x \rfloor$ für die j-te Nachkommastelle einer reellen Zahl x im Binärsystem verwendet.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 1a. Die angegebene Gleichung hat, wie man unschwer überprüft, die in der Antwort zusammengefassten Lösungen.

Wir zeigen nun, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Dafür setzen wir in der angegebenen Gleichung $n = 2^j$ mit $j \geq 0$, also

$$a \cdot \lfloor b \cdot 2^j \rfloor = b \cdot \lfloor a \cdot 2^j \rfloor. \tag{3}$$

Angenommen, (a, b) wäre ein Lösungspaar, das nicht in der Antwort angeführt ist. Es sollen im Weiteren $A = \lfloor a \rfloor$ und $B = \lfloor b \rfloor$ sein.

Wir zeigen nun mit Induktion, dass

$$\lfloor 2^j \cdot a \rfloor = 2^j \cdot A \qquad \text{und} \qquad \lfloor 2^j \cdot b \rfloor = 2^j \cdot B \qquad \text{für } j \geq 0.$$

- Für $j = 0$ ergeben sich $\lfloor a \rfloor = A$, $\lfloor b \rfloor = B$ und mit (3) außerdem $a \cdot B = b \cdot A$.
- Es sollen nun $\lfloor 2^J \cdot a \rfloor = 2^J \cdot A$ und $\lfloor 2^J \cdot b \rfloor = 2^J \cdot B$ für ein $J \geq 0$ gelten.

  Daraus folgen unmittelbar $2^J \cdot A \leq 2^J \cdot a < 2^J \cdot A + 1$ und $2^J \cdot B \leq 2^J \cdot b < 2^J \cdot B + 1$.
- Für den Induktionsschritt ergeben sich daraus $2^{J+1} \cdot A \leq 2^{J+1} \cdot a < 2^{J+1} \cdot A + 2$ und $2^{J+1} \cdot B \leq 2^{J+1} \cdot b < 2^{J+1} \cdot B + 2$, also $\lfloor 2^{J+1} \cdot a \rfloor = 2^{J+1} \cdot A + \alpha$ und $\lfloor 2^{J+1} \cdot b \rfloor = 2^{J+1} \cdot B + \beta$ mit α, $\beta \in \{0, 1\}$, und laut (3) außerdem $a \cdot (2^{J+1} \cdot B + \beta) = b \cdot (2^{J+1} \cdot A + \alpha)$. Wegen $a \cdot B = b \cdot A$ folgt $a \cdot \beta = b \cdot \alpha$. Dies, $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $a \neq b$ ergeben sofort $\alpha = \beta = 0$.

  Damit ist der Induktionsbeweis erbracht.

Wir haben deshalb $2^j \cdot A \leq 2^j \cdot a < 2^j \cdot A + 1$, d.h. $A \leq a < A + \frac{1}{2^j}$, und in entsprechender Weise auch $B \leq b < B + \frac{1}{2^j}$ für $j \geq 0$. Daraus folgen aber $a = A$ and $b = B$, im Widerspruch zur Annahme, es gäbe noch eine weitere Lösung.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Es seien $a = A + x$ und $b = B + y$ mit A, $B \in \mathbb{Z}$ und x, $y \in [0, 1)$. Wegen der Symmetrie der Gleichung dürfen wir o. B. d. A. $y \geq x$ annehmen.

Damit wir uns später weniger Sorgen um Divisionen durch 0 machen müssen, überlegen wir zuerst Folgendes: Im Fall von $x = 0$ in der geforderten Gleichheit folgt für $n = 1$, dass

$$A \cdot \lfloor B + y \rfloor = (B + y) \cdot \lfloor A \rfloor \iff A \cdot B = B \cdot A + y \cdot A \iff Ay = 0.$$

Also muss $A = 0$ oder $y = 0$ gelten. Für $A = 0$ können wir leicht überprüfen, dass $a = A + x = 0$ und b beliebig immer die Gleichung erfüllen. Für $y = 0$ überprüfen wir ebenso leicht, dass alle Paare (a, b) mit a, $b \in \mathbb{Z}$ Lösungen sind. Aus Symmetriegründen ergeben sich auch die Lösungen a beliebig und $b = 0$.

Es soll ab jetzt x, $y > 0$ gelten. Wir setzen zunächst die Ausdrücke für a und b ein und multiplizieren aus:

$$\begin{aligned} & (A+x)\cdot\lfloor n(B+y)\rfloor = (B+y)\cdot\lfloor n(A+x)\rfloor \\ \iff\quad & (A+x)\cdot(Bn+\lfloor ny\rfloor) = (B+y)\cdot(An+\lfloor nx\rfloor) \\ \iff\quad & ABn+Bnx+A\lfloor ny\rfloor+x\lfloor ny\rfloor = ABn+Any+B\lfloor nx\rfloor+y\lfloor nx\rfloor \\ \iff\quad & Bnx-Any+A\lfloor ny\rfloor-B\lfloor nx\rfloor+x\lfloor ny\rfloor-y\lfloor nx\rfloor = 0. \end{aligned}$$

Für $n = 1$ ist $\lfloor nx\rfloor = 0$ und $\lfloor ny\rfloor = 0$ und wir erhalten $Bx = Ay$. Daraus folgt für alle n, dass $Bnx - Any = 0$. Die verbleibende Gleichung multiplizieren wir mit x ($\neq 0$) und setzen danach $Bx = Ay$ ein:

$$\begin{aligned} & A\lfloor ny\rfloor - B\lfloor nx\rfloor + x\lfloor ny\rfloor - y\lfloor nx\rfloor = 0 \\ \iff\quad & Ax\lfloor ny\rfloor - Bx\lfloor nx\rfloor + x^2\lfloor ny\rfloor - xy\lfloor nx\rfloor = 0 \\ \iff\quad & Ax\lfloor ny\rfloor - Ay\lfloor nx\rfloor + x^2\lfloor ny\rfloor - xy\lfloor nx\rfloor = 0 \\ \iff\quad & (A+x)(x\lfloor ny\rfloor - y\lfloor nx\rfloor) = 0. \end{aligned}$$

Es gilt $A + x \neq 0$, also muss

$$x\lfloor ny\rfloor = y\lfloor nx\rfloor \tag{4}$$

für alle n gelten.

