Geometrie-Wettbewerb 2017 - Lösungen

Beispiel 1 (3 Punkte). *Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Die Verlängerungen der Seiten AD und BC schneiden einander in einem Punkt E. Die Gerade AC schneide die Umkreise der Dreiecke ECD bzw. EAB jeweils ein zweites Mal in P bzw. R. Die Gerade BD schneide die Umkreise der Dreiecke ECD bzw. EAB jeweils ein zweites Mal in Q bzw. S.*
Man zeige: Wenn S, Q, P und R alle verschieden sind und in dieser Reihenfolge auf einem gemeinsamen Kreis liegen, dann ist E dessen Mittelpunkt.

Beweis. Bezeichne den Schnittpunkt von AC und BD mit X. Aus der Potenz von X an die Umkreise von ECD, EAB und $SQPR$ folgt

$$XQ \cdot XD = XP \cdot XC \tag{1}$$

$$XS \cdot XB = XR \cdot XA \tag{2}$$

$$XQ \cdot XS = XP \cdot XR \tag{3}$$

Weil S, Q, P und R verschieden sind, kann $XQ \cdot XS = XP \cdot XR$ nicht null sein, und man kann das Produkt der ersten zwei Gleichungen durch die dritte Gleichung teilen. Daraus folgt

$$XB \cdot XD = XA \cdot XC,$$

also ist $ABCD$ ein Sehnenviereck.
Somit gilt $\angle ABC = \angle CDE$. Aus dem Peripheriewinkelsatz in den Umkreisen von ECD und EAB folgt $\angle ABC = \angle ABE = \angle ARE = \angle PRE$ und $\angle CDE = \angle CPE = \angle RPE$. Daraus folgt, dass das Dreieck PRE gleichschenklig ist, und E auf der Streckensymmetrale von PR liegt.
Auf der anderen Seite folgt $\angle BAD = \angle DCE$. Wieder folgt aus dem Peripheriewinkelsatz $\angle BAD = \angle BAE = \angle BSE = \angle QSE$ und $\angle DCE = \angle DQE = \angle SQE$, und daraus folgt, dass E auf der Streckensymmetrale von QS liegt. Da PR und QS auf den Verlängerungen der Diagonalen AC und BD liegen, können sie nicht parallel sein. Daraus folgt, dass E der eindeutige Schnittpunkt der Streckensymmetralen von PR und QS sein muss, also genau das Zentrum des Umkreises des Vierecks $SQPR$.

□

Beispiel 2 (4 Punkte). *Es sei ABC ein gegen den Uhrzeigersinn beschriftetes Dreieck und $A'B'C'$ ein im Uhrzeigersinn beschriftetes Dreieck.*
Man zeige: Wenn ABC und $A'B'C'$ ähnlich sind, also $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ und $\angle C = \angle C'$ gilt, so folgt

$$|AB'|^2 + |BC'|^2 + |CA'|^2 = |A'B|^2 + |B'C|^2 + |C'A|^2$$

Beweis. Dieser Beweis verwendet „gerichtete Winkel modulo 180°“. Das heißt, $\angle ABC$ bezeiche den eindeutig bestimmten Winkel $\alpha \in [0, 180)$, sodass eine Drehung um α *gegen den Uhrzeigersinn* die Gerade AB auf die Gerade AC abbildet.

Die Normalen von A', B' bzw. C' auf BC, AC bzw. AB seien mit n_A, n_B bzw. n_C bezeichnet. Die Schnittpunkte von n_A, n_B bzw. n_C mit BC, AC bzw. AB seien mit F_A, F_B bzw. F_C bezeichnet. Zuletzt bezeichne X_A den Schnittpunkt von n_B und n_C, X_B den Schnittpunkt von n_A und n_C sowie X_C den Schnittpunkt von n_A und n_B.

Aus dem Satz von Thales folgt, dass $CF_AF_BX_C$ ein Sehnenviereck ist, und somit

$$\angle BCA = \angle F_ACF_B = \angle F_AX_CF_B = \angle A'X_CB'.$$

Aus der Angabe, dass das Dreieck $A'B'C'$ gegensinnig ähnlich zu ABC ist, folgt $\angle BCA = \angle A'C'B'$ und somit $\angle A'X_CB' = \angle A'C'B'$. Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt dann, dass X_C auf dem Umkreis von $A'C'B'$ liegt. Durch zyklische Vertauschung der Punkte in den Tripeln $(A, B, C), (A', B', C'), (F_A, F_B, F_C), (X_A, X_B, X_C)$ folgt, dass auch X_A, X_B auf dem Umkreis von $A'B'C'$ liegen. Das heißt, X_A, X_B und X_C fallen auf einen Punkt X zusammen.

Nun gilt laut dem Satz von Pythagoras, angewandt in den rechtwinkligen Dreiecken AF_CC', BF_CC', AF_CX und BF_CX:

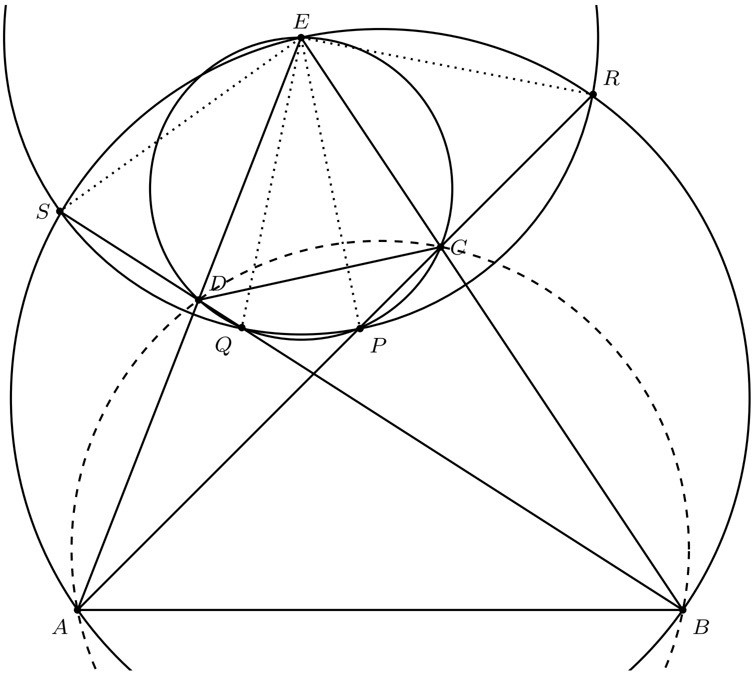
$$|AC'|^2 - |C'B|^2 = |AF_C|^2 + |F_CC'|^2 - (|BF_C|^2 - |F_CC'|^2) =$$
$$|AF_C|^2 + |F_CX|^2 - (|BF_C|^2 - |F_CX|^2) = |AX|^2 - |BX|^2$$

Durch zyklische Vertauschung folgt auch $|BA'|^2 - |A'C|^2 = |BX|^2 - |CX|^2$ und $|CB'|^2 - |B'A|^2 = |CX|^2 - |AX|^2$. Summiert man die diese drei Gleichungen, erhält man die gesuchte Aussage:

$$|AC'|^2 - |C'B|^2 + |BA'|^2 - |A'C|^2 + |CB'|^2 - |B'A|^2 =$$
$$|AX|^2 - |BX|^2 + |BX|^2 - |CX|^2 + |CX|^2 - |AX|^2 = 0$$

□

Skizze zu Beispiel 1



Skizze zu Beispiel 2