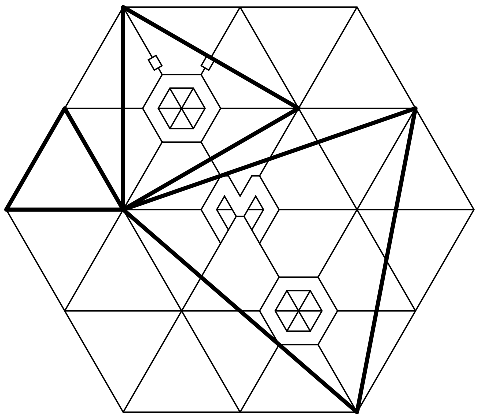


Formelsammlung Geometrie

Birgit Vera Schmidt

9. Juni 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Notation

$d(P, g)$	bezeichnet den Normalabstand des Punktes P zur Geraden g.
$d(P, XY)$	bezeichnet den Normalabstand des Punktes P zur Trägergeraden von XY.
$d(g, h)$	bezeichnet den Normalabstand der Geraden g und h, falls diese parallel sind, und hat andernfalls den Wert 0.
$[ABC]$	bezeichnet die Fläche des Dreiecks ABC.
$[A_1A_2 \ldots A_n]$	bezeichnet die Fläche des Polygons $A_1A_2 \ldots A_n$.

2 Allgemeines

2.1 Symmetralen

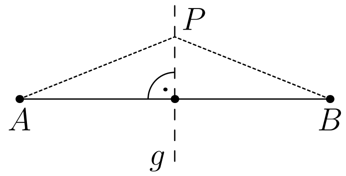


Abbildung 2.1: Eigenschaften von Streckensymmetralen

Satz 2.1 (Eigenschaften von Streckensymmetralen)**.** *Sei g die Streckensymmetrale von AB, also jene Normale auf die Strecke AB, die durch deren Halbierungspunkt geht. Dann enthält g genau jene Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind.*

Sei P ein Punkt auf g, dann folgt also $\overline{PA} = \overline{PB}$. Das Dreieck APB ist folglich gleichschenkelig und g seine Höhe.

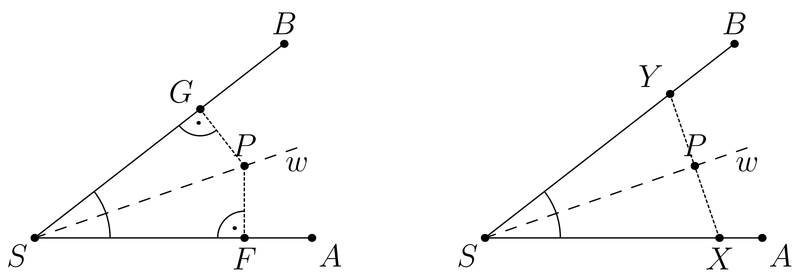


Abbildung 2.2: Eigenschaften von Winkelsymmetralen

Satz 2.2 (Eigenschaften von Winkelsymmetralen)**.** *Sei w die (innere) Winkelsymmetrale von $\sphericalangle ASB$, also jene Gerade durch S, die mit SA und SB den gleichen Winkel einschließt (und zwischen diesen beiden liegt). Dann ist jeder Punkt P auf w gleich weit von AS und BS entfernt (bezüglich des Normalabstandes), also $d(P, AS) = d(P, BS)$.*

Sei P ein Punkt auf w, und seien F und G die Fußpunkte der Höhen von P auf die Trägergeraden von AS und BS. Dann ist das Viereck $SFPG$ ein Deltoid mit rechten Winkeln in F und G.

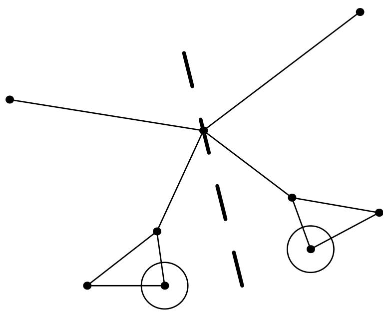
Sei P ein Punkt auf w, und seien X und Y die Schnittpunkte der Normalen auf w durch P mit den Trägergeraden von AS und BS. Dann ist das Dreieck SXY gleichschenkelig und w seine Höhe.

2.2 Spiegelung, Drehung, Streckung, Scherung

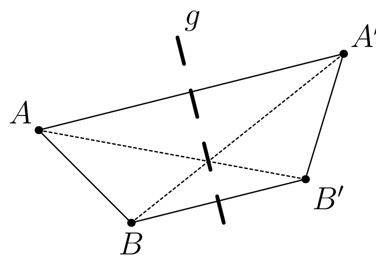
Satz 2.3 (Eigenschaften von Spiegelungen an einer Geraden)**.** *Bei einer Spiegelung an einer Geraden bleiben Strecken und Winkel gleich. Geraden werden wieder zu Geraden, Kreise wieder zu Kreisen.*

Jede Figur ist kongruent zu ihrem Bild unter einer Spiegelung an einer Geraden. Punkte auf der Spiegelungsgeraden selbst fallen mit ihrem eigenen Spiegelbild zusammen.

Seien A' und B' die Spiegelungen der Punkte A und B bezüglich derselben Spiegelungsgeraden g. Dann schneiden die Verbindungen AB' und BA' einander auf g, und $AA'B'B$ ist ein gleichschenkeliges Trapez.

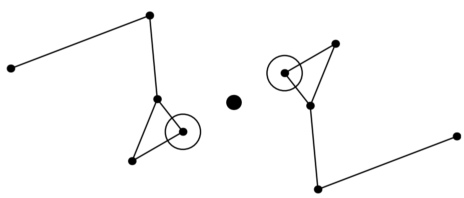


(a) Allgemeines Beispiel

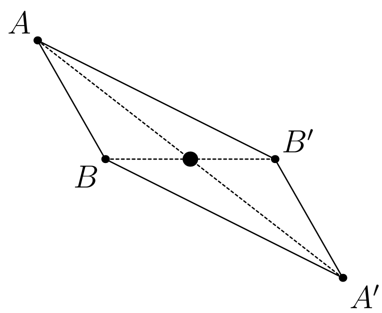


(b) Trapez zweier Punkte und ihrer Spiegelungen

Abbildung 2.3: Eigenschaften von Spiegelungen an einer Geraden



(a) Allgemeines Beispiel



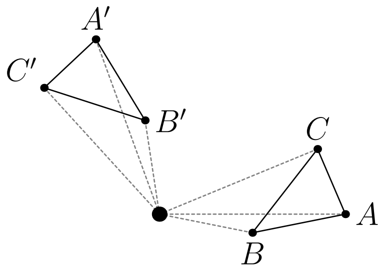
(b) Parallelogramm zweier Punkte und ihrer Spiegelungen

Abbildung 2.4: Eigenschaften von Spiegelungen an einem Punkt

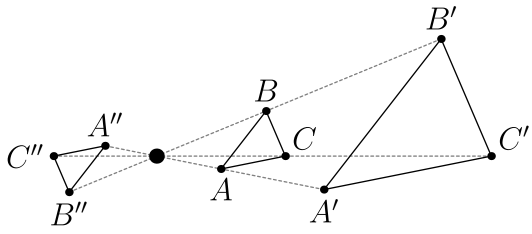
Satz 2.4 (Eigenschaften von Spiegelungen an einem Punkt)**.** *Eine Spiegelung an einem Punkt entspricht einer Rotation um 180° um diesen Punkt. Folglich bleiben Strecken und Winkel gleich, Geraden werden wieder zu Geraden, Kreise wieder zu Kreisen.*

Jede Figur ist kongruent zu ihrem Bild unter einer Spiegelung an einem Punkt.

Seien A' und B' die Spiegelbilder der Punkte A und B bezüglich desselben Spiegelungspunktes P. Dann ist AB parallel zu $A'B'$ und AB' parallel zu $A'B$, also ist $ABA'B'$ ein Parallelogramm.



(a) Drehung



(b) Zentrische Streckung

Abbildung 2.5: Drehung und zentrische Streckung

Satz 2.5 (Eigenschaften von Drehungen)**.** *Bezüglich einer Drehung bleiben Winkel und Strecken erhalten, Geraden werden wieder zu Geraden, Kreise wieder zu Kreisen. Jede Figur ist kongruent zu ihrem Bild unter einer Drehung um einen Punkt.*

Satz 2.6 (Eigenschaften von zentrischen Streckungen)**.** *Bezüglich einer zentrischen Streckung bleiben Winkel erhalten, Geraden werden wieder zu Geraden, Kreise wieder zu Kreisen. Jede Figur ist ähnlich zu ihrem Bild unter einer zentrischen Streckung. Die Verhältnisse von Strecken bleiben erhalten. Flächen verhalten sich zueinander wie das Quadrat des Verhältnisses der Seiten, Volumina wie die dritte Potenz dieses Verhältnisses. Werden also Seiten um einen Faktor s größer (bzw. kleiner), so werden Flächen um einen Faktor s^2 größer (bzw. kleiner) und Volumina um einen Faktor s^3.*

Seien A' und B' die aus A und B durch dieselbe zentrische Streckung entstehenden Punkte, dann ist $A'B'$ parallel zu AB.

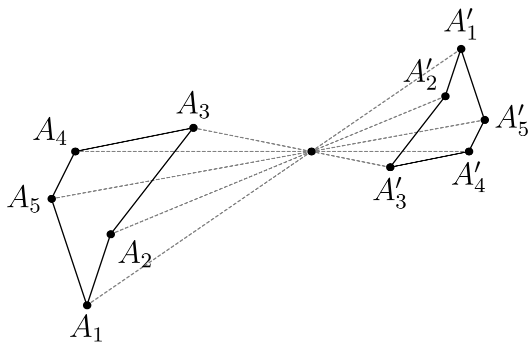
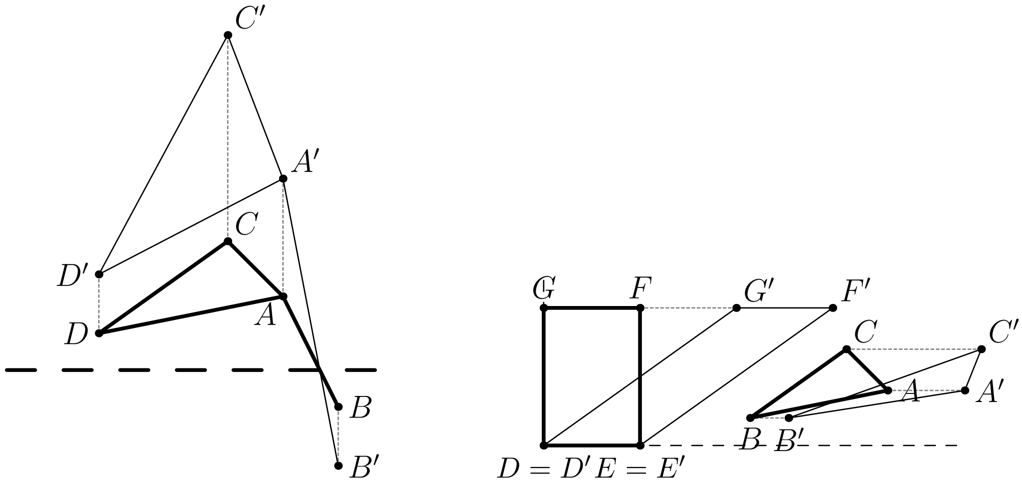


Abbildung 2.6: Gemeinsamer Schnittpunkt ähnlicher Figuren in paralleler Lage

Satz 2.7 (Gemeinsamer Schnittpunkt ähnlicher Figuren)**.** *Sei $A_1A_2 \dots A_n$ eine Figur und sei $A_1'A_2' \dots A_n'$ eine dazu ähnliche Figur, deren Seiten parallel zu den entsprechenden Seiten der ersten Figur sind, also $A_iA_{i+1} \parallel A_i'A_{i+1}'$ für $1 \leq i < n-1$ und $A_1A_n \parallel A_1'A_n'$. Dann entsteht die zweite Figur aus der ersten durch eine zentrische Streckung, und die Verbindungsgeraden einander entsprechender Punkte schneiden einander in einem Punkt, der gleichzeitig das Zentrum der Streckung ist.*

Konkret für $n = 3$: Seien ABC und $A'B'C'$ zwei ähnliche Dreiecke mit $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ und $CA \parallel C'A'$. Dann schneiden die Verbindungen AA', BB' und CC' einander in einem Punkt.



(a) Streckung an einer Geraden (b) Scherung

Abbildung 2.7: Streckung an einer Geraden und Scherung

Satz 2.8 (Eigenschaften von Streckungen an einer Geraden)**.** *Bezüglich einer Streckung in der Ebene an einer Geraden (Dehnung) bleiben Geraden und die Verhältnisse von Flächen erhalten.*

Punkte auf der Geraden, an der gestreckt wird, bleiben unter der Streckung unverändert.

Seien A und B zwei Punkte auf unterschiedlichen Seiten der Geraden, an der gestreckt wird, und seien A' und B' die Bilder, die bei dieser Streckung entstehen. Dann schneiden die Verbindungen AB und $A'B'$ einander auf der Geraden, an der gestreckt wird.

Satz 2.9 (Eigenschaften von Scherungen)**.** *Bezüglich einer Scherung bleiben Geraden und Flächeninhalte erhalten.*

2.3 Allgemeine Sätze

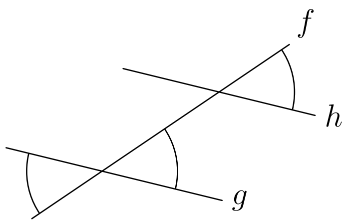
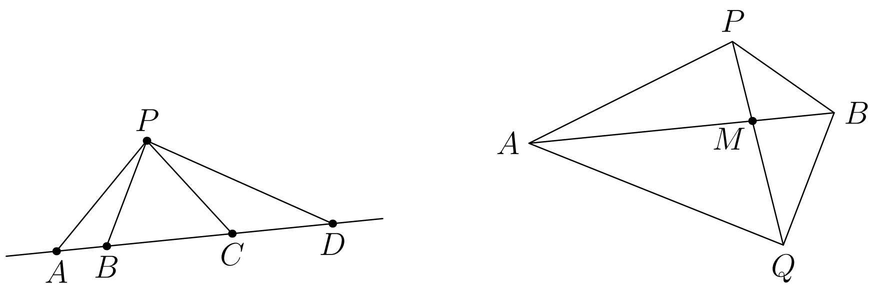


Abbildung 2.8: Parallelwinkelsatz

Satz 2.10 (Parallelwinkelsatz, „Z-Satz“)**.** *Seien g und h zwei parallele Geraden und f eine weitere Gerade, die diese beiden schneidet. Dann schließt f mit beiden denselben Winkel ein.*

Die Umkehrung gilt ebenso: Schließt f mit zwei Geraden den gleichen Winkel ein (auf derselben Seite von f), dann sind diese beiden Geraden parallel.



