Blatt 2 2018 Italien

Geretschläger

1) Es seien a und b positive reelle Zahlen. Wir betrachten ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a. An den Seiten des Sechsecks werden sechs Rechtecke mit den Seitenlängen a und b extern angehängt. Die zwölf neuen Eckpunkte dieser Rechtecke liegen auf einem gemeinsamen Kreis. Nun wiederholen wir die Konstruktion mit vertauschten Rollen von a und b. Zuerst betrachten wir also ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge b, und an dessen Seiten werden sechs Rechtecke mit den Seitenlängen a und b extern angehängt. Die zwölf neuen Eckpunkte dieser Rechtecke liegen wiederum auf einem gemeinsamen Kreis. Beweise, dass die Radien der beiden Kreise gleich sind.

2) Es sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Wir betrachten die ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} n &= a + b - c \\ n &= a^2 + b^2 - c^2 \end{aligned}$$

Beweise, dass es sicher eine Lösung dieses Gleichungssystems gibt, aber höchstens endlich viele.

3) Madame Mim hat ein Kartendeck, bestehend aus 52 Karten, die alle nach unten orientiert geordnet sind. Sie nimmt im ersten Zug die oberen sieben Karten, dreht sie um, und gibt diese sieben Karten auf die untere Seite des Decks. Dann liegen wieder alle Karten in einem Stoß, aber nicht alle sind nach unten orientiert, da die sieben unteren nach oben orientiert sind. Mim wiederholt diesen Vorgang immer wieder, bis schließich zum ersten Mal alle Karten wieder nach unten orientiert sind. Wie viele Züge hat Mim durchgeführt?

4) Es sei $ABCD$ ein Tetraeder mit folgender Eigenschaft: Bezeichnen wir die Inkreismittelpunkte von BCD, CDA, DAB und ABC der Reihe nach als A', B', C' und D', haben die Geraden AA', BB', CC' und DD' einen gemeinsamen Punkt. Zeige, dass die Produkte der Längen gegenüberliegender Seiten jeweils gleich sind, also dass $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$ gilt.

5) Es sei $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine Folge positiver ganzer Zahlen, mit der Eigenschaft, dass

$$x_{mn} \neq x_{m(n+1)}$$

für jedes Paar (m, n) positiver ganzer Zahlen gilt. Zeige, dass es eine positive ganze Zahl i mit $x_i \geq 2017$ gibt.

6) Zeige, dass es unendlich viele positive ganze Zahlen m mit der Eigenschaft gibt, dass die Anzahl verschiedener ungerader Primteiler von $m(m+3)$ ein Vielfaches von 3 ist.
(Hinweis: Die Zahl $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ hat zwei verschiedene ungerade Primteiler, während die Zahl $1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$ drei hat.)

1) Die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2016$ werden der Reihe nach angeschrieben. Wie viele ungerade Ziffern kommen in der Liste vor?

2) Für jede positive reelle Zahl x definieren wir $\{x\}$ als das Maximum der beiden Zahlen x und $\frac{1}{x}$, mit $\{1\} = 1$. Bestimme alle positive reelle Zahlen y, für die

$$5y\{8y\}\{25y\} = 1$$

gilt.

3) Bestimme alle paare positiver reeller Zahlen (m, n), die die Bedingung $n^2 - 6n = m^2 + m - 10$ erfüllen.

4) Naomi und Tom spielen ein Spiel, bei dem Naomi als erste dran ist. Sie wählen abwechselnd eine ganze Zahl aus dem Bereich von 1 bis 100, wobei sie jeweils eine Zahl auswählen, die bis zu dem Zeitpunkt noch nicht gewählt wurde. Ein Spieler verliert, wenn die Summe aller Zahlen, die seit Beginn des Spiels von beiden gewählt wurden nach seinem Zug nicht als Differenz zweier Quadratzahlen darstellbar ist. Untersuche, ob ein Spieler eine zwingende Gewinnstrategie besitzt.

5) Es seien ABC ein Dreieck mit $\angle A < \angle B < 90°$ und Γ der Umkreis von ABC. Die Tangenten von Γ in A und C schneiden sich in P und die Geraden AB und PC schneiden sich in Q. Es ist gegeben, dass die Flächen der Dreiecke ACP, ABC und BQC gleich sind. Beweise, dass $\angle BCA = 90°$ gilt.

6) Aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen m, $m + 1$ und $m + 2$ sind der Reihe nach durch aufeinanderfolgende ungerade positive ganze Zahlen n, $n + 2$ bzw. $n + 4$ teilbar. Bestimme den kleinstmöglichen Wert von m in Abhängigkeit von n.

7) Im Sehnenviereck $ABCD$ schneiden sich die Diagonalen AC und BD in P. Ferner schneiden sich die Strahlen AD und BC in Q. Die Innenwinkelsymmetrale von $\angle BQA$ schneidet AC in R und die Innenwinkelsymmetrale von $\angle APD$ schneidet AD in S. Beweise, dass RS und CD parallel sind.

8) Wir betrachten Dreiecke, deren Eckpunkte Gitterpunkte eines kartesischen Koordinatensystems sind. Für wie viel positive ganze Zahlen $n < 2017$ ist es möglich, ein rechtwinkeliges Dreieck mit Gittereckpunkten so zu zeichnen, dass genau n Gitterpunkte, einschließlich der Eckpunkte, auf seinen Seiten liegen?

