Geometrie-Wettbewerb 2018 - Lösungen

Beispiel 1 (3 Punkte). *Es sei ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Die Innenwinkelsymmetrale von $\angle BAC$ schneide den Umkreis von ABC in S (verschieden von A). Der Punkt P sei die Spiegelung von H an der Seite BC, und der Punkt Q sei die Spiegelung von P an AS.*
Man zeige: Der Umkreis des Dreiecks PQS enthält den Umkreismittelpunkt von ABC.

Lösung. Wir betrachten das Dreieck BHC. Aus $\angle CBH = 90° - \angle ACB$ und $\angle HCB = 90° - \angle CBA$ folgern wir, dass $\angle CPB = \angle BHC = 180° - (90° - \angle ACB) + (90° - \angle CBA) = 180° - \angle BAC$. Somit liegt P (nach dem Peripheriewinkelsatz über der Sehne BC) auf dem Umkreis von ABC.

Nach dem Südpolsatz liegt S auf der Streckensymmetrale von BC, genauso wie der Umkreismittelpunkt von ABC, der mit U bezeichnet sei. Daher ist SU parallel zu AP, und nach dem Parallelwinkelsatz folgt $\angle PUS = \angle UPA$, und weil $UP = UA$, gilt auch $\angle UPA = \angle PAU$. Nach dem Zentriwinkelsatz folgt $\angle PUS = 2\angle PAS = \angle PAQ$. Daher liegen A, U und Q auf einer gemeinsamen Geraden.

Weil $APSQ$ ein Deltoid ist, gilt $\angle QSP = 2\angle ASP$. Mit dem Zentriwinkelsatz im Umkreis über der Sehne AP ergibt sich $\angle AUP = 2\angle ASP$. Nun folgt $\angle QUP = 180° - \angle PUA = 180° - \angle PSQ$. Damit folgt nun, dass P, S, Q und U auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Anmerkung: Die Rechnungen in dieser Lösung sind zur Gänze mittels gerichteter Winkel modulo 180° durchgeführt. Man kann diese Lösung aber auch als Beweis für den in der Grafik abgebildeten Fall mittels des gewöhnlichen Winkelbegriffs verstehen.

Beispiel 2 (5 Punkte). *I sei der Inkreismittelpunkt eines spitzwinkeligen Dreiecks ABC mit $AB < AC$ und I' die Spiegelung von I an BC. AI schneide die Seite BC in D und den Umkreis des Dreiecks ABC in E (verschieden von A). Die Gerade EI' schneide den Umkreis in F.*
Man zeige:

(a) $AI : IE = ID : DE$.

(b) $IA = IF$.

Lösung. Es gilt $EB = EC = EI$. Dieses Resultat wird manchmal als „Polarkreissatz“ bezeichnet. Beweis: Nach dem Südpolsatz schneiden sich die Winkelsymmetrale in A und die Streckensymmetrale von BC in E, daher gilt $EB = EC$. Mit dem Peripheriewinkelsatz im Umkreis von ABC erhalten wir $\angle AEB = \angle ACB$ und $\angle EBC = \angle EAC = \frac{1}{2}\angle BAC$. Daher gilt $\angle EBI = \angle EBC + \angle CBI = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle CBA)$. Über die Winkelsumme im Dreieck EIB berechnen wir

$$\angle BIE = 180° - \angle EBI - \angle IEB = 180° - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle CBA) - \angle ACB = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle CBA) = \angle EBI.$$

Das heißt, EBI ist gleichschenklig mit Scheitel in E und damit gilt $EB = EI$.

Für den ersten Teil der Aufgabe betrachten wir die Dreiecke EBD und EAB. Aus dem Peripheriewinkelsatz im Umkreis (Sehne EC) folgt $\angle EBD = \angle EBC = \angle EAC = \angle BAE$. Weil nun $\angle EBD = \angle BAE$ und $\angle DEB = \angle AEB$ gilt, sind die Dreiecke EBD und EAB ähnlich und es gilt $ED : EB = EB : EA$. Weil $EB = EI$, erhalten wir $ED : EI = EI : EA$. Wir betrachten nun die zentrische Streckung mit Zentrum E mit Streckungsfaktor $ED : EI$. Diese lässt natürlich I in D übergehen, wegen der vorhergehenden Rechnung geht aber auch A in I über. Daraus folgt wiederum auch $AI : IE = ID : DE$, wie gewünscht.

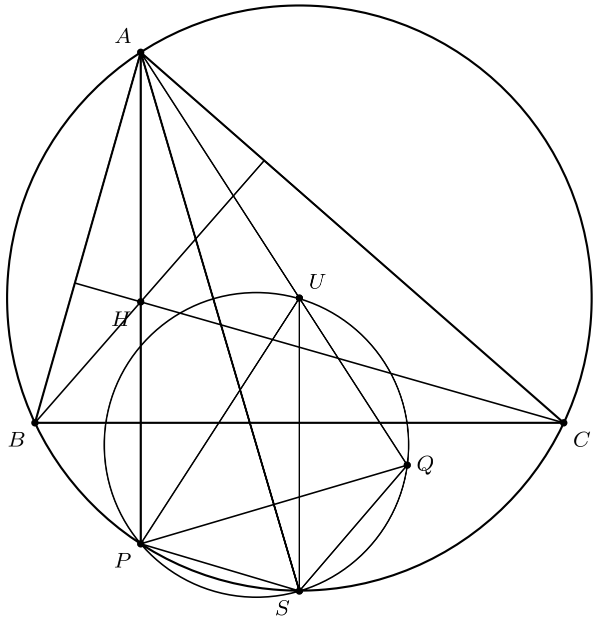
Für den zweiten Teil bezeichnen wir den Schnittpunkt von EF und BC mit G. Die Spiegelung an BC bildet GI in GI' ab, also ist BC die Innenwinkelsymmetrale von $\angle EGI$. Damit gilt nach dem Satz von Apollonius $EG : EI = ED : DI$.

Wir betrachten nun die Dreiecke EBG und EFB. Mit dem Peripheriwinkelsatz im Umkreis (Sehnen EC und BE) folgern wir

$$\angle GBE = 180° - \angle EBC = 180° - \angle EAC = 180° - \angle BAE = \angle EFB.$$

Wegen $\angle GBE = \angle EFB$ und $\angle BEG = \angle BEF$ sind die Dreiecke EBG und EFB ähnlich, und wir erhalten $EG : EB = EB : EF$, und weil $EB = EI$ heißt das auch $EG : EI = EI : EF$. Damit sind auch die Dreiecke EIG und EFI ähnlich, und wir erhalten unter Verwendung des Resultats aus Teil (a): $EI : IF = EG : GI = ED : DI = EI : IA$. Aus $EI : IF = EI : IA$ folgt natürlich $IF = IA$.

Skizze zu Beispiel 1



Skizze zu Beispiel 2