(a) Gemeinsame Höhe (b) Gemeinsame Seite

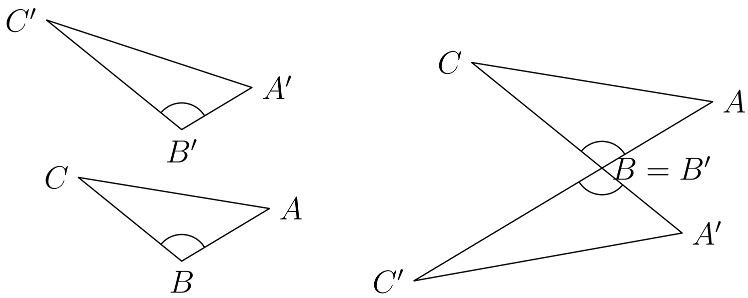
Abbildung 2.9: Gemeinsame Höhe oder Seite

Satz 2.11 (Gemeinsame Höhe)**.** *Wenn vier Punkte A, B, C und D auf einer Geraden liegen, und sei P ein Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt. Dann gilt für die Flächeninhalte:*

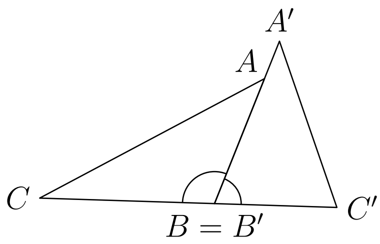
$$[ABP] : [CDP] = \overline{AB} : \overline{CD}$$

Satz 2.12 (Gemeinsame Seite)**.** *Seien PAB und QAB zwei Dreiecke mit einer gemeinsamen Seite AB. Sei M der Schnittpunkt von PQ und AB. Dann gilt für die Flächeninhalte:*

$$[ABP] : [ABQ] = \overline{MP} : \overline{MQ}$$



(a) Allgemein (b) Häufiger Spezialfall



(c) Häufiger Spezialfall

Abbildung 2.10: Gemeinsamer Winkel

Satz 2.13 (Gemeinsamer Winkel)**.** *Wenn die Winkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle A'B'C'$ gleich groß sind oder sich auf* 180° *ergänzen, dann gilt für die Flächeninhalte:*

$$\frac{[ABC]}{[A'B'C']} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{A'B'} \cdot \overline{B'C}}$$

Auch die Umkehrung gilt: Wenn für die Flächeninhalte die obige Beziehung gilt, dann sind die Winkel $\sphericalangle ABC$ *und* $\sphericalangle A'B'C'$ *gleich groß oder ergänzen sich auf* $180°$*.*

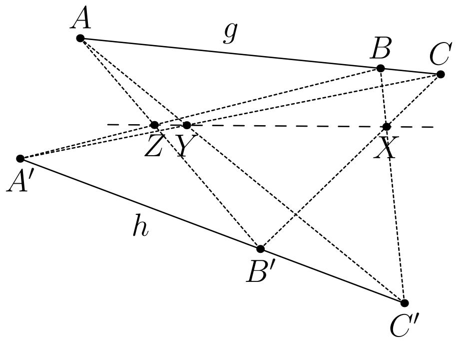


Abbildung 2.11: Satz von Pappos

Satz 2.14 (Satz von Pappos)**.** *Seien g und h zwei Geraden und seien A, B, C drei Punkte auf g und A', B' und C' drei Punkte auf h. Seien weiters X der Schnittpunkt von BC' mit $B'C$, Y der Schnittpunkt von CA' mit $C'A$ und Z der Schnittpunkt von AB' mit $A'B$. Dann liegen X, Y und Z auf einer Geraden.*

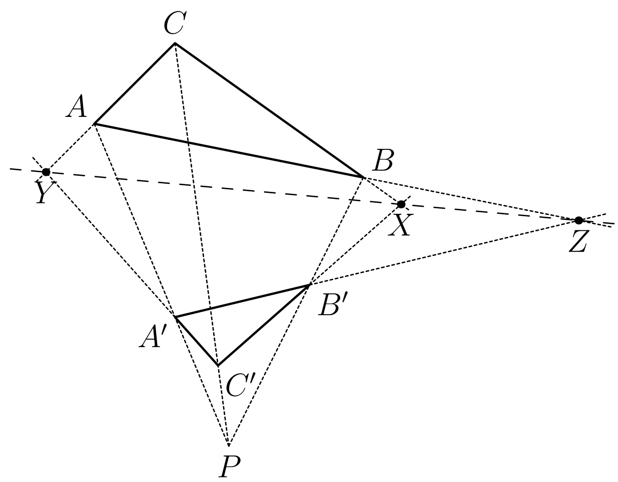


Abbildung 2.12: Satz von Desargues

Satz 2.15 (Satz von Desargues)**.** *Seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke, sodass die Trägergeraden von AA', BB' und CC' einander in einem Punkt P schneiden. Sei weiters X der Schnittpunkt von BC und $B'C'$, Y der Schnittpunkt von CA und $C'A'$ und Z der Schnittpunkt von AB und $A'B'$. Dann liegen X, Y und Z auf einer Geraden.*

Die Umkehrung gilt ebenfalls: Wenn X, Y und Z auf einer Geraden liegen, dann schneiden die Trägergeraden von AA', BB' und CC' einander in einem Punkt.

2.4 Analytisches

2.4.1 Trigonometrische Funktionen

Satz 2.16 (Gegenseitige Darstellung).

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

Satz 2.17 (Symmetrien).

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x \\ \cos(-x) &= \cos x \\ \tan(-x) &= -\tan x \end{aligned}$$

Satz 2.18 (Periodizität).

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin x \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x \\ \tan(x + \pi) &= \tan x \end{aligned}$$

Satz 2.19 (Phasenverschiebungen).

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x \end{aligned}$$

Satz 2.20 (Additionstheoreme).

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \tan(x + y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \\ \tan(x - y) &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x + y) \cdot \sin(x - y) &= \cos^2 y - \cos^2 x \\ \cos(x + y) \cdot \cos(x - y) &= \cos^2 y - \sin^2 x \end{aligned}$$

Satz 2.21 (Doppelwinkelformeln).

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

Satz 2.22 (Halbwinkelformeln).

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \qquad \textit{für } x \in [0, 2\pi] \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \qquad \textit{für } x \in [-\pi, \pi] \end{aligned}$$

Satz 2.23 (Quadrate).

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \\ \tan^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)} \end{aligned}$$

Satz 2.24 (Summen).

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \tan x + \tan y &= \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} \\ \tan x - \tan y &= \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} \end{aligned}$$

Satz 2.25 (Produkte)**.**

$$\begin{aligned}
\sin x \sin y &= \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)\\
\cos x \cos y &= \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)\\
\sin x \cos y &= \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)\\
\tan x \tan y &= \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = -\frac{\tan x - \tan y}{\cot x - \cot y}\\
\cot x \cot y &= \frac{\cot x + \cot y}{\tan x + \tan y} = -\frac{\cot x - \cot y}{\tan x - \tan y}\\
\tan x \cot y &= \frac{\tan x + \cot y}{\cot x + \tan y} = -\frac{\tan x - \cot y}{\cot x - \tan y}\\
\sin x \sin y \sin z &= \frac{1}{4}\left(\sin(x+y-z) + \sin(y+z-x) + \sin(z+x-y) - \sin(x+y+z)\right)\\
\cos x \cos y \cos z &= \frac{1}{4}\left(\cos(x+y-z) + \cos(y+z-x) + \cos(z+x-y) + \cos(x+y+z)\right)\\
\sin x \sin y \cos z &= \frac{1}{4}\left(-\cos(x+y-z) + \cos(y+z-x) + \cos(z+x-y) - \cos(x+y+z)\right)\\
\sin x \cos y \cos z &= \frac{1}{4}\left(\sin(x+y-z) - \sin(y+z-x) + \sin(z+x-y) + \sin(x+y+z)\right)
\end{aligned}$$

Satz 2.26 (Abschätzung für den Sinus)**.**

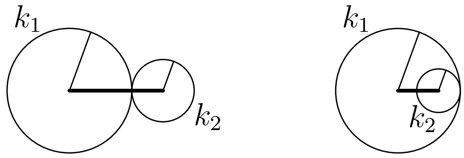
$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi} \qquad \textit{für } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

Satz 2.27 (Wichtige Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen)**.**

α *in* °	α *(rad)*	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
180°	π	0	-1	0

3 Kreise

3.1 Grundlagen



(a) Nebeneinander liegend

(b) Ineinander liegend

Abbildung 3.1: Berührende Kreise

Satz 3.1 (Berührende Kreise)**.** *Seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die einander in einem Punkt berühren. Dann ist der Abstand der Mittelpunkte gleich der Summe der Radien, falls die Kreise nicht ineinander liegen, andernfalls die Differenz der Radien.*

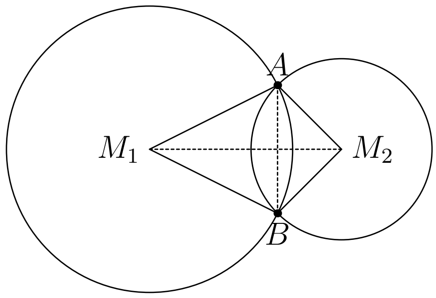


Abbildung 3.2: Schneidende Kreise

Satz 3.2 (Schneidende Kreise)**.** *Seien k_1 und k_2 zwei einander schneidende Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2, und seien A und B die beiden Schnittpunkte der Kreise. Dann gilt:*

- *Die Dreiecke ABM_1 und ABM_2 sind gleichschenkelig.*
- *Die Dreiecke M_1AM_2 und M_1BM_2 sind kongruent.*
- *Das Viereck AM_1BM_2 ist ein Deltoid.*
- *AB steht normal auf M_1M_2.*
- *Falls die beiden Kreise gleichen Radius haben, ist AM_1BM_2 eine Raute.*

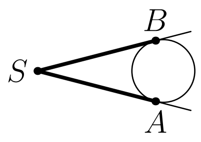
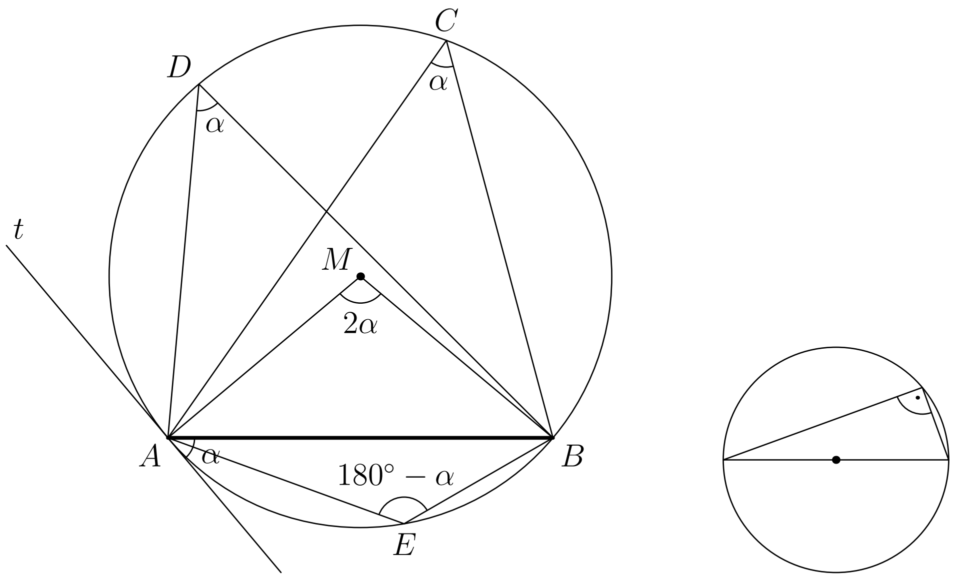


Abbildung 3.3: Gleich lange Tangenten

Satz 3.3 (Eigenschaften von Tangenten, „Eistütensatz“, „Chinesenhütchensatz“)**.** *Seien A und B die Berührpunkte der beiden Tangenten von einem Punkt P an den Kreis k, dann gilt $\overline{PA} = \overline{PB}$.*

3.2 Peripheriewinkelsatz



(a) Peripheriewinkelsatz, Zentriwinkelsatz, Sehnen-Tangentenwinkelsatz

(b) Satz von Thales

Abbildung 3.4: Peripheriewinkelsatz, Zentriwinkelsatz, Sehnen-Tangentenwinkelsatz

Satz 3.4 (Peripheriewinkelsatz)**.** *Sei k ein Kreis, AB eine Sehne und seien C und D Punkte auf dem Kreis, die auf der gleichen Seite der Sehne liegen. Dann gilt $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.*

Sei E ein Punkt auf dem Kreis, der auf der anderen Seite der Sehne liegt. Dann gilt $\sphericalangle AEB = 180° - \sphericalangle ACB$.

Auch die Umkehrungen gelten: Schließt ein Punkt F mit der Sehne AB den Winkel $\sphericalangle ACB$ oder $180° - \sphericalangle ACB$ ein, dann liegt F auf dem Umkreis von ABC auf der gleichen bzw. entgegengesetzten Seiten von AB wie C.

Satz 3.5 (Zentriwinkelsatz)**.** *Sei k ein Kreis, AB eine Sehne, und C ein Punkt auf dem längeren Kreisbogen über dieser Sehne. Dann gilt $\sphericalangle AMB = 2 \cdot \sphericalangle ACB$.*

Auch die Umkehrung gilt: Schließt C mit der Sehne AB den Winkel $\frac{1}{2}\sphericalangle AMB$ ein, dann liegt C auf dem Kreis.