1) Bestimme alle Paare k, l reeller Zahlen, sodass die Ungleichung

$$ka^2 + lb^2 > c^2$$

für alle Dreiecksseitenlängen a, b, c gilt.

2) Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die die Beziehung

$$f(y - xy) = f(x)y + (x-1)^2 f(y)$$

für alle reellen Zahlen x, y gilt.

3) Einer Folge von n Ziffern 0 und n Ziffern 1 wird die Anzahl der Blöcke aufeinanderfolgender gleicher Ziffern zugeordnet. (So wird z.B. der Folge 00111001 die Zahl 4 zugeordnet, weil sie aus den vier Blöcken 00, 111, 00 und 1 zusammengesetzt ist.) Wir addieren für ein gegebenes n die Zahlen, die allen derartigen Folgen zugeordnet sind. Beweise, dass die resultierende Summe gleich

$$(n+1)\binom{2n}{n}$$

ist.

4) Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Die Winkelsymmetrale von $\angle BHC$ schneidet die Seite BC in D. Es seien E und F die symmetrischen Punkte zu D bezüglich AB bzw. AC. Beweise, dass der Umkreis von AEF durch den Mittelpunkt des Bogens BAC führt.

5) Es sei $k \neq 0$ eine ganze Zahl. Beweise, dass die Anzahl der geordneten Paare ganzer Zahlen (x, y), die die Gleichung

$$k = \frac{x^2 - xn + 2y^2}{x + y}$$

erfüllen genau dann ungerade ist, wenn k durch 7 teilbar ist.

6) Es sei D ein beliebiger Punkt der Basis AB eines gleichschenkeligen Dreiecks ABC. Ferner sei E der vierte Eckpunkt des Parallelogramms $ADEC$. Auf der Geraden ED liege der Punkt F so, dass E zwischen D und F liegt, und $EF = EB$ gilt. Beweise, dass die Länge der Sehne auf der Gerade EB im Umkreis von ABF doppelt so lang wie AC ist.

Blatt 4 2018 Irland

Geretschläger

1) Fünf Mannschaften bestreiten ein Fußballturnier bei dem jede Mannschaft einmal gegen jede andere antritt. Gewinnt eine Mannschaft ein Spiel, erhält sie 5 Punkte, während die unterlegene Mannschaft 0 Punkte bekommt. Für ein 0-0 Ergebnis erhalten beide Mannschaften je einen Punkt, und für jedes andere Unentschieden erhalten beide Mannschaften jeweils 2 Punkte. Am Ende des Turniers betrachten wir die Gesamtpunktezahlen der Mannschaften, und stellen fest, dass es sich dabei um 5 aufeinanderfolgende ganze Zahlen handelt. Wie viele Tore wurden mindestens im Verlauf des Turniers erzielt?

2) Zwei Kreise schneiden sich in A und B. Eine gemeinsame Tangente berührt die Kreise in P bzw. Q. Die Gerade AB schneidet den Umkreis von PQA ein zweites Mal in C, und die Geraden CP und CQ schneiden die Kreise jeweils ein zweites Mal in F bzw. E. Beweise, dass $PQFE$ ein Sehnenviereck ist.

3) Gibt es eine gerade positive ganze Zahl n, sodass $n+1$ durch 5 teilbar ist und die beiden Zahlen 2^n+n und 2^n-1 teilerfremd sind?

4) Die vier Seiten des Vierecks $ABCD$ seien die Durchmesser von vier Kreisen. Die beiden Kreise durch A schneiden einander ein zweites Mal in A', die beiden durch B schneiden einander ein zweites Mal in B', usw. für C' und D'. Die vier Punkte A', B', C', D' seien paarweise verschieden. Beweise, dass das Viereck $A'B'C'D'$ zum Viereck $ABCD$ ähnlich ist.

5) Jake hat 99 leere Säcke und eine unbegrenzte Anzahl von Bällen. Die Masse jedes Balls ist eine (ganzzahlige) Dreierpotenz. Jake nimmt eine endliche Anzahl von Bällen und verteilt sie so auf die Säcke, dass jeder volle Sack dieselbe Masse hat. Egal wie er die Säcke füllt, hat er sicher k Bälle mit derselben Masse verwendet. Bestimme den größtmöglichen Wert von k.

6) Eine Funktion $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ heißt *loggy*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(i) $f(xy)\equiv f(x)+f(y) \pmod 8$ für alle $x,y\in\mathbb{Z}$, die nicht durch 17 teilbar sind, und
(ii) $f(x+17)\equiv f(x) \pmod 8$ für alle $x\in\mathbb{Z}$.
Untersuche, ob es eine loggy Funktion gibt mit
a) $f(2)=1$, bzw.
b) $f(3)=1$.

7) Für $0\le x\le 1$ und $n=1,2,\dots$ sei

$$f_n(x)=\sqrt[n]{x^n+(1-x)^n}.$$

Beweise

$$f_{n+1}(x)\le f_n(x).$$

1)

2)

3)

4)

5)

6)

7)

8)