Da x, $y > 0$ sind, gilt für ein ausreichend großes n, dass $\lfloor ny\rfloor > 0$ (für jedes $n \geq \frac{1}{y}$). Es sei N diejenige Zahl, für die $\lfloor (N-1)y\rfloor = 0$ und $\lfloor Ny\rfloor > 0$ gelten. (Diese ist eindeutig und existiert, da $\lfloor ny\rfloor$ monoton steigend ist und für $n = 1$ gleich 0 ist.)

Wir behaupten, dass $\lfloor Ny\rfloor = 1$. Wäre nämlich $\lfloor Ny\rfloor$ größer als 1, so wäre $Ny \geq 2$, aber $(N-1)y < 1$, also müsste $Ny - (N-1)y > 1$ und damit $y > 1$ gelten, im Widerspruch zur Definition von y.

Nun betrachten wir, welche Werte $\lfloor Nx\rfloor$ haben kann. Aus $0 \leq x \leq y$ folgt unmittelbar $0 \leq \lfloor Nx\rfloor \leq \lfloor Ny\rfloor = 1$.

- Für $\lfloor Nx\rfloor = 0$ erhalten wir aus (4) mit $n = N$, dass $x \cdot 1 = y \cdot 0$ gelten muss, also $x = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung $x > 0$.
- Für $\lfloor Nx\rfloor = 1$ erhalten wir $x \cdot 1 = y \cdot 1$, also $x = y$. Wegen $Bx = Ay$ folgt daraus $A = B$. Es ist offensichtlich, dass alle Paare (a, a) mit $a \in \mathbb{R}$ tatsächlich Lösungen sind.

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 3. Für $a = 0$ oder $b = 0$ ist die Gleichung klarerweise erfüllt. Deshalb soll für das Weitere gelten, dass a und b ungleich null sind. Wenn n hinreichend groß ist, sind die ganzen Zahlen $\lfloor an\rfloor$ und $\lfloor bn\rfloor$ auch ungleich null. Folglich ist

$$\frac{a}{b} = \frac{\lfloor an\rfloor}{\lfloor bn\rfloor}$$

eine rationale Zahl, die wir in gekürzter Form als $\frac{p}{q}$ mit teilerfremden p, $q \in \mathbb{Z}$ darstellen.

Damit haben wir für alle $n \geq 0$, dass

$$p \cdot \lfloor bn\rfloor = q \cdot \lfloor an\rfloor. \tag{5}$$

Wir behandeln zuerst den Fall, dass eine der beiden Zahlen ganz ist, o. B. d. A. sei das a. Wir zeigen, dass dann auch b ganz sein muss, was dann natürlich immer eine Lösung ist. Dazu verwenden wir das folgende Lemma.

Lemma. Seien x und c reelle Zahlen mit $\lfloor xn\rfloor = cn$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist x eine ganze Zahl.

Beweis des Lemmas: Mit $n = 1$ erhalten wir $c = \lfloor x \rfloor$ und damit $\lfloor (x - \lfloor x \rfloor)n \rfloor = 0$. Wenn x nicht ganzzahlig wäre, dann wäre die Differenz $x - \lfloor x \rfloor$ aber positiv und nach Multiplikation mit hinreichend großem n größer als 1, was einen Widerspruch ergibt. ■

Mit diesem Lemma erhalten wir für ganzzahliges a sofort, dass wegen $\lfloor bn \rfloor = \frac{a}{p} \cdot q \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch b ganzzahlig ist, wie behauptet.

Seien also ab jetzt a und b keine ganzen Zahlen. Weil p und q laut Definition teilerfremd sind, ergibt sich aus (5), dass p die Zahl $\lfloor an \rfloor$ für jede positive ganze Zahl n teilt.

Wegen

$$an - 1 < \lfloor an \rfloor \leq an$$

und

$$a(n+1) - 1 < \lfloor a(n+1) \rfloor \leq a(n+1)$$

erhalten wir

$$\lfloor a(n+1) \rfloor - \lfloor an \rfloor < a + 1$$

und

$$\lfloor a(n+1) \rfloor - \lfloor an \rfloor > a - 1.$$

Deshalb kann die Differenz $\lfloor a(n+1) \rfloor - \lfloor an \rfloor$ nur zwei Werte annehmen, nämlich $\lfloor a \rfloor$ oder $\lceil a \rceil$. Man beachte, dass dies zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind. Die Differenz muss für alle n durch p teilbar sein. Wenn nur einer der beiden Werte als Differenz d auftritt, dann gilt $\lfloor an \rfloor = \lfloor a \cdot 0 \rfloor + dn = dn$, was nach dem Lemma sofort einen Widerspruch zur Nichtganzzahligkeit von a ergibt. Also muss p zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen teilen und ist somit ± 1. Analog gilt $q = \pm 1$. Daraus erhalten wir $a = b$ oder $a = -b$. Der Fall $a = b$ ist klarerweise eine Lösung.

Für $a = -b$ erhalten wir jedoch mit $n = 1$, dass

$$\lfloor -a \rfloor = -\lfloor a \rfloor,$$

was für nichtganzzahliges a falsch ist. Somit gibt es keine weiteren Lösungen.

(Stephan Wagner) □