Satz 3.6 (Sehnen-Tangentenwinkelsatz)**.** *Sei k ein Kreis, AB eine Sehne und t die Tangente in A an k. Dann ist der Winkel zwischen der Tangente t und der Sehne AB gleich groß wie der Peripheriewinkel über dieser Sehne.*

Auch die Umkehrung gilt: Schließt eine Gerade durch A mit AB einen Winkel ein, der gleich groß ist wie der Peripheriewinkel über dieser Sehne, dann ist diese Gerade eine Tangente.

Satz 3.7 (Satz von Thales)**.** *Sei AB ein Durchmesser des Kreises k und sei C ein Punkt auf dem Kreis. Dann gilt $\sphericalangle ACB = 90°$.*

Der Satz von Thales ist ein Spezialfall des Peripheriewinkelsatzes (für den Fall, dass die Sehne AB ein Durchmesser ist). Entsprechend gelten auch hier die Umkehrungen.

3.3 Weitere Sätze im Kreis

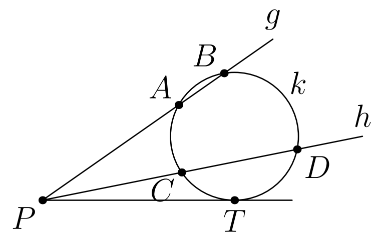


Abbildung 3.5: Potenz eines Punktes

Satz 3.8 (Potenz eines Punktes)**.** *Sei k ein Kreis und P ein Punkt, durch den zwei Geraden g und h gehen, die den Kreis schneiden. Seien A und B die Schnittpunkte der Geraden g mit dem Kreis k, und C und D jene der Geraden h mit dem Kreis k. Dann gilt $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.*

Falls P außerhalb des Kreises liegt, sei weiters T der Berührpunkt einer Tangente von P an den Kreis k. Dann gilt auch $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PT}^2$.

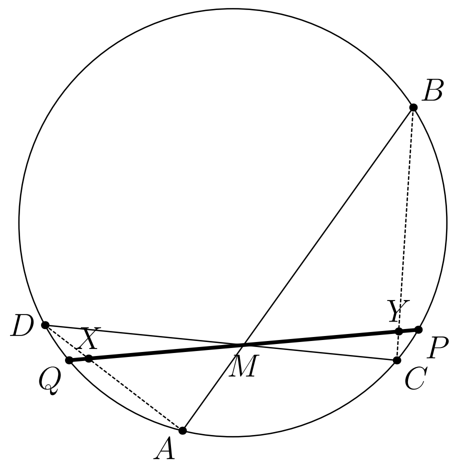


Abbildung 3.6: Schmetterlingssatz

Satz 3.9 (Schmetterlingssatz)**.** *Sei PQ eine Sehne des Kreises k und sei M der Mittelpunkt dieser Sehne. Seien AB und CD zwei weitere Sehnen, die beide durch M gehen. Die Sehnen AD und BC schneiden PQ in den Punkten X und Y. Dann ist M auch der Mittelpunkt von XY.*

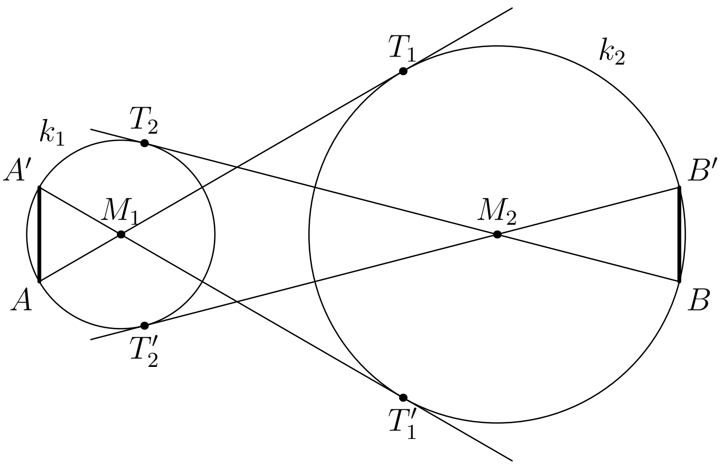


Abbildung 3.7: Netzhautsatz

Satz 3.10 (Netzhautsatz)**.** *Seien k_1 und k_2 zwei einander nicht schneidende Kreise mit Mittelpunkten M_1 und M_2. Seien T_1 und T_1' die Berührpunkte der Tangenten von M_1 an k_2, und seien T_2 und T_2' die Berührpunkte der Tangenten von M_2 an k_1. Die Verlängerungen der Strecken M_1T_1 und M_1T_1' schneiden k_1 in den Punkten A und A', und die Verlängerungen der Strecken M_2T_2 und M_2T_2' schneiden k_2 in B und B'.*

Dann gilt $\overline{AA'} = \overline{BB'}$.

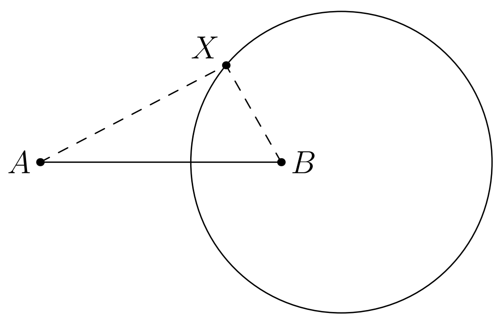


Abbildung 3.8: Kreis des Apollonius

Satz 3.11 (Kreis des Apollonius)**.** *Gegeben seien eine Strecke AB und eine positive reelle Zahl $\lambda \neq 1$. Dann ist die Menge der Punkte X, für die der Quotient der Abstände zu A und B gleich λ ist (also $\overline{AX} : \overline{XB} = \lambda$), ein Kreis.*

Der Radius des Apolloniuskreises beträgt $\frac{\lambda}{|\lambda^2-1|} \cdot \overline{AB}$.

B ist die Inversion des Punktes A am Apolloniuskreis.

3.4 Potenzgeraden

Definition (Potenz eines Punktes)**.** Die Potenz eines Punktes P bezüglich eines Kreises mit Mittelpunkt M und Radius r ist gegeben als $\overline{MP}^2 - r^2$. Sie entspricht also dem Quadrat der Länge der Tangente von P an den Kreis.

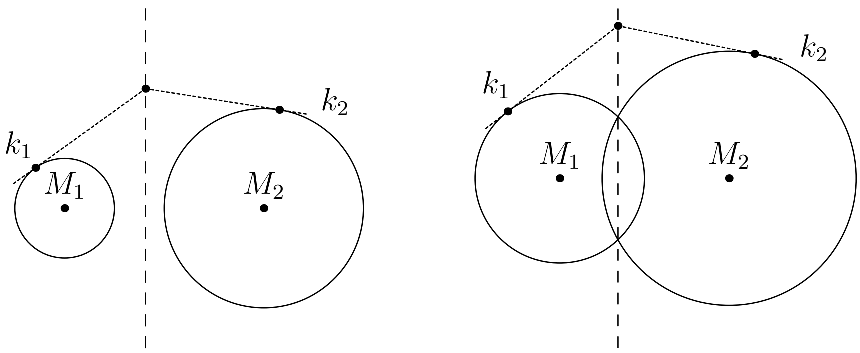


Abbildung 3.9: Potenzgerade

Satz 3.12 (Potenzgerade)**.** *Seien k_1 und k_2 zwei nicht konzentrische Kreise. Dann ist die Menge aller Punkte, die bezüglich beider Kreise dieselbe Potenz haben, eine Gerade.*

Die Potenzgerade verläuft senkrecht zur Verbindungsstrecke der beiden Kreismittelpunkte.

Wenn die Kreise einander schneiden, dann verläuft die Potenzgerade durch die beiden Schnittpunkte. Berühren die Kreise einander, so ist die Potenzgerade die gemeinsame Tangente im Berührpunkt.

Satz 3.13 (Tangenten von Punkten auf der Potenzgeraden)**.** *Seien k_1 und k_2 zwei Kreise, und sei P ein Punkt auf der Potenzgeraden dieser beiden Kreise. Dann sind die Tangenten von P an k_1 und k_2 gleich lang.*

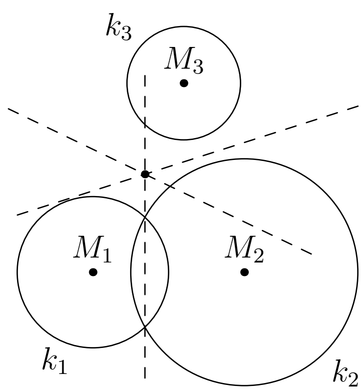


Abbildung 3.10: Schnitt dreier Potenzgeraden

Satz 3.14 (Schnitt dreier Potenzgeraden)**.** *Seien k_1, k_2 und k_3 drei nicht konzentrische Kreise. Folglich besitzen je zwei dieser Kreise eine Potenzgerade. Diese drei Potenzgeraden schneiden einander in einem Punkt.*

4 Dreiecke

Falls nicht anders angegeben, gelten im gesamten Kapitel über Dreiecke folgende Bezeichnungen im Dreieck ABC:

$$
\begin{aligned}
a &= \overline{BC} \\
b &= \overline{CA} \\
c &= \overline{AB} \\
s &= \frac{a+b+c}{2} \\
\alpha &= \sphericalangle BAC \\
\beta &= \sphericalangle CBA \\
\gamma &= \sphericalangle ACB \\
h_a &= d(A, BC) = \text{Höhe auf BC} \\
h_b &= d(B, AC) = \text{Höhe auf AC} \\
h_c &= d(C, AB) = \text{Höhe auf AB}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
I &= \text{Inkreismittelpunkt} \\
r &= \text{Inkreisradius} \\
U &= \text{Umkreismittelpunkt} \\
R &= \text{Umkreisradius} \\
H &= \text{Höhenschnittpunkt} \\
S &= \text{Schwerpunkt} \\
I_A &= \text{Mittelpunkt des Ankreises über } BC \\
I_B &= \text{Mittelpunkt des Ankreises über } AC \\
I_C &= \text{Mittelpunkt des Ankreises über } AB \\
r_A &= \text{Radius des Ankreises über } BC \\
r_B &= \text{Radius des Ankreises über } AC \\
r_C &= \text{Radius des Ankreises über } AB
\end{aligned}
$$

4.1 Grundlagen

Satz 4.1 (Winkelsumme)**.** *Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ist immer gleich* $180°$*.*

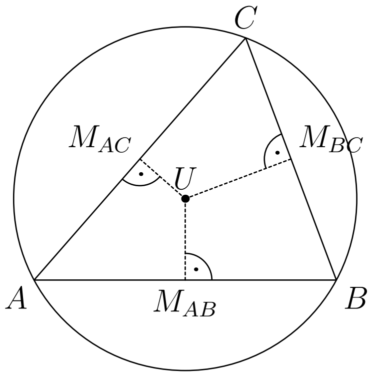
Satz 4.2 (Außenwinkel)**.** *Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich groß wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.*

Satz 4.3 (Eigenschaften des Umkreises)**.** *Jedes Dreieck* ABC *hat genau einen Umkreis, also einen Kreis, der durch alle drei Eckpunkte geht.*

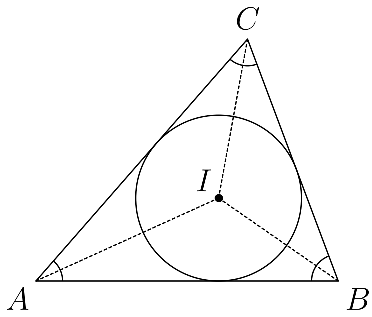
Die drei Streckensymmetralen der Seiten von ABC *schneiden einander in einem Punkt. Dieser ist von den drei Ecken gleich weit entfernt und somit der Umkreismittelpunkt* U*.*

Der Umkreismittelpunkt liegt genau dann außerhalb des Dreieckes, wenn das Dreieck stumpfwinkelig ist.

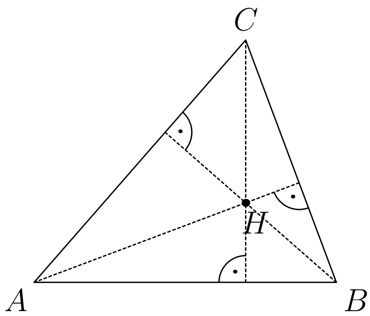
In einem rechtwinkeligen Dreieck fällt der Umkreismittelpunkt mit dem Halbierungspunkt der Hypotenuse zusammen.



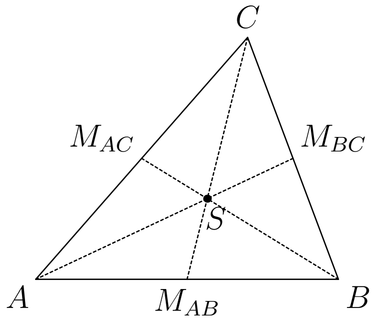
(a) Umkreismittelpunkt



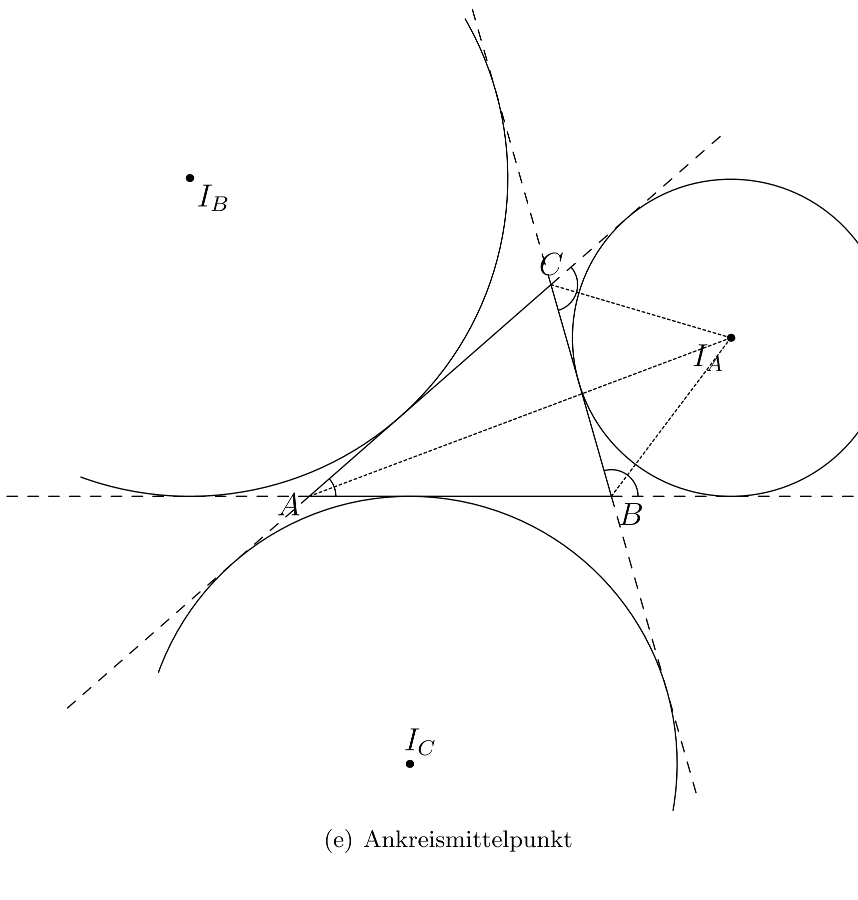
(b) Inkreismittelpunkt



(c) Höhenschnittpunkt



(d) Schwerpunkt



(e) Ankreismittelpunkt

Abbildung 4.1: Wichtige Punkte

Satz 4.4 (Eigenschaften des Inkreises). *Jedes Dreieck ABC hat genau einen Inkreis, also einen Kreis, der alle drei Seiten (von innen) berührt.*

Die drei Winkelsymmetralen der Winkel von ABC schneiden einander in einem Punkt. Dieser ist von den drei Seiten gleich weit entfernt (bezüglich des Normalabstandes) und ist somit der Inkreismittelpunkt I.

