44. Österreichische Mathematische Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

13. Juni 2013

Aufgabe 1. *Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n > 1$, für die Folgendes gilt:*
Die Summe der Zahl n und ihres zweitgrößten Teilers ist 2013.

R. Henner, Wien

Lösung 1. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Sei n ungerade. Dann ist auch der zweitgrößte Teiler von n ungerade und die Summe daher gerade, also nicht 2013. Es gibt also keine ungerade Lösung.

2. Sei n gerade. Dann ist der zweitgrößte Teiler von n gleich $\frac{n}{2}$. Dann haben wir die Gleichung $n + \frac{n}{2} = 2013$ zu lösen. Diese Gleichung hat genau eine Lösung, nämlich 1342, und das ist auch eine gerade Zahl.

Daher ist 1342 die (einzige) Lösung unserer Aufgabe.

(R. Henner) □

Lösung 2. Den zweitgrößten Teiler von n kann man in der Form $\frac{n}{p}$ schreiben, wobei p die kleinste Primzahl ist, die n teilt. Also hat man die Gleichung $n + \frac{n}{p} = 2013$ zu lösen, die (wegen $p > 0$) äquivalent zu $(p+1)n = 2013p$ ist.

Da $p + 1$ teilerfremd zu p ist, muss $p + 1$ Teiler von 2013 sein. Da 2013 nur ungerade Teiler hat, muss $p + 1$ ungerade, also $p = 2$ sein.

Dann erhält man als einzige Möglichkeit die Gleichung $3n = 4026$ und damit auch mit $n = 1342$ die einzige Lösung.

(R. Henner) □

Lösung 3. Sei d der zweitgrößte Teiler von n. Das ergibt die Gleichung

$$2013 = n + d = d\left(\frac{n}{d} + 1\right).$$

Die Zahl $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ hat die 8 positiven Teiler $1, 3, 11, 61, 33, 183, 671, 2013$.
Wenn man nun die acht Fälle betrachtet, erhält man:

1. $d = 1$ und $n + 1 = 2013$, also $n = 2012$.

2. $d = 3$ und $\frac{n}{3} + 1 = 671$, also $n = 670 \cdot 3$.

3. $d = 11$ und $\frac{n}{11} + 1 = 183$, also $n = 182 \cdot 11$.

4. $d = 33$ und $\frac{n}{33} + 1 = 61$, also $n = 60 \cdot 33$.

5. $d = 61$ und $\frac{n}{61} + 1 = 33$, also $n = 32 \cdot 61$.

6. $d = 183$ und $\frac{n}{183} + 1 = 11$, also $n = 10 \cdot 183$.

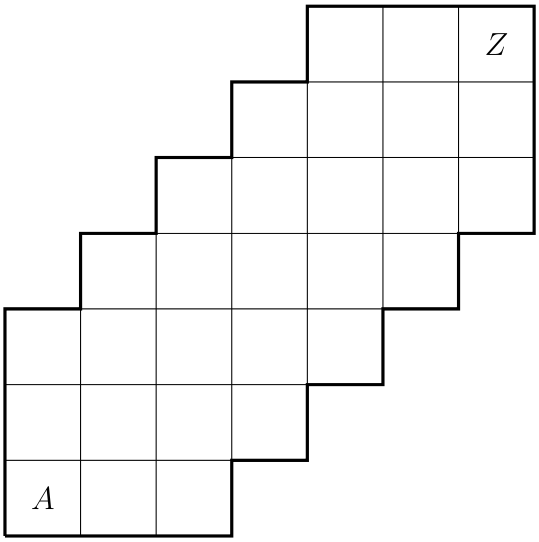
7. $d = 671$ und $\frac{n}{671} + 1 = 3$, also $n = 2 \cdot 671$.

8. $d = 2013$ und $\frac{n}{2013} + 1 = 1$, also $n = 0$.

Man sieht nun sofort, dass d nur im Fall $d = 671$ wirklich der zweitgrößte Teiler von $n = 2 \cdot 671 = 1342$ ist, also ist das die einzige Lösung.

