1. Kann ein 25×25 Quadrat vollständig mit (nicht überlappenden) 2×2 Quadraten und 3×3 Quadraten überdeckt werden?

2. (Turnier der Städte) Ein Rechteck $ABCD$ wird in Rechtecke unterteilt, deren Seiten alle parallel zu den Seiten von $ABCD$ sind. Jedes dieser Rechtecke hat ganzzahlige Breite oder ganzzahlige Höhe (oder beides). Man zeige, dass auch $ABCD$ ganzzahlige Höhe oder Breite hat.

3. Gegeben sei ein Graph mit 2011 Knoten und 3333 Kanten. Man zeige, dass es möglich ist, mindestens a) 173 bzw. b) 304 Knoten gelb zu färben, sodass keine zwei gelben Knoten benachbart sind.

4. (MEMO 2011, Teambewerb) Für eine ganze Zahl $n \geq 3$ sei $\mathcal{M}$ die Menge $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n\}$ von Punkten in der Ebene. ($\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen.)

   Was ist die größtmögliche Anzahl von Punkten in einer Teilmenge $S \subseteq \mathcal{M}$, die keine drei paarweise verschiedenen Punkte enthält, die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks sind?

5. (MEMO 2011, Teambewerb) Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Bei einem MEMO-ähnlichen Wettbewerb gibt es $3n$ Teilnehmer. Es werden n Sprachen gesprochen, und jeder Teilnehmer spricht genau drei verschiedene Sprachen.

   Man zeige, dass es möglich ist, mindestens $\left\lceil \frac{2n}{9} \right\rceil$ der gesprochenen Sprachen so auszuwählen, dass kein Teilnehmer mehr als zwei der ausgewählten Sprachen spricht.

6. (MEMO 2011, Einzelbewerb) Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. John und Mary spielen das folgende Spiel: Zuerst beschriftet John die Seiten eines regelmäßigen n-Ecks mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in beliebiger Reihenfolge, wobei er jede Zahl genau ein Mal verwendet. Dann unterteilt Mary das n-Eck in Dreiecke, indem sie $n - 3$ Diagonalen zeichnet, die einander im Inneren des n-Ecks nicht schneiden. Alle diese Diagonalen werden mit der Zahl 1 beschriftet. In jedes der Dreiecke wird das Produkt der Zahlen auf seinen Seiten geschrieben. Sei S die Summe dieser $n - 2$ Produkte.

   Man bestimme den Wert von S, wenn Mary möchte, dass die Zahl S so klein wie möglich ist, John hingegen, dass S so groß wie möglich ist, und beide die bestmöglichen Entscheidungen treffen.

7. (MEMO 2011, Einzelbewerb) Zu Beginn steht nur die Zahl 44 an der Tafel. Eine Zahl a an der Tafel kann durch vier paarweise verschiedene ganze Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4 ersetzt werden, sodass deren arithmetisches Mittel $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ gleich der Zahl a ist. In einem Schritt ersetzen wir gleichzeitig alle ganzen Zahlen an der Tafel auf diese Weise. Nach 30 Schritten erhalten wir $n = 4^{30}$ ganze Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ an der Tafel. Man zeige, dass
$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}{n} \geq 2011\,.$$

8. (MEMO 2011, Teambewerb) Seien A und B disjunkte nichtleere Mengen mit $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Man zeige, dass Elemente $a \in A$ und $b \in B$ existieren, sodass die Zahl $a^3 + ab^2 + b^3$ durch 11 teilbar ist.