Der Inkreismittelpunkt liegt immer innerhalb des Dreiecks.

Satz 4.5 (Eigenschaften des Ankreises). *Jedes Dreieck ABC hat zu jeder Seite einen Ankreis, also einen Kreis, der diese Seite von außen und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten von innen berührt.*

Die Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle BAC$ und die Außenwinkelsymmetralen der beiden anderen Winkel schneiden einander in einem Punkt. Dieser ist von den drei Seiten (oder deren Verlängerungen) gleich weit entfernt (bezüglich des Normalabstandes) und somit der Ankreismittelpunkt I_A zur Seite BC. Analog erhält man die Mittelpunkte der beiden anderen Ankreise.

Die Ankreismittelpunkte liegt immer außerhalb des Dreiecks.

Satz 4.6 (Eigenschaften des Höhenschnittpunktes). *In jedem Dreieck ABC schneiden die Höhen einander in einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt H.*

Der Höhenschnittpunkt liegt außerhalb des Dreiecks genau dann, wenn das Dreieck stumpfwinkelig ist.

In einem rechtwinkeligen Dreieck fällt der Höhenschnittpunkt mit dem der Hypotenuse gegenüberliegenden Eckpunkt zusammen.

Satz 4.7 (Vertauschbarkeit von Eckpunkt und Höhenschnittpunkt). *Wenn H der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks ABC ist, dann ist C der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABH.*

Satz 4.8 (Eigenschaften des Schwerpunktes). *Die drei Schwerlinien eines Dreiecks ABC, also die Verbindungen der Seitenmittelpunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, schneiden einander in einem Punkt, dem Schwerpunkt S.*

Der Schwerpunkt S liegt immer innerhalb des Dreiecks.

Der Schwerpunkt teilt alle drei Schwerlinien im Verhältnis $2:1$, wobei jeweils der Teil zwischen Schwerpunkt und Eckpunkt der längere Teil ist, also zum Beispiel $\overline{SC} = 2 \cdot \overline{SM_{AB}}$ (wobei M_{AB} der Mittelpunkt von AB ist).

Analytisch lässt sich der Schwerpunkt berechnen als $S = \frac{A+B+C}{3}$.

Satz 4.9 (Fläche eines Dreiecks). *Die Fläche $[ABC]$ des Dreiecks ABC berechnet sich als „Grundlinie mal Höhe (auf die gewählte Grundlinie) halbe“, also $[ABC] = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$.*

Alternativ dazu kann man die Fläche auch berechnen als Inkreisradius mal halbem Umfang, also $[ABC] = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = r \cdot s$.

Satz 4.10 (Heronsche Flächenformel). *Sei s der halbe Umfang des Dreiecks ABC. Dann lässt sich die Fläche des Dreiecks berechnen als $[ABC] = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$.*

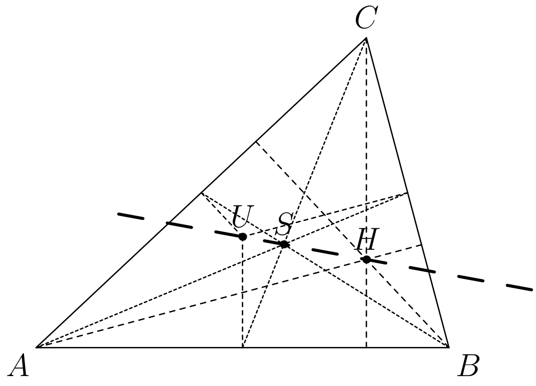


Abbildung 4.2: Eulersche Gerade

Satz 4.11 (Eulersche Gerade)**.** *In jedem Dreieck liegen der Höhenschnittpunkt H, der Schwerpunkt S und der Umkreismittelpunkt U auf einer Geraden. S liegt dabei zwischen H und U, und weiters gilt $\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$.*

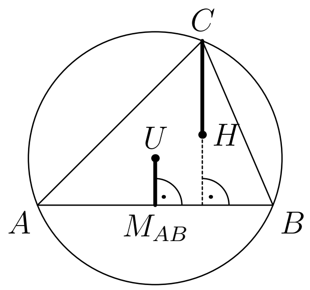


Abbildung 4.3: Verhältnis des oberen Höhenabschnitts zur Umkreismittelpunkthöhe

Satz 4.12 (Verhältnis des oberen Höhenabschnitts zur Umkreismittelpunkthöhe)**.** *Es gilt $\overline{HC} : \overline{UM_{AB}} = 2 : 1$, wobei M_{AB} der Mittelpunkt der Seite AB ist.*

(Analoges gilt für die beiden anderen Seiten.)

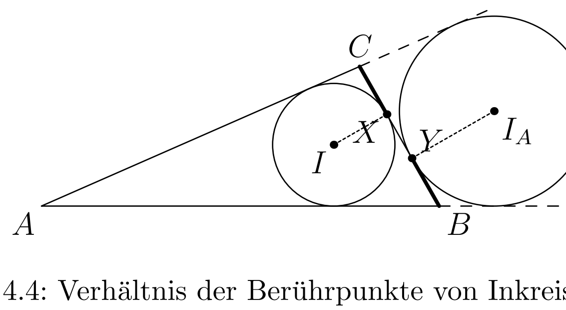


Abbildung 4.4: Verhältnis der Berührpunkte von Inkreis und Ankreis

Satz 4.13 (Verhältnis der Berührpunkte von Inkreis und Ankreis)**.** *Sei X der Berührpunkt des Inkreises mit der Seite BC und Y der Berührpunkt des Ankreises zur Seite BC mit dieser. Dann gilt $\overline{CX} = \overline{BY}$ (und natürlich auch $\overline{BX} = \overline{CY}$).*

(Analoges gilt für die beiden anderen Seiten.)

4.2 Kongruenz und Ähnlichkeit

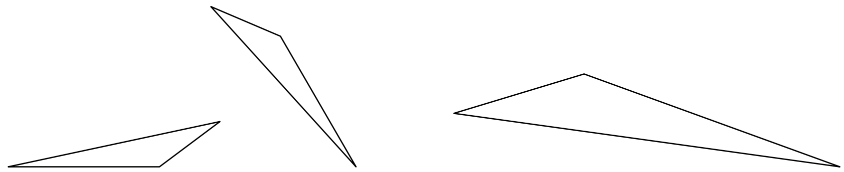


Abbildung 4.5: Zwei kongruente und ein zu diesen ähnliches Dreieck

Satz 4.14 (Kongruenzsätze)**.** *Die Kongruenz zweier Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ist äquivalent zu jeder der folgenden Bedingungen:*

- *Alle drei Paare einander entsprechender Seiten sind gleich lang, also zum Beispiel $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ und $\overline{CA} = \overline{C'A'}$.*
- *Alle drei Paare entsprechender Winkel sind gleich groß und eine Seite ist gleich lang, also zum Beispiel $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, $\sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B'A'$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$ und $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.*
- *Zwei Paare entsprechender Winkel sind gleich groß und eine Seite ist gleich lang, also zum Beispiel $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, $\sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B'A'$ und $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.*
- *Zwei Paare einander entsprechender Seiten sind gleich lang und die von ihnen eingeschlossenen Winkel sind gleich groß, also zum Beispiel $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ und $\sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B'A'$.*
- *Zwei Paare einander entsprechender Seiten sind gleich lang und die der längeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel sind gleich groß, also zum Beispiel $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{AB} \geq \overline{BC}$ und $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$.*
- *Alle drei Paare einander entsprechender Seiten sind zueinander parallel, und eine Seite ist gleich lang, also zum Beispiel $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$, $\overline{CA} \parallel \overline{C'A'}$ und $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.*

Satz 4.15 (Ähnlichkeitssätze)**.** *Die Ähnlichkeit zweier Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ist äquivalent zu jeder der folgenden Bedingungen:*

- *Die Dreiecke sind kongruent.*
- *Alle drei Paare entsprechender Winkel sind gleich groß, also zum Beispiel $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, $\sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B'A'$ und $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$.*
- *Zwei Paare entsprechender Winkel sind gleich groß, also zum Beispiel $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$ und $\sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B'A'$.*
- *Alle drei Verhältnisse einander entsprechender Seiten sind gleich groß, also $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'} = \overline{CA} : \overline{C'A'}$.*
- *Alle drei Paare einander entsprechender Seiten sind zueinander parallel, also $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ und $\overline{CA} \parallel \overline{C'A'}$.*

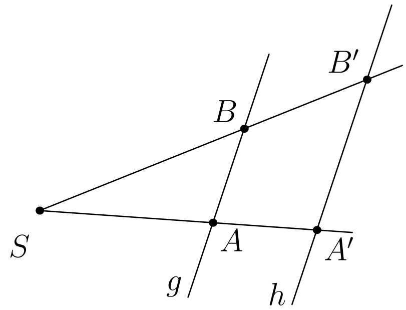


Abbildung 4.6: Strahlensatz

Satz 4.16 (Strahlensatz)**.** *Sei S ein Punkt, von dem zwei Strahlen ausgehen, und seien g und h zwei parallele Geraden, die beide nicht durch S gehen. g schneide die beiden Strahlen in den Punkten A und B , h in den Punkten A' und B'. Dann gilt:*

$$\overline{SA} : \overline{SA'} = \overline{SB} : \overline{SB'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}$$

Umgekehrt gilt: Wenn 5 Punkte die obige Bedinung erfüllen, dann sind die Strecken AB und $A'B'$ zueinander parallel.

4.3 Satzgruppe von Pythagoras

Sei ABC ein rechtwinkeliges Dreieck mit rechtem Winkel in C. Sei $c = \overline{AB}$ die Länge der Hypotenuse und seien a und b die Längen der Katheten BC und AC.

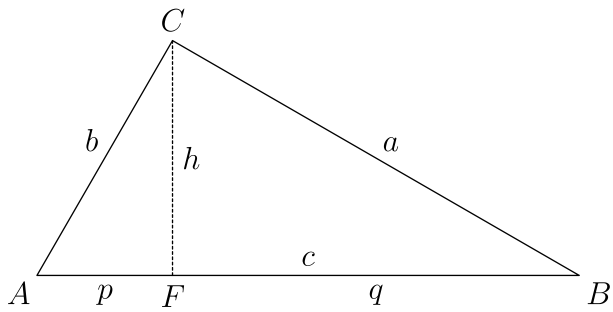


Abbildung 4.7: Satzgruppe von Pythagoras

Satz 4.17 (Satz von Pythagoras)**.** *In diesem Dreieck gilt $a^2 + b^2 = c^2$.*

Die Umkehrung gilt ebenso: Wenn in einem Dreieck der Satz des Pythagoras gilt, dann ist das Dreieck rechtwinkelig.

Satz 4.18 (Höhensatz)**.** *Sei F der Fußpunkt der Höhe auf AB, h die Länge dieser Höhe, $p = \overline{AF}$ und $q = \overline{FB}$. Dann gilt $h^2 = p \cdot q$.*

Die Umkehrung gilt ebenso: Gilt in einem Dreieck der Höhensatz, so ist das Dreieck rechtwinkelig.

Satz 4.19 (Kathetensatz)**.** *Weiters gilt $b^2 = p \cdot c$ und $a^2 = q \cdot c$.*

4.4 Sätze im Dreieck

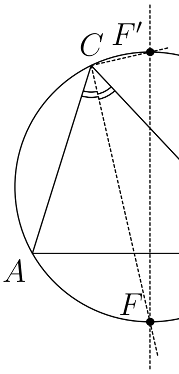
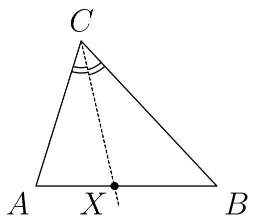


Abbildung 4.8: Südpolsatz

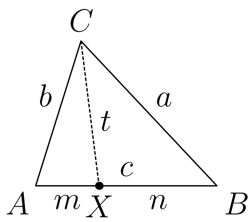
Satz 4.20 (Südpolsatz)**.** *Sei ABC ein Dreieck. Dann schneiden die Streckensymmetrale von AB und die Winkelsymmetrale von $\sphericalangle ACB$ einander auf dem Umkreis des Dreiecks.*

Auch die Außenwinkelsymmetrale von $\sphericalangle ACB$ und die Streckensymmetrale von AB schneiden einander auf dem Umkreis.

Die Umkehrung gilt ebenfalls: Seien F und F' die Schnittpunkte der Streckensymmetrale von AB mit dem Umkreis von ABC, dann halbieren CF und CF' den Winkel bzw. Außenwinkel in C.



