ÖMO

Österreichische MathematikOlympiade

Grundlagen der Geometrie – Beispiele

Fortgeschrittenenkurs TU Graz 2008/09

Birgit Vera Schmidt

1. Gegeben sei ein Trapez ABCD, wobei die Seiten AB und CD parallel sind. Auf der Seite AD liegt der Punkt E, und es gilt $\sphericalangle ABE = 18°$, $\sphericalangle BEC = 30°$. Man bestimme $\sphericalangle ECD$.
2. In einem Rechteck $ABCD$ ist M der Mittelpunkt der Seite AB und $AB : AD = 2 : 1$. Über der Strecke MD zeichne man ein gleichseitiges Dreieck MDX derart, dass die Punkte X und A auf verschiedenen Seiten der Geraden durch MD liegen. Man bestimme $\sphericalangle XCD$.
3. Gegeben sei ein regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$. Die Seiten AB, CD seien Tangenten an einen Kreis k mit Berührungspunkten A und D. Die Verlängerung der Seite AE schneide k in F. Man zeige, dass DEF ein gleichschenkeliges Dreieck ist.
4. Im Dreieck ABC sei $\sphericalangle CAB = 60°$, $\sphericalangle CBA = 50°$. Die Streckensymmetrale s von BC schneide die Seite AB im Punkt D. Die Streckensymmetralen von AD, CD schneiden s in den Punkten M, N und einander im Punkt O. Man bestimme die Art des Dreiecks MNO.
5. Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb dieses Kreises. Von P gehen zwei Strahlen aus, von denen einer k in A und B schneidet, der andere in C und D. Man zeige: $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.
6. Man zeige: Spiegelt man den Umkreismittelpunkt eines Dreiecks an seinen Seiten, so erhält man ein zu dem ursprünglichen Dreieck kongruentes Dreieck.
7. Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Man konstruiere über der Seite BC ein gleichseitiges, nach innen gerichtetes Dreieck mit A' als drittem Eckpunkt. Analog erhalte man B' und C' als Eckpunkte der gleichseitigen Dreiecke über AC und AB. Man zeige, dass $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$.
8. Seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die sich nicht berühren, und seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte dieser Kreise. Man lege von M_1 die Tangenten an k_2. Diese schneiden k_1 den Punkten A und A'. Analog lege man von M_2 die Tangenten an k_1 und erhalte die Punkte B und B'. Man zeige: $\overline{AA'} = \overline{BB'}$.
9. Gegeben seien ein Punkt P und zwei parallele Geraden, die beide auf derselben Seite von P liegen. Von P gehen drei Strahlen aus. Der erste schneide die parallelen Geraden in A und A', der zweite in B und B', der dritte in C und C'. Sei X der Schnittpunkt von AB' und A'B, Y der von BC' und B'C und Z der Schnittpunkt von AC' und A'C. Man zeige: X, Y und Z liegen auf einer Geraden. Man zeige außerdem, dass diese Gerade parallel zu den bereits gegebenen parallelen Geraden ist. (GWB 2003)
10. Sei ABC ein gleichseitiges Dreieck und P ein Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks. Man betrachte die Abstände AP, BP und CP und zeige, dass die Summe der beiden kürzeren davon gleich dem längsten ist. (Tipp: Ptolemäus)
11. Sei ABC ein Dreieck und seien X, Y und Z beliebige Punkte auf AB, BC und CA. Man konstruiere einen Kreis durch A, X und Z, einen Kreis durch B, X und Y und jenen Kreis durch C, Y und Z, und zeige, dass diese sich in einem Punkt schneiden.
12. Sei ABCD ein Sehnenviereck und S der Schnittpunkt der Diagonalen. Man zeige, dass die Dreiecke ABS und CDS ähnlich sind.
13. Es sei I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Er wird an den Dreiecksseiten gespiegelt. Dabei entsteht ein Dreieck PQR. Man zeige: Das Dreieck PQR ist spitzwinkelig. Welcher besondere Punkt des Dreiecks PQR ist der Punkt I? (LWB 1993)
14. Zwei gleich große Kreise k_1 und k_2 schneiden einander in den Punkten P und Q. Für eine (beliebige) Gerade g durch P sei P_1 der zweite Schnittpunkt mit k_1 und P_2 der zweite Schnittpunkt mit k_2. Man zeige, dass unabhängig von der Wahl von g, das Dreieck $P_1 Q P_2$ ein gleichschenkeliges Dreieck ist. (LWB 1994)
15. Von einem rechtwinkeligen Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C sind die Eckpunkte A und B sowie der Punkt P auf der Strecke AB, der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite AB, gegeben. Man konstruiere den Eckpunkt C und damit das Dreieck. (LWB 1996)
16. Über dem Durchmesser AB wird der Halbkreis h mit dem Mittelpunkt M errichtet. Über MB wird auf der selben Seite der Geraden AB der Halbkreis k errichtet. Seien X und Y Punkte auf k, sodaß der Bogen BX eineinhalb mal so groß wie der Bogen BY ist. Die Gerade MY schneidet die Gerade BX in D und den großen Halbkreis h in C. Man zeige, daß Y die Mittelpunkt der Strecke CD ist. (GWB 2005)