(T. Eisenkölbl) □

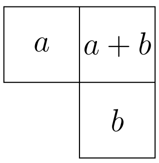
Aufgabe 2. *Gegeben ist die folgende Figur:*



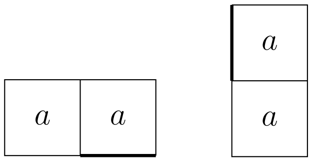
Man bestimme die Anzahl der Wege vom Ausgangsquadrat A zum Zielquadrat Z, wobei ein Weg aus Schritten von einem Quadrat zu seinem oberen oder rechten Nachbarquadrat besteht.

W. Janous, WRG Ursulinen, Innsbruck

Lösung 1. Statt nur die Anzahl der Wege von A nach Z zu bestimmen, ist es einfacher, für jedes Quadrat der Figur die Wege von A zu diesem Quadrat zu zählen und diese Zahl in das entsprechende Quadrat einzutragen. Für das Quadrat A selbst ist diese Anzahl 1, da es nur eine Möglichkeit gibt, dort anzukommen (nämlich 0 Schritte zu tun). Hat ein Quadrat ein linkes und ein unteres Nachbarquadrat, so ist die Anzahl der Wege die Summe der entsprechenden Zahlen für diese beide Nachbarquadrate (siehe folgende Abbildung).



Hat ein Quadrat nur eines dieser beiden Nachbarquadrate, so müssen alle Wege in dieses Quadrat über diesen Nachbarn gehen, und die Anzahl der Wege ist daher dieselbe wie für das Nachbarquadrat (siehe folgende Abbildung).



Wir können also rekursiv von links unten nach rechts oben alle Zahlen ausrechnen. Wenn wir sie in das jeweilige Quadrat schreiben, erhalten wir das folgende Bild:

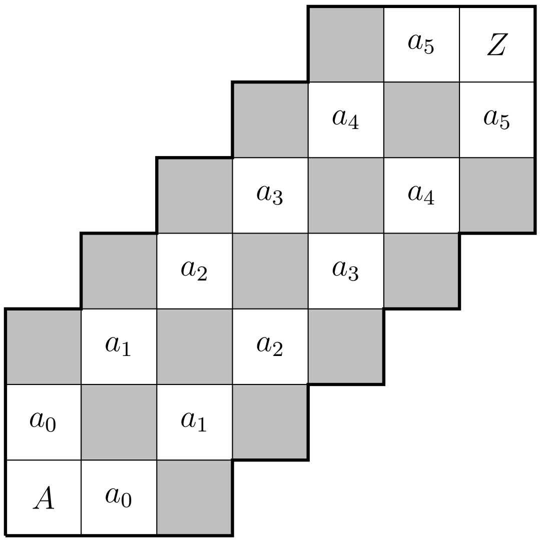
				81	243	486
			27	81	162	243
		9	27	54	81	81
	3	9	18	27	27	
1	3	6	9	9		
1	2	3	3			
1	1	1				

Die gesuchte Anzahl ist also 486.

(T. Eisenkölbl) □

Lösung 2. Die Überlegungen in der ersten Lösung lassen sich noch etwas effizienter unter Ausnutzung der Symmetrie durchführen.

Wir rechnen dahei nur die Anzahl der Wege vom Quadrat A zu den weißen Quadraten im folgenden Bild aus.



Aus Symmetriegründen müssen die Zahlen in zwei von A gleichweit entfernten weißen Quadraten jeweils gleich sein. Wir sehen auch, dass $a_0 = 1$ gilt.

Die Anzahl der Möglichkeiten, von einem der beiden Quadrate mit Beschriftung a_n zu einem bestimmten Quadrat mit Beschriftung a_{n+1} zu gelangen, ist 3. (So kann etwa das linke Quadrat mit a_{n+1} auf zwei Arten vom linken Quadrat mit a_n erreicht werden und auf eine Art vom rechten Quadrat mit a_n.)