(a) Winkelsymmetrale



(b) Satz von Stewart

Abbildung 4.9: Teilungsverhältnisse von Ecktransversalen

Satz 4.21 (Teilungsverhältnis der Winkelsymmetrale)**.** *Sei ABC ein Dreieck und X der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale in C mit der Seite AB. Dann gilt $\overline{AX} : \overline{XB} = \overline{AC} : \overline{CB}$.*

Sei X der Schnittpunkt der Außenwinkelsymmetrale in C mit der Verlängerung der Seite AB, dann gilt dasselbe Verhältnis.

Satz 4.22 (Satz von Stewart)**.** *Sei ABC ein Dreieck, g eine Gerade durch C und X der Schnittpunkt von g mit der Seite AB (wobei g die Seite AB zwischen A und B schneidet). Sei $m = \overline{AX}$, $n = \overline{XB}$, $t = \overline{CX}$, und wie gewohnt $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB} = m + n$. Dann gilt $c(t^2 + mn) = ma^2 + nb^2$, oder umgeformt $t^2 = \frac{ma^2+nb^2}{m+n} - mn$.*

Satz 4.23 (Satz von Steiner-Lehmus)**.** *Jedes Dreieck mit zwei gleich langen Winkelsymmetralen ist gleichschenkelig.*

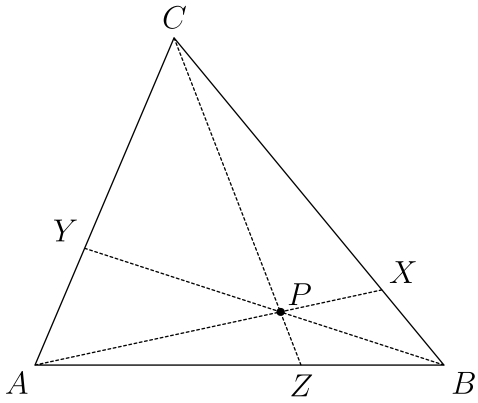


Abbildung 4.10: Satz von Ceva, Satz von Euler-Gergonne

Satz 4.24 (Satz von Ceva)**.** *Sei ABC ein Dreieck, P ein Punkt im Inneren des Dreiecks, und seien X, Y und Z die Schnittpunke der Verlängerungen von AP mit BC, von BP mit CA und von CP mit AB. Dann gilt:*

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1$$

Auch die Umkehrung gilt: Falls für drei Punkte X, Y und Z auf BC, CA und AB die obige Gleichung gilt, dann schneiden die Verbindungen AX, BY und CZ einander in einem Punkt.

Der Satz von Ceva gilt auch für Punkte außerhalb des Dreiecks, allerdings muss man dabei gerichtete Teilverhältnisse verwenden wie beim Satz von Menelaos (Satz 4.28).

Satz 4.25 (Satz von Ceva in Sinus-Darstellung)**.** *Sei ABC ein Dreieck, P ein Punkt im Inneren des Dreiecks, und seien X, Y und Z die Schnittpunke der Verlängerungen von AP mit BC, von BP mit CA und von CP mit AB. Dann gilt:*

$$\frac{\sin\sphericalangle BAX}{\sin\sphericalangle CAX} \cdot \frac{\sin\sphericalangle ACZ}{\sin\sphericalangle BCZ} \cdot \frac{\sin\sphericalangle CBY}{\sin\sphericalangle ABY} = 1$$

Auch die Umkehrung gilt: Falls für drei Punkte X, Y und Z auf BC, CA und AB die obige Gleichung gilt, dann schneiden die Verbindungen AX, BY und CZ einander in einem Punkt.

Satz 4.26 (Satz von Euler-Gergonne)**.** *Sei ABC ein Dreieck, P ein Punkt im Inneren des Dreiecks, und seien X, Y und Z die Schnittpunke der Verlängerungen von AP mit BC, von BP mit CA und von CP mit AB. Sei weiters $u = \overline{AP} : \overline{PX}$, $v = \overline{BP} : \overline{PY}$ und $w = \overline{CP} : \overline{PZ}$. Dann gilt:*

$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w} = 1$$

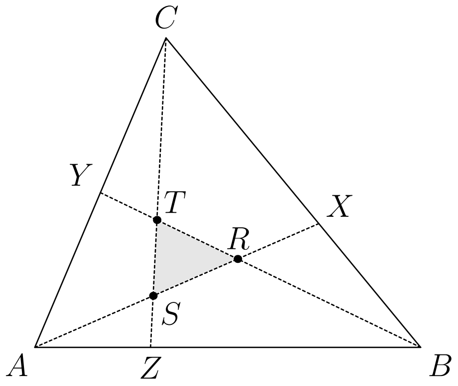


Abbildung 4.11: Satz von Routh

Satz 4.27 (Satz von Routh)**.** *Sei ABC ein Dreieck und seien X, Y und Z drei beliebige Punkte auf BC, CA und AB, sodass die Verbindungen AX, BY und CZ ein Dreieck RST im Inneren von ABC einschließen. Sei $x = \overline{BX} : \overline{XC}$, $y = \overline{CY} : \overline{YA}$ und $z = \overline{AZ} : \overline{ZB}$. Dann gilt für das Verhältnis der Flächen:*

$$\frac{[RST]}{[ABC]} = \frac{(1 - xyz)^2}{(xy + y + 1)(yz + y + 1)(zx + z + 1)}$$

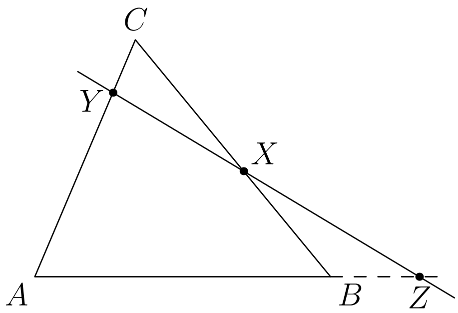


Abbildung 4.12: Satz von Menelaos

Satz 4.28 (Satz von Menelaos)**.** *Für diesen Satz benötigen wir zuerst den Begriff des gerichteten Teilverhältnisses. Dieses ist betragsmäßig gleich dem normalen Teilverhältnis $\overline{AZ} : \overline{ZB}$, ist aber negativ genau dann, wenn AZ und ZB entgegengesetzt orientiert sind, was wiederum genau dann eintritt, wenn Z nicht zwischen A und B liegt.*

Sei ABC ein Dreieck und g eine Gerade, die die Seiten BC, CA und AB (oder ihre Verlängerungen) in X, Y und Z schneidet. Dann gilt:

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = -1$$

Auch die Umkehrung gilt: Wenn für drei Punkte X, Y und Z auf den Seiten eines Dreiecks ABC die obige Gleichung gilt, dann sind X, Y und Z kollinear.

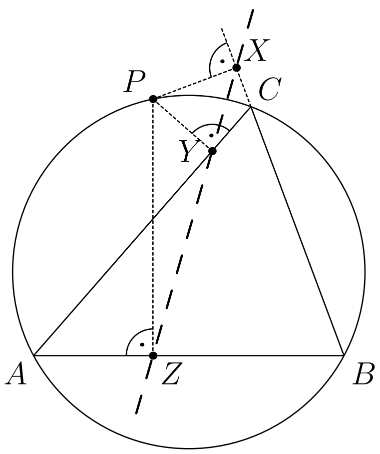


Abbildung 4.13: Simsonsche Gerade

Satz 4.29 (Simsonsche Gerade)**.** *Sei P ein Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC und seien X, Y und Z die Fußpunkte der Höhen von P auf die Seiten des Dreiecks. Dann liegen X, Y und Z auf einer Geraden.*

Auch die Umkehrung gilt: Wenn die Fußpunkte der Höhen von P auf die Dreiecksseiten auf einer Geraden liegen, dann liegt P auf dem Umkreis des Dreiecks.

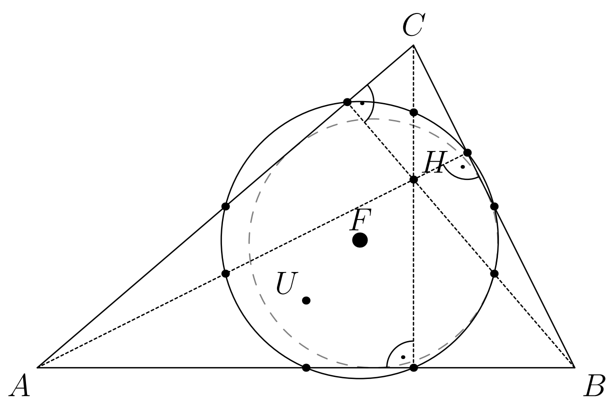


Abbildung 4.14: Feuerbach-Kreis

Satz 4.30 (Feuerbach-Kreis, Neun-Punkte-Kreis, Euler-Kreis)**.** *Die Seitenmittelpunkte, die Höhenfußpunkte und die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte (Verbindungen von H zu den Eckpunkten) liegen auf einem Kreis. Der Mittelpunkt F dieses Kreises liegt auf der Eulerschen Geraden und halbiert HU.*

Der Radius des Feuerbach-Kreises ist halb so groß wie der Umkreisradius.

Der Inkreis berührt den Feuerbachkreis von innen in einem Punkt. (Dieser Punkt wird auch als Feuerbach-Punkt des Kreises bezeichnet.) Außerdem berührt der Feuerbachkreis alle drei Ankreise von außen jeweils in einem Punkt.

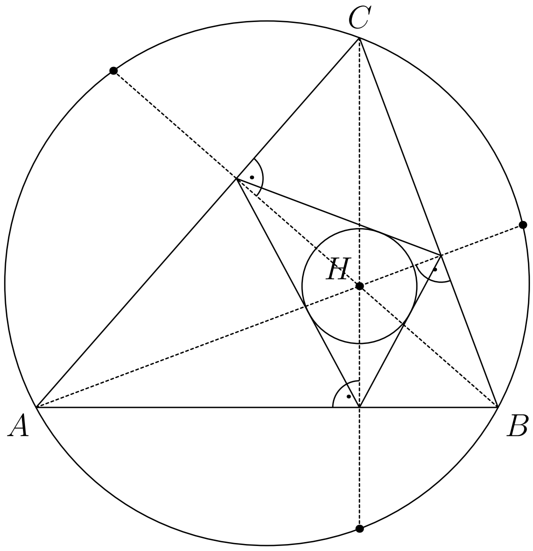


Abbildung 4.15: Inkreis des Höhenfußpunktdreiecks und Spiegelung des Höhenfußpunktes

Satz 4.31 (Inkreis des Höhenfußpunktdreiecks)**.** *Die Höhen in einem* spitzwinkeligen *Dreieck halbieren die Innenwinkel des Höhenfußpunktdreiecks. Folglich ist der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks gleichzeitig der Inkreismittelpunkt des Höhenfußpunktdreiecks.*

Satz 4.32 (Spiegelung des Höhenfußpunktes)**.** *Spiegelt man in einem* spitzwinkeligen *Dreieck den Höhenschnittpunkt an den Seiten, so liegen die Bildpunkte auf dem Umkreis des Dreiecks.*

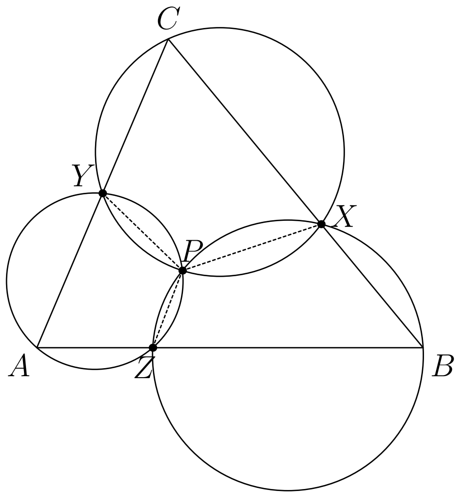


Abbildung 4.16: Miquelscher Punkt

Satz 4.33 (Miquelscher Punkt)**.** *Sei ABC ein Dreieck und seien X, Y und Z drei beliebige Punkte auf BC, CA und AB. Dann schneiden die Umkreise von AYZ, BZX und CXY einander in einem Punkt.*

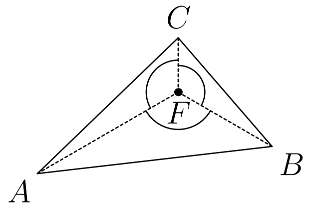


Abbildung 4.17: Fermat-Punkt

Satz 4.34 (Fermat-Punkt)**.** *Sei ABC ein Dreieck, in dem alle Winkel kleiner als $120°$ sind, und sei P ein Punkt im Inneren, sodass $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$ minimal ist. Dann gilt $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = 120°$.*

Auch die Umkehrung gilt: Ist P ein Punkt im Inneren eines Dreiecks, dessen Winkel alle kleiner als $120°$ sind, dann ist $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$ minimal.

Der Fermat-Punkt ist eindeutig.