Damit gilt, dass $a_5 = 3a_4 = 3^2a_3 = 3^3a_2 = 3^4a_1 = 3^5a_0 = 3^5$ und wir erhalten für die Gesamtzahl der Wege von A nach Z die Zahl $2a_5 = 2 \cdot 3^5 = 2 \cdot 243 = 486$.

(T. Eisenkölbl) □

Aufgabe 3. *Es seien a und b reelle Zahlen mit $0 \leq a,\ b \leq 1$. Man beweise:*

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \leq 1.$$

Wann gilt Gleichheit?

K. Czakler, GRG 21, Wien

Lösung 1. Wir bemerken zuerst, dass für alle reellen Zahlen t mit $0 \leq t \leq 1$ die Ungleichung $t^2 \leq t$ gilt, wobei Gleichheit genau für $t = 0$ oder $t = 1$ eintritt. Multiplikation der behaupteten Ungleichung mit dem Hauptnenner führt zu $a \cdot (a+1) + b \cdot (b+1) \leq (a+1) \cdot (b+1)$, d.h. $a^2 + b^2 \leq ab + 1$. Mit Hilfe der eingangs erwähnten Ungleichung lässt sich dies folgendermaßen verschärfen: $a + b \leq ab + 1$, d.h. aber $1 - a - b + ab \geq 0$, also $(1-a) \cdot (1-b) \geq 0$. Dies ist aber wegen $0 \leq a, b \leq 1$ unmittelbar einsichtig. Außerdem tritt in der verschärften Ungleichung Gleichheit genau für $a = 1$ oder $b = 1$ ein. Es sei $a = 1$. Dann muss $1^2 + b^2 = 1 \cdot b + 1$, d.h. $b = 0$ oder $b = 1$, gelten. Für $b = 1$ geht man analog vor. Zusammengefasst bedeutet dies: Gleichheit ergibt sich genau für die drei Zahlenpaare $(a, b) = (0, 1)$, $(a, b) = (1, 0)$ oder $(a, b) = (1, 1)$.

(K. Czakler, W. Janous) □

Lösung 2. Wie zuerst ergibt sich $a^2 + b^2 \leq ab + 1$, d.h. $a^2 - a + b^2 - b \leq 1 - a - b + ab$, also $a(a-1) + b(b-1) \leq (1-a)(1-b)$. Wegen $0 \leq a, b \leq 1$ sind die zwei Summanden auf der linken Seite nicht positiv, während die zwei Faktoren der rechten Seite nicht negativ sind. Damit ergibt sich die Gültigkeit der behaupteten Ungleichung. Gleichheit tritt folglich genau dann ein, wenn die Ausdrücke auf beiden Seiten den Wert Null annehmen. Es ergeben sich wieder die drei Zahlenpaare wie in der ersten Lösung.

(W. Janous) □

Lösung 3. Wir gehen wieder von der Ungleichung $a^2+b^2 \leq ab+1$ aus, die wir in der Form $a^2+2ab+b^2 \leq 3ab+1$, d.h. $(a+b)^2-1 \leq 3ab$, also $(a+b+1)\cdot(a+b-1) \leq 3\cdot ab$ schreiben. Die Abschätzung $0 < a+b+1 \leq 3$ mit Gleichheit für $a = b = 1$ ist sofort klar. Weiters ist $a+b-1 \leq ab$ äquivalent zu $(1-a)(1-b) \geq 0$ mit Gleichheit genau für $a = 1$ oder $b = 1$. Damit ergeben sich wieder die drei in Lösung 1 angegebenen Zahlenpaare.