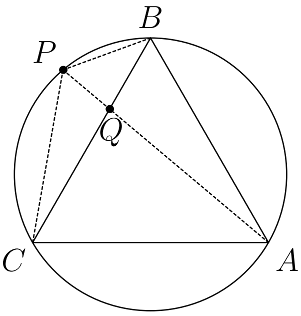


Abbildung 4.18: Punkt auf dem Umkreis eines gleichseitigen Dreiecks

Satz 4.35 (Punkt auf dem Umkreis eines gleichseitigen Dreiecks)**.** *Sei P ein Punkt auf dem Umkreis eines gleichseitigen Dreiecks ABC, der nicht mit einem Eckpunkt zusammenfällt. AP schneide die Seite BC in Q. Dann gilt $\overline{PB} + \overline{PC} = \overline{PA}$ und $\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}$.*

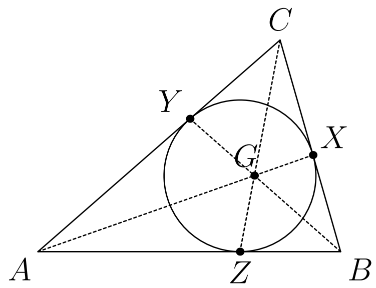


Abbildung 4.19: Gergonne-Punkt

Satz 4.36 (Gergonne-Punkt)**.** *Sei ABC ein Dreieck und seien X, Y und Z die Berührpunkte des Inkreises mit den Seiten BC, CA und AB. Dann schneiden die Verbindungen AX, BY und CZ einander in einem Punkt G.*

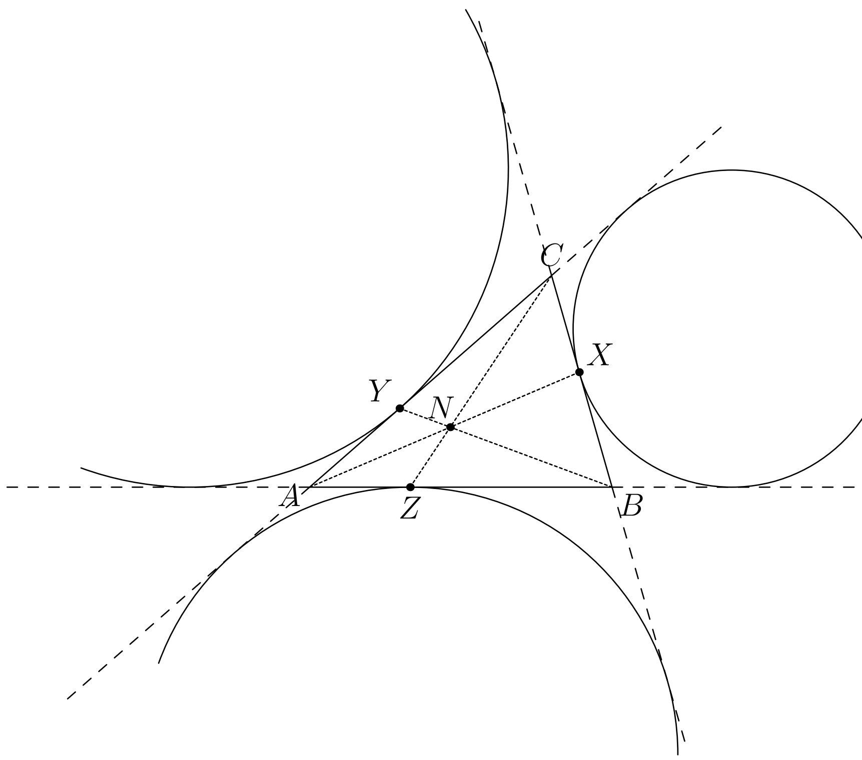


Abbildung 4.20: Nagel-Punkt

Satz 4.37 (Nagel-Punkt)**.** *Sei ABC ein Dreieck und seien X, Y und Z die Berührpunkte der Ankreise mit den Seiten BC, CA und AB. Dann schneiden die Verbindungen AX, BY und CZ einander in einem Punkt N.*

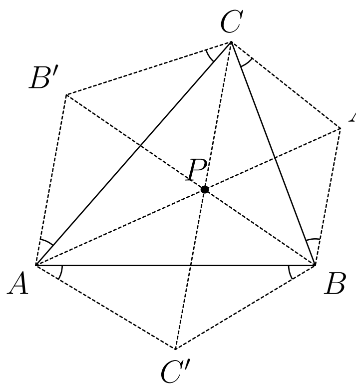


Abbildung 4.21: Kiepert-Dreieck

Satz 4.38 (Kiepert-Dreieck)**.** *Über den Seiten des Dreiecks ABC werden drei zueinander ähnliche gleichschenkelige Dreiecke ABC', $AB'C$ und $A'BC$ errichtet, wobei die Punkte A', B' und C' jeweils den Basen in den gleichschenkeligen Dreiecken gegenüberliegen. Dann schneiden die Verbindungen AA', BB' und CC' einander in einem Punkt P.*

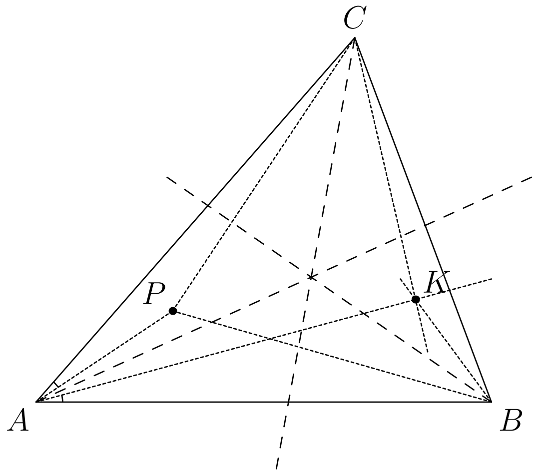


Abbildung 4.22: Isogonal konjugierter Punkt

Satz 4.39 (Isogonal konjugierter Punkt)**.** *Sei P ein Punkt im Inneren des Dreiecks ABC. Spiegelt man die Trägergeraden von AP, BP und CP an den Winkelsymmetralen der Winkel in A, B und C, so schneiden diese Spiegelbilder einander in einem Punkt.*

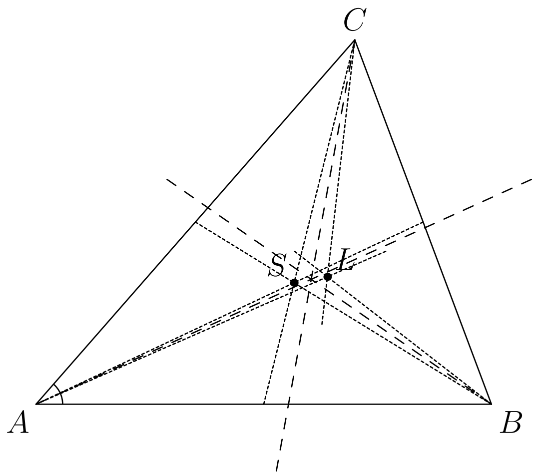


Abbildung 4.23: Lemoine-Punkt

Definition (Symmediane)**.** Das Spiegelbild einer Schwerlinie an der Winkelsymmetrale, die vom gleichen Eck ausgeht, nennt man Symmediane.

Satz 4.40 (Lemoine-Punkt)**.** *Die drei Symmedianen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt L. Dieser ist per definitionem der isogonal konjugierte Punkt zum Schwerpunkt.*

4.5 Analytisches

Alle Bezeichnungen seien weiterhin wie am Anfang des Kapitels auf Seite 17 festgelegt, und sei weiters $F = [ABC]$ die Fläche von ABC. Manche Formeln sind aus Platzgründen nur für eine der drei Seiten angegeben, gelten aber natürlich auch für die beiden anderen.

4.5.1 Das Wichtigste auf einen Blick

$$|a-b| < c < a+b$$
$$|b-c| < a < b+c$$
$$|c-a| < b < c+a$$
$$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$abc = 4Rrs$$
$$ab+bc+ca = s^2 + 4Rr + r^2$$
$$a+b+c = 2s$$
$$F = rs$$
$$R \geq 2r \qquad \text{mit Gleichheit genau im gleichseitigen Dreieck}$$
$$\overline{IU}^2 = R^2 - 2Rr$$

4.5.2 Beziehungen zwischen Längen und Winkeln

Satz 4.41 (Winkelsumme).

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$$

Satz 4.42 (Sinussatz).

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Satz 4.43 (Erweiterter Sinussatz).

$$a = 2R\sin\alpha$$
$$b = 2R\sin\beta$$
$$c = 2R\sin\gamma$$
$$R = \frac{abc}{4F}$$

Satz 4.44 (Tangentensatz).

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\cot\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}$$
$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\tan\frac{\alpha-\gamma}{2}} = \frac{\cot\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\gamma}{2}}$$
$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{\tan\frac{\beta+\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta-\alpha}{2}} = \frac{\cot\frac{\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Satz 4.45 (Projektionssatz).

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$
$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$$
$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

Satz 4.46 (Cosinussatz).

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \qquad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \qquad c^2 + 2ab\cos\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma \qquad \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad a^2 + 2bc\cos\alpha = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\gamma \qquad \cos\beta = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \qquad b^2 + 2ca\cos\beta = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

Satz 4.47 (Winkelbeziehungen).

$$\begin{aligned}
\sin\gamma &= \sin(\alpha+\beta) \\
\cos\gamma &= -\cos(\alpha+\beta) \\
\tan\gamma &= -\tan(\alpha+\beta) \\
\cot\gamma &= -\cot(\alpha+\beta) \\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\
\cos\frac{\gamma}{2} &= \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\
\tan\frac{\gamma}{2} &= \cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\
\cot\frac{\gamma}{2} &= \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(\beta-\gamma) &= 2\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha \\
&= \sin\alpha - 2\cos\beta\sin\gamma \\
\cos(\beta-\gamma) &= 2\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha \\
&= 2\sin\beta\sin\gamma - \cos\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) &= \frac{\sin\beta - \sin\gamma}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \\
\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) &= \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{2\cos\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma &= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma &= 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\
\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma &= \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma
\end{aligned}$$

$$\cot\alpha\cot\beta + \cot\beta\cot\gamma + \cot\gamma\cot\alpha = 1$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2} = 1$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2} = \frac{s}{r}$$

Satz 4.48 (Beziehungen von Winkeln mit Längen).

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma &= \frac{s}{R} \\
\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma &= 1 + \frac{r}{R} \\
\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma &= \frac{abc}{2R^3} \\
\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma &= \frac{abc}{8R^3} = \frac{rs}{2R^3} = \frac{1}{4}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)
\end{aligned}$$

Satz 4.49 (Mollweidesche Formeln).

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$
$$\frac{c+a}{b} = \frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \qquad \frac{c-a}{b} = \frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$$
$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Satz 4.50 (Halbwinkelsätze).

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

Satz 4.51 (Formeln mit dem halben Umfang).

$$s-a = \frac{b+c-a}{2}$$
$$s-b = \frac{c+a-b}{2}$$
$$s-c = \frac{a+b-c}{2}$$

$$(s-b)+(s-c) = a$$
$$(s-c)+(s-a) = b$$
$$(s-a)+(s-b) = c$$

$$(s-a)+(s-b)+(s-c) = s$$

$$s = 4R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$
$$s-a = 4R\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

Satz 4.52 (Flächeninhalt).

$$
\begin{aligned}
F &= \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(c+a-b)\,(a+b-c)} \\
F &= \frac{1}{4}\sqrt{2\,(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4)} \\
F &= \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \\
F &= \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \\
F &= 2R^2\sin\,\alpha\,\sin\,\beta\,\sin\,\gamma \\
F &= \frac{abc}{4R} \\
F &= rs = r_a\,(s-a) = r_b\,(s-b) = r_c\,(s-c) \\
F &= \sqrt{rr_ar_br_c} \\
F &= 4rR\cos\,\frac{\alpha}{2}\,\cos\,\frac{\beta}{2}\,\cos\,\frac{\gamma}{2} \\
F &= s^2\tan\,\frac{\alpha}{2}\,\tan\,\frac{\beta}{2}\,\tan\,\frac{\gamma}{2}
\end{aligned}
$$

Satz 4.53 (In- und Ankreisradien).

$$
\begin{aligned}
r &= (s-a)\tan\frac{\alpha}{2} = (s-b)\tan\frac{\beta}{2} = (s-c)\tan\frac{\gamma}{2} \\
r &= 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = s\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} \\
r &= R\,(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1) \\
r &= \frac{F}{s} = \frac{abc}{4Rs} \\
r &= \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c-a)\,(c+a-b)\,(a+b-c)}{a+b+c}} \\
r &= \frac{a}{\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\cot\frac{\gamma}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}} = \frac{c}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}} \\
r_a &= s\tan\frac{\alpha}{2} = (s-b)\tan\frac{\gamma}{2} = (s-c)\tan\frac{\beta}{2} \\
r_a &= 4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = (s-a)\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2} \\
r_a &= R\,(-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+1) \\
r_a &= \frac{F}{s-a} = \frac{abc}{4R\,(s-a)} \\
r_a &= \sqrt{\frac{s\,(s-b)\,(s-c)}{s-a}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)\,(c+a-b)\,(a+b-c)}{b+c-a}}
\end{aligned}
$$

$$ab + bc + ca = s^2 + r^2 + 4rR$$
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

Satz 4.54 (Höhen)**.**

$$\begin{aligned}
h_a &= b\sin\gamma = c\sin\beta = \frac{2F}{a} = 2R\sin\beta\sin\gamma \\
h_b &= c\sin\alpha = a\sin\gamma = \frac{2F}{b} = 2R\sin\gamma\sin\alpha \\
h_c &= a\sin\beta = b\sin\alpha = \frac{2F}{c} = 2R\sin\alpha\sin\beta \\
h_a &= \frac{a}{\cot\beta + \cot\gamma} \\
h_b &= \frac{b}{\cot\gamma + \cot\alpha} \\
h_c &= \frac{c}{\cot\alpha + \cot\beta} \\
h_a &= \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\
h_b &= \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\
h_c &= \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}
\end{aligned}$$

$$F = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$
$$h_a + h_b + h_c = \frac{s^2 + 4Rr + r^2}{2R}$$
$$h_ah_b + h_bh_c + h_ch_a = \frac{2rs^2}{R}$$
$$h_ah_bh_c = \frac{2r^2s^2}{R}$$

Satz 4.55 (Schwerlinien)**.** *Seien* $s_a = \overline{AM_{BC}}$, $s_b = \overline{BM_{CA}}$ *und* $s_c = \overline{CM_{AB}}$ *die Längen der Schwerlinien.*

$$\begin{aligned}
s_a &= \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + bc\cos\alpha} \\
s_b &= \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + a^2 + 2ca\cos\beta} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + ca\cos\beta} \\
s_c &= \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma} = \sqrt{\frac{c^2}{4} + ab\cos\gamma} \\
s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 &= \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)
\end{aligned}$$

Satz 4.56 (Winkelsymmetralen). *Seien w_a, w_b und w_c die Längen der von A, B und C ausgehenden Winkelsymmetralen, also jeweils der Abstand des Eckpunktes zum Schnittpunkt der Winkelsymmetralen mit der gegenüberliegenden Seite.*

$$\begin{aligned}
w_a &= \sqrt{bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)} = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c} = \frac{2F}{a\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}\\
w_b &= \sqrt{ca\left(1-\frac{b^2}{(c+a)^2}\right)} = \frac{2ca\cos\frac{\beta}{2}}{c+a} = \frac{2F}{b\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}\\
w_c &= \sqrt{ab\left(1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right)} = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b} = \frac{2F}{c\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}
\end{aligned}$$

$$\frac{3}{2}s < m_a + m_b + m_c < 2s$$

Satz 4.57 (Beziehungen von Seitenlängen und Radien).

$$\begin{aligned}
abc &= 4Rrs\\
ab+bc+ca &= s^2+4Rr+r^2\\
a+b+c &= 2s\\
a^2+b^2+c^2 &= 2(s^2-4Rr-r^2)\\
a^3+b^3+c^3 &= 2s(s^2-6Rr-3r^2)
\end{aligned}$$

Satz 4.58 (Abstände der besonderen Punkte im Dreieck). *Sei r_h der Umkreisradius des Höhenfußpunktdreiecks.*

$$\begin{aligned}
\overline{IU}^2 &= R^2 - 2Rr\\
\overline{UH}^2 &= 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)\\
&= R^2 - 4Rr_h\\
\overline{IH}^2 &= 2r^2 - 4R^2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\\
\overline{SH}^2 &= 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2)\\
\overline{US}^2 &= R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)\\
&= \frac{1}{4}\overline{SH}^2\\
\overline{SI}^2 &= r^2 - \frac{1}{12}(a+b+c)^2 + \frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2)
\end{aligned}$$

Satz 4.59 (Winkel HCU). *In einem Dreieck ABC mit den obigen Bezeichnungen gilt $\sphericalangle HCU = |\alpha-\beta|$.*

4.5.3 Wichtige Ungleichungen im Dreieck

Satz 4.60 (Dreiecksungleichung).

$$
\begin{aligned}
|a-b| &< c < a+b\\
|b-c| &< a < b+c\\
|c-a| &< b < c+a
\end{aligned}
$$

Satz 4.61 (Dreiecksungleichung mit dem halben Umfang).

$$
\begin{aligned}
s &> a\\
s &> b\\
s &> c
\end{aligned}
$$

Satz 4.62 (Ungleichungen mit den Radien).

$$
\begin{aligned}
R &\geq 2r \qquad \textit{mit Gleichheit genau im gleichseitigen Dreieck}\\
2s &\leq 3\sqrt{3}R
\end{aligned}
$$

Satz 4.63 (Ungleichungen mit den Winkeln).

$$
\begin{aligned}
1 &< \sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}\\
0 &< \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}\\
0 &< \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}\\
1 &< \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leq \frac{3}{2}\\
-1 &< \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma \leq \frac{1}{8}\\
2 &< \cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}\\
0 &< \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}\\
0 &< \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}
$$

Satz 4.64 (Ungleichungen mit verschiedenen Abständen).

$$
\begin{aligned}
s^2 &\geq r(16R-5r) \geq r(15R-3r) \geq r(14R-r) \geq \frac{27Rr}{2} \geq r(10R+7r) \geq 27r^2\\
s^2 &\leq 4R^2+4Rr+3r^2 \leq (2R+r)^2+\frac{R^2}{2} \leq \frac{(4R+r)^2}{3} \leq \frac{27R^2}{4}
\end{aligned}
$$

4.5.4 Formeln zum Inkreismittelpunkt

Seien D, E und F die Schnittpunkte der Winkelsymmetralen in A, B und C mit den gegenüberliegenden Seiten, seien $w_a = \overline{AD}$, $w_b = \overline{BE}$ und $w_c = \overline{CF}$ die Längen der Winkelsymmetralen, und seien R, S, und T die Fußpunkte der Höhen des Inkreismittelpunktes I auf die Seiten BC, CA und AB.

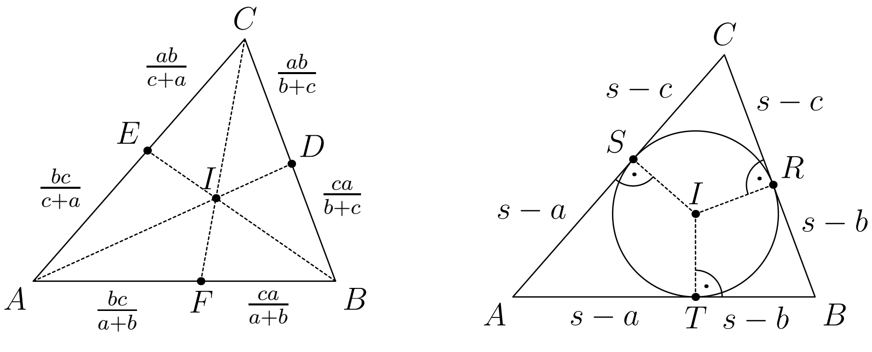


Abbildung 4.24: Inkreismittelpunkt

Satz 4.65 (Offensichtliches)**.**

$$\begin{aligned}
\overline{RI} = \overline{SI} = \overline{TI} &= r\\
\overline{AT} &= s-a\\
\overline{BT} &= s-b\\
\overline{BR} &= s-b\\
\overline{CR} &= s-c\\
\overline{CS} &= s-c\\
\overline{AS} &= s-a
\end{aligned}$$

Satz 4.66 (Berührpunkte)**.**

$$\begin{aligned}
\sphericalangle SIT &= 180^\circ - \alpha = \beta + \gamma\\
\sphericalangle TIR &= 180^\circ - \beta = \gamma + \alpha\\
\sphericalangle RIS &= 180^\circ - \gamma = \alpha + \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\alpha}{2} &= \frac{r}{s-a}\\
\tan\frac{\beta}{2} &= \frac{r}{s-b}\\
\tan\frac{\gamma}{2} &= \frac{r}{s-c}
\end{aligned}$$

Satz 4.67 (Winkel)**.**

$$\begin{aligned}
\sphericalangle BAI = \sphericalangle CAI &= \frac{\alpha}{2}\\
\sphericalangle CBI = \sphericalangle ABI &= \frac{\beta}{2}\\
\sphericalangle ACI = \sphericalangle BCI &= \frac{\gamma}{2}\\
\sphericalangle BIC &= 90^\circ + \frac{\alpha}{2}\\
\sphericalangle CIA &= 90^\circ + \frac{\beta}{2}\\
\sphericalangle AIB &= 90^\circ + \frac{\gamma}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sphericalangle ADB &= \gamma + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\beta-\gamma}{2}\\
\sphericalangle BEC &= \alpha + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma-\alpha}{2}\\
\sphericalangle CFA &= \beta + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sphericalangle CDA &= \frac{\alpha}{2} + \beta = 90^\circ + \frac{\beta-\gamma}{2}\\
\sphericalangle AEB &= \frac{\beta}{2} + \gamma = 90^\circ + \frac{\gamma-\alpha}{2}\\
\sphericalangle BFC &= \frac{\gamma}{2} + \alpha = 90^\circ + \frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}$$

$$\sphericalangle CIE = \sphericalangle BIF = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2}$$
$$\sphericalangle AIF = \sphericalangle CID = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma + \alpha}{2}$$
$$\sphericalangle BID = \sphericalangle AIE = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Satz 4.68 (Längen)**.**

$$\overline{AF} = \frac{bc}{a+b}$$
$$\overline{BF} = \frac{ca}{a+b}$$
$$\overline{BD} = \frac{ca}{b+c}$$
$$\overline{CD} = \frac{ab}{b+c}$$
$$\overline{CE} = \frac{ab}{c+a}$$
$$\overline{AE} = \frac{bc}{c+a}$$

$$\overline{AI} = \frac{b+c}{2s} \cdot \overline{AD} = \frac{bc}{s} \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$
$$\overline{BI} = \frac{b+c}{2s} \cdot \overline{BE} = \frac{ca}{s} \cos\frac{\beta}{2} = \frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}}$$
$$\overline{CI} = \frac{b+c}{2s} \cdot \overline{CF} = \frac{ab}{s} \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$
$$\overline{DI} = \frac{a}{2s}\overline{AD}$$
$$\overline{EI} = \frac{b}{2s}\overline{BE}$$
$$\overline{FI} = \frac{c}{2s}\overline{CF}$$

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{DI}} = \frac{b+c}{a}$$
$$\frac{\overline{BI}}{\overline{EI}} = \frac{c+a}{b}$$
$$\frac{\overline{CI}}{\overline{FI}} = \frac{a+b}{c}$$

Satz 4.69 (Flächen)**.**

$$[BIC] = \frac{ra}{2}$$
$$[CIA] = \frac{rb}{2}$$
$$[AIB] = \frac{rc}{2}$$
$$[ABC] = rs$$

4.5.5 Formeln zum Umkreismittelpunkt

Seien D, E und F die Mittelpunkte Seiten BC, CA und AB.

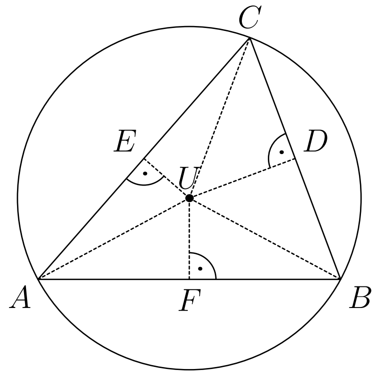


Abbildung 4.25: Umkreismittelpunkt

Satz 4.70 (Offensichtliches)**.**

$$\begin{aligned}\overline{AU} = \overline{BU} = \overline{CU} &= R\\ \overline{DU} &= R|\cos\alpha|\\ \overline{EU} &= R|\cos\beta|\\ \overline{FU} &= R|\cos\gamma|\\ a &= 2R\sin\alpha\\ b &= 2R\sin\beta\\ c &= 2R\sin\gamma\end{aligned}$$

Satz 4.71 (Winkel)**.**

$$\begin{aligned}&\sphericalangle BUC = 2\alpha\\ &\sphericalangle CUA = 2\beta\\ &\sphericalangle AUB = 2\gamma\\ &\sphericalangle BUD = \sphericalangle CUD = \alpha\\ &\sphericalangle CUE = \sphericalangle AUE = \beta\\ &\sphericalangle AUF = \sphericalangle BUF = \gamma\\ &\sphericalangle DUE = \alpha + \beta\\ &\sphericalangle EUF = \beta + \gamma\\ &\sphericalangle FUD = \gamma + \alpha\\ &\sphericalangle BCU = \sphericalangle CBU = 90^\circ - \alpha\\ &\sphericalangle CAU = \sphericalangle ACU = 90^\circ - \beta\\ &\sphericalangle ABU = \sphericalangle BAU = 90^\circ - \gamma\end{aligned}$$

Satz 4.72 (Flächen)**.**

$$\begin{aligned}[BUC] &= \frac{R^2}{2}|\sin 2\alpha| = \frac{aR}{2}|\cos\alpha|\\ [CUA] &= \frac{R^2}{2}|\sin 2\beta| = \frac{aR}{2}|\cos\beta|\\ [AUB] &= \frac{R^2}{2}|\sin 2\gamma| = \frac{aR}{2}|\cos\gamma|\end{aligned}$$

4.5.6 Formeln zum Lotfußpunktdreieck

Sei ABC ein Dreieck und P ein beliebiger Punkt. Seien weiters X, Y und Z die Fußpunkte der Höhen (Lote) von P auf BC, CA und AB.

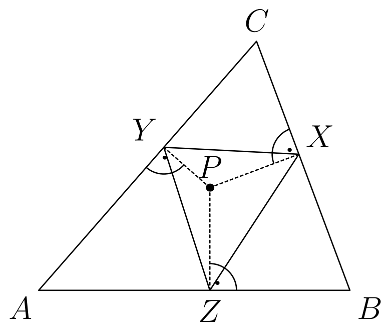


Abbildung 4.26: Lotfußpunktdreieck

Satz 4.73 (Seitenlängen des Lotfußpunktdreiecks)**.**

$$\overline{XY} = \frac{\overline{CP} \cdot \overline{AB}}{2R}$$
$$\overline{YZ} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BC}}{2R}$$
$$\overline{ZX} = \frac{\overline{BP} \cdot \overline{CA}}{2R}$$

5 Vierecke

Satz 5.1 (Winkelsumme). *Die Summe der vier Winkel eines Vierecks ist immer gleich* $360°$.

Satz 5.2 (Hierarchie spezieller Vierecke). *Unter den speziellen Vierecken herrscht die in Abbildung 5.1 abgebildete Hierarchie. Jede Verbindungslinie bedeutet, dass das untere Viereck ein Spezialfall des oberen ist.*

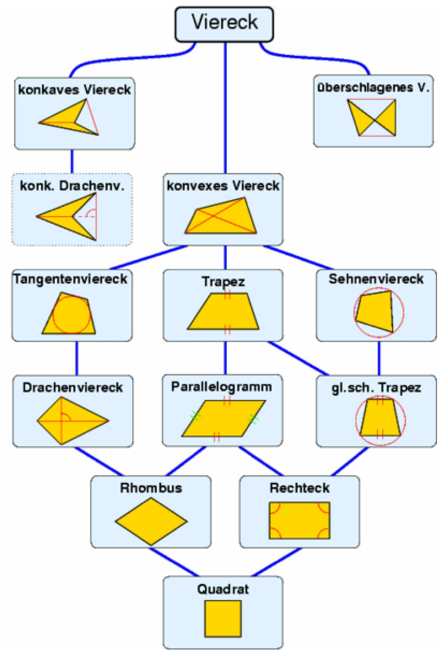


Abbildung 5.1: Hierarchie spezieller Vierecke

Satz 5.3 (Inkreis). *Folgende spezielle Vierecke haben* immer *einen Inkreis:*

- *Deltoid*
- *Raute (Rhombus)*
- *Quadrat*

Folgende spezielle Vierecke haben nie *einen Inkreis:*

- *Parallelogramm (außer Raute)*
- *Rechteck (außer Quadrat)*

Satz 5.4 (Umkreis)**.** *Folgende spezielle Vierecke haben* immer *einen Umkreis:*

- *Gleichschenkeliges Trapez*
- *Rechteck*
- *Quadrat*

Folgende spezielle Vierecke haben nie *einen Umkreis:*

- *Konkaves Viereck*
- *Trapez (außer gleichschenkeliges Trapez)*
- *Parallelogramm (außer Rechteck)*
- *Raute (außer Quadrat)*

Ein Deltoid hat genau dann einen Umkreis, wenn die beiden gleich großen Winkel genau 90° *betragen.*

Satz 5.5 (Diagonalen)**.** *Bei folgenden spezielle Vierecken halbieren die Diagonalen einander immer:*

- *Parallelogramm*
- *Raute*
- *Rechteck*
- *Quadrat*

Bei folgenden spezielle Vierecken stehen die Diagonalen immer aufeinander normal:

- *Deltoid*
- *Raute*
- *Quadrat*

5.1 Allgemeine Vierecke

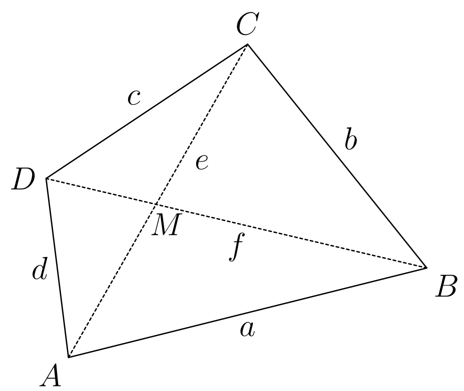


Abbildung 5.2: Allgemeines Viereck

Satz 5.6 (Halbierung von Diagonale und Fläche)**.** *Wenn eine Diagonale ein Viereck in zwei flächengleiche Hälften teilt, dann halbiert sie auch die andere Diagonale.*

Auch die Umkehrung gilt: Halbiert eine Diagonale die andere, so halbiert sie auch die Fläche des Vierecks.