(W. Janous) □

Lösung 4. Wie eben erhalten wir die Ungleichung $(a + b)^2 \leq 3ab + 1$. Für $a + b \leq 1$ ist dies klar. Gleichheit gilt in diesem Fall genau für $a + b = 1$ und $ab = 0$, also $(a, b) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$. Es sei also $1 < a + b \leq 2$. Mit $s := a + b$ haben wir $s^2 \leq 3a(s - a) + 1$, also (nach quadratischem Ergänzen) $3 \cdot \left(a - \frac{s}{2}\right)^2 + \frac{s^2}{4} \leq 1$ zu beweisen. Wir betrachten den linksseitigen Ausdruck als Funktion $f(a)$, wobei $s-1 \leq a \leq 1$ zu gelten hat. Der zugehörige Graph ist eine (nach oben offene) Parabel mit Scheitel bei $a = \frac{s}{2}$. Deshalb genügt der Nachweis von $f(s-1) \leq 1$ und $f(1) \leq 1$. Wir haben aber $f(s-1) = f(1) = s^2 - 3s + 3$ samt $s^2 - 3s + 3 \leq 1$, weil $s^2 - 3s + 2 = (s-1)(s-2) \leq 0$. Gleichheit gilt in diesem Fall genau für $s = 2$, d.h. $a = b = 1$.

(W. Janous) □

Lösung 5. Durch Ausmultiplizieren ergibt sich die zu beweisende Ungleichung $a^2 + b^2 - ab \leq 1$. Wir bezeichnen die linke Seite als $f(a, b)$. Wir betrachten zunächst b als fest und betrachten die Funktion $a \mapsto f(a, b)$ in a. Es handelt sich um eine nach oben offene Parabel, es gilt daher für $0 < a < 1$

$$f(a, b) < \max\{f(0, b), f(1, b)\}.$$

Analoges gilt für festes a und variables b. Somit gilt

$$f(a, b) \leq \max\{f(0, 0), f(0, 1), f(1, 0), f(1, 1)\}$$

für $0 \leq a,\ b \leq 1$ mit Gleichheit höchstens für $\{a, b\} \subseteq \{0, 1\}$. Mit $f(0, 0) = 0$ und $f(1, 0) = f(0, 1) = f(1, 1) = 1$ ergeben sich die Ungleichung und auch die Gleichheitsfälle für $(a, b) \in \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$.

(C. Heuberger) □

Lösung 6. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a \leq b$ an. Nach Ausmultiplizieren ist die Ungleichung $a^2 + b^2 \leq ab + 1$ zu zeigen. Da $a \leq b$ und $a \geq 0$, gilt $a^2 \leq ab$. Wegen $0 \leq b \leq 1$ gilt $b^2 \leq 1$. Durch Addition ergibt sich die Ungleichung. Gleichheit gilt, wenn $b = 1$ sowie $a = b$ oder $a = 0$. Im allgemeinen Fall gilt also Gleichheit genau für $(a, b) \in \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$.

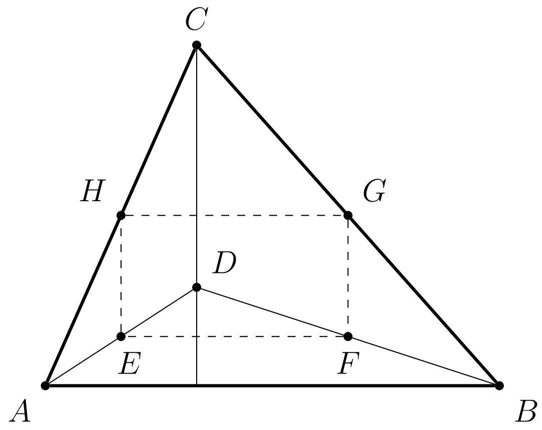
(C. Heuberger) □

Aufgabe 4. *Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck und D ein Punkt auf der Höhe durch C. Es seien E, F, G bzw. H die Mittelpunkte der Strecken AD, BD, BC bzw. AC.*

Man zeige, dass E, F, G und H ein Rechteck bilden.

G. Anegg, Innsbruck

Lösung. Wir stellen die Aufgabenstellung in der folgenden Abbildung dar:



Mit dem Strahlensatz folgt, dass

- EF parallel zu AB ist.
- HG parallel zu AB ist.
- HE parallel zu CD ist.
- GF parallel zu CD ist.

Daher ist EF parallel zu HG und HE parallel zu GF.
Weiters steht HG normal auf HE, da CD normal auf AB steht.
Daher bilden die vier Mittelpunkte ein Rechteck.

(G. Anegg) □