Satz 5.7 (Fliegensatz)**.** *Sei $ABCD$ ein Viereck und M der Schnittpunkt der Diagonalen. Dann gilt für die Flächen $[ABM] \cdot [CDM] = [BCM] \cdot [DAM]$.*

Satz 5.8 (Ungleichung von Ptolemäus)**.** *Seien $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ und $d = \overline{DA}$ die Seitenlängen und $e = \overline{AC}$ und $f = \overline{BD}$ die Längen der Diagonalen eines Vierecks $ABCD$. Dann gilt $a \cdot c + b \cdot d \geq e \cdot f$ mit Gleichheit im Sehnenviereck.*

Satz 5.9 (Bretschneiders Formel)**.** *Sei $ABCD$ ein Viereck mit den Seitenlängen $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ und $d = \overline{DA}$, sei weiters $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ der halbe Umfang und seien α und γ die Winkel in zwei gegenüberliegenden Eckpunkten. Dann lässt sich die Fläche $[ABCD]$ folgendermaßen berechnen:*

$$[ABCD] = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$$

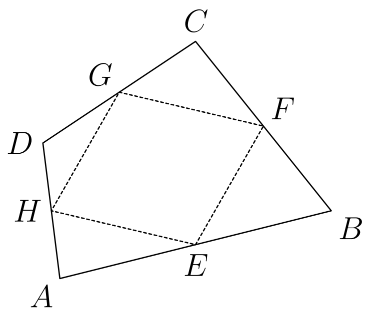


Abbildung 5.3: Varignon-Parallelogramm

Satz 5.10 (Varignon-Parallelogramm)**.** *Sei $ABCD$ ein Viereck und seien E, F, G und H die Mittelpunkte seiner Seiten. Dann ist $EFGH$ ein Parallelogramm. Der Flächeninhalt von $EFGH$ ist halb so groß wie jener von $ABCD$.*

5.2 Sehnenvierecke

Ein Sehnenviereck $ABCD$ ist ein nicht überschlagenes Viereck mit einem Umkreis.

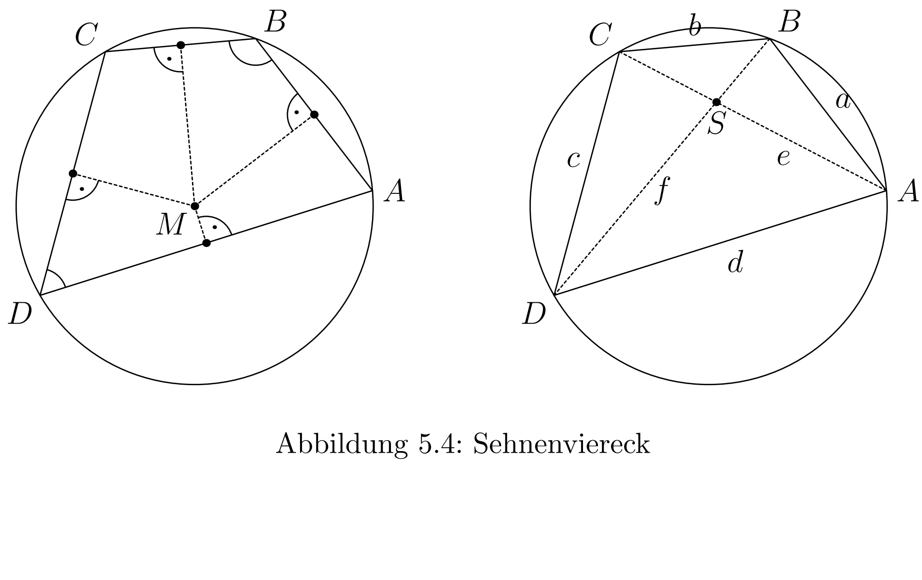


Abbildung 5.4: Sehnenviereck

Satz 5.11 (Gegenüberliegende Winkel)**.** *In einem Sehnenviereck ergänzen sich gegenüberliegende Winkel immer auf* $180°$.

Umgekehrt gilt: Ergänzen sich gegenüberliegende Winkel in einem Viereck auf $180°$*, dann handelt es sich um ein Sehnenviereck.*

Satz 5.12 (Umkreismittelpunkt)**.** *Die vier Streckensymmetralen der Seiten eines Sehnenvierecks schneiden einander im Umkreismittelpunkt.*

Umgekehrt gilt: Schneiden die vier Streckensymmetralen eines Vierecks einander in einem Punkt, so handelt es sich um ein Sehnenviereck.

Satz 5.13 (Ähnliche Dreiecke)**.** *Sei* S *der Schnittpunkt der Diagonalen. Dann sind die Dreiecke* ABS *und* CDS *zueinander ähnlich. Analog sind die Dreiecke* BCS *und* DAS *zueinander ähnlich.*

Satz 5.14 (Diagonalenabschnitte)**.** *Sei* S *der Schnittpunkt der Diagonalen. Dann gilt* $\overline{AS} \cdot \overline{CS} = \overline{BS} \cdot \overline{DS}$. *(Vergleiche Potenz eines Punktes, Satz 3.8.)*

Satz 5.15 (Satz von Ptolemäus)**.** *Seien* $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ *und* $d = \overline{DA}$ *die Seitenlängen und* $e = \overline{AC}$ *und* $f = \overline{BD}$ *die Längen der Diagonalen. Dann gilt* $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$.

Satz 5.16 (Satz von Brahmagupta)**.** *Seien* $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ *und* $d = \overline{DA}$ *die Seitenlängen und* $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ *der halbe Umfang des Sehnenvierecks. Dann lässt sich die Fläche berechnen als* $[ABCD] = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

5.3 Tangentenvierecke

Ein Tangentenviereck $ABCD$ ist ein Viereck mit einem Inkreis.

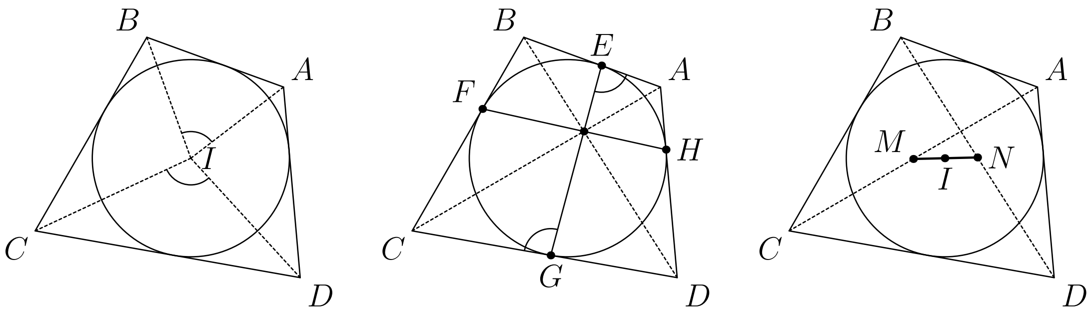


Abbildung 5.5: Tangentenviereck

Satz 5.17 (Summe gegenüberliegender Seiten)**.** *In einem Tangentenviereck* $ABCD$ *gilt* $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$.

Umgekehrt gilt auch, dass jedes konvexe Viereck mit dieser Eigenschaft ein Tangentenviereck ist.

Satz 5.18 (Summe gegenüberliegender Sichtwinkel)**.** *Sei* I *der Inkreismittelpunkt des Tangentenvierecks* $ABCD$. *Die Winkel, unter denen gegenüberliegende Seiten eines Tangentenvierecks vom Inkreismittelpunkt aus gesehen werden, ergänzen sich auf* $180°$*, also* $\sphericalangle AIB + \sphericalangle CID = 180°$.

Satz 5.19 (Winkel in gegenüberliegenden Berührpunkten). *Seien E und G die Berührpunkte von AB und CD mit dem Inkreis. Dann ergänzen sich die Winkel $\sphericalangle AEG$ und $\sphericalangle EGC$ auf $180°$.*

Satz 5.20 (Gemeinsamer Schnittpunkt). *Seien E, F, G und H die Berührpunkte von AB, BC, CD und DA mit dem Inkreis. Dann schneiden sich die Diagonalen AC und BD und die Verbindungen gegenüberliegender Berührpunkte EG und FH in einem Punkt.*

Satz 5.21 (Newtonsche Gerade). *Seien M und N die Mittelpunkte der Diagonalen AC und BD, dann liegt der Inkreismittelpunkt I auf der Verbindung MN.*

5.4 Sehnentangentenvierecke (Bizentrische Vierecke)

Ein Sehnentangentenvierecke $ABCD$ ist ein Viereck mit einem Inkreis und einem Umkreis.

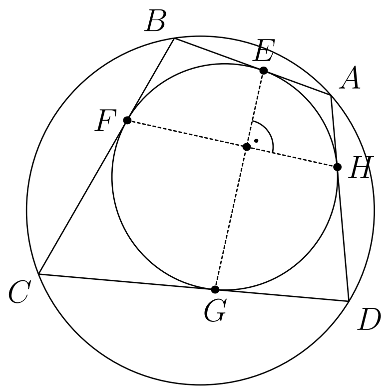


Abbildung 5.6: Sehnentangentenviereck

Satz 5.22 (Berührungssehnen). *Sei $ABCD$ ein Sehnentangentenviereck und seien E, F, G und H die Berührpunkte des Inkreises mit AB, BC, CD und DA. Dann stehen EG und FH aufeinander normal.*

Auch die Umkehrung gilt: Wenn diese beiden Strecken normal aufeinander stehen, ist $ABCD$ ein Sehnentangentenviereck.

5.5 Parallelogramme

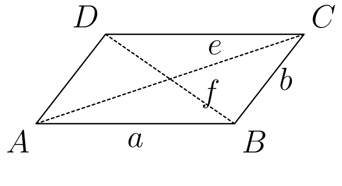


Abbildung 5.7: Parallelogrammidentität

Satz 5.23 (Parallelogrammidentität). *Sei $ABCD$ ein Parallelogramm, und sei wie gewohnt $a = \overline{AB} = \overline{CD}$, $b = \overline{BC} = \overline{DA}$, $e = \overline{AC}$ und $f = \overline{BD}$. Dann gilt $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.*

6 Polygone

Satz 6.1 (Winkelsumme)**.** *Die Winkelsumme in jedem nicht überschlagenen Polygon mit n Ecken beträgt $(n-2) \cdot 180° = n \cdot 180° - 360°$.*

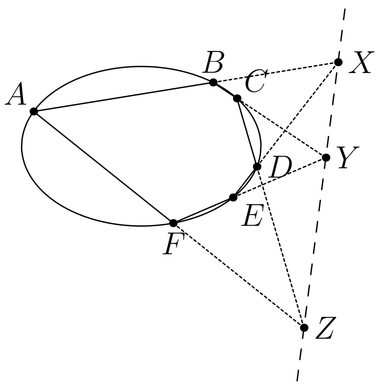


Abbildung 6.1: Pascalsche Gerade

Satz 6.2 (Pascalsche Gerade)**.** *Sei $ABCDEF$ ein Sechseck, dessen Ecken auf einem Kegelschnitt (zum Beispiel Kreis oder Ellipse) liegen. Dann liegen die Schnittpunkte der Verlängerungen gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden.*

(Anders formuliert: Sei X der Schnittpunkte der Verlängerungen von AB und DE, Y jener von BC mit EF und Z jener von CD mit FA. Dann liegen X, Y und Z auf einer Geraden.)

Dieser Satz gilt auch, wenn die Punkte nicht in dieser Reihenfolge auf dem Kegelschnitt liegen, also zum Beispiel bei einem überschlagenen Sechseck.

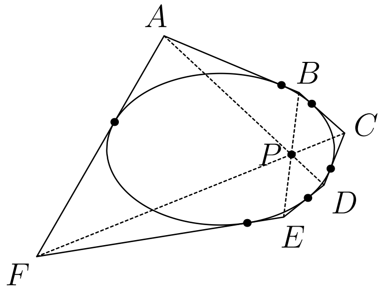


Abbildung 6.2: Satz von Brianchon

Satz 6.3 (Satz von Brianchon)**.** *Sei $ABCDEF$ ein Sechseck, das einem Kegelschnitt (zum Beispiel Kreis oder Ellipse) umschrieben ist, das heißt, dessen Seiten Tangenten des Kegelschnittes sind. Dann schneiden die Diagonalen gegenüberliegender Eckpunkte, also AD, BE und CF, einander in einem Punkt.*

7 Quellen

- Wikipedia (http://de.wikipedia.org/)
- ÖMO-Vorbereitungskurs für Fortgeschrittene, Erich Windischbacher und Gerhard Windischbacher, Raach am Hochgebirge, Mai 2002, Mai 2003, Mai 2004
- Das Sehnen- & Tangentenviereck, Geometrie-Ausarbeitung von Sarah Schultze & Jakob Priwitzer (http://www.mevis-research.de/~albers/Veranstaltungen/GeoPeitg08/Material/HA07_Sehnen_Tangt.pdf)
- Yimin Ge: Fortgeschrittene Geometrie für Mathematikolympioniken, 2007 (http://www.yimin-ge.com/doc/geometrie-20070212.pdf)