49. Österreichische Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger – Lösungen

12. Juni 2018

Aufgabe 1. (Walther Janous) *Es seien a, b und c positive reelle Zahlen. Man beweise:*

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}$$

Wann gilt Gleichheit?

Lösung 1. (Gerhard Kirchner) Multiplikation mit bc und quadratisch Ergänzen führt auf

$$\left(c - \frac{2ab}{a+b}\right)^2 + ab\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \geq 0.$$

Gleichheit gilt für $a = b \wedge c = \frac{2ab}{a+b}$, also für $a = b = c$. $\square$

Lösung 2. (Gottfried Perz) Weil alle Nenner positiv sind, kann die Ungleichung durch Multiplikation mit $(a+b)bc$ äquivalent umgeformt werden: Damit ergibt sich die Ungleichung

$$(ab + c^2)(a+b) \geq 4abc \tag{1}$$

beziehungsweise

$$a^2b + ab^2 + ac^2 + bc^2 \geq 4abc. \tag{2}$$

Subtraktion von $4abc$ von beiden Seiten der Ungleichung ergibt

$$(a^2b - 2abc + bc^2) + (ab^2 - 2abc + ac^2) \geq 0 \tag{3}$$

und schließlich

$$b(a-c)^2 + a(b-c)^2 \geq 0. \tag{4}$$

Wegen a, $b > 0$ sind beide Summanden auf der linken Seite der Ungleichung größer oder gleich 0. Damit ist die gegebene Ungleichung bewiesen. Gleichheit gilt genau dann, wenn beide Quadrate gleich 0 sind, also genau im Fall $a = b = c$. $\square$

Lösung 3. (Gottfried Perz) Nach Beseitigen aller Nenner durch Multiplikation der Ungleichung mit $(a+b)bc > 0$ und Division beider Seiten durch 4 ergibt sich die zur beweisenden Ungleichung äquivalente Ungleichung

$$\frac{a^2b + ab^2 + ac^2 + bc^2}{4} \geq abc. \tag{5}$$

Auf der linken Seite dieser Ungleichung steht das arithmetische, auf der rechten Seite das geometrische Mittel der vier positiven reellen Zahlen a^2b, ab^2, ac^2, bc^2. Damit gilt die letzte Ungleichung und folglich auch die zu beweisende Ungleichung nach AM-GM-Ungleichung.

Gleichheit gilt genau dann, wenn die vier Zahlen a^2b, ab^2, ac^2, bc^2 gleich sind. Notwendig ist dafür wegen $a^2b = ab^2$, dass $a = b$, und wegen $ab^2 = ac^2$, dass $b^2 = c^2$, also (wegen $b, c > 0$) $b = c$, insgesamt also $a = b = c$.

Wenn aber $a = b = c$ gilt, gilt auch $a^2b = ab^2 = ac^2 = bc^2$, also ist $a = b = c$ nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für Gleichheit. $\square$

Lösung 3a. (Hannes Amon) Die Ungleichung (5) kann auch äquivalent umgeformt werden zu

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} \geq 4.$$

Dies folgt aber aus der bekannten Ungleichung $x + \frac{1}{x} \geq 2$ für $x = \frac{a}{c}$ bzw. $x = \frac{b}{c}$. Gleichheit gilt für $x = 1$, also für $a = c$ bzw. $b = c$, insgesamt also für $a = b = c$. □

Lösung 4. (Walther Janous) Die zu beweisende Ungleichung ist äquivalent mit

$$\frac{ab + c^2}{bc} \geq \frac{4a}{a + b}.$$

Weil alle Nenner positiv sind, kann diese Ungleichung durch Multiplikation mit $(a + b)cd$ bruchfrei gemacht werden. Es ergibt sich

$$(ab + c^2)(a + b) \geq 4abc.$$

Beide Faktoren auf der linken Seite sind nach Voraussetzung positiv und können mittels arithmetisch-geometrischer Mittelungleichung abgeschätzt werden: Es gilt jedenfalls

$$\frac{ab + c^2}{2} \geq \sqrt{abc^2}, \quad \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Daraus folgt durch Multiplikation

$$\begin{aligned} \frac{(ab + c^2)}{2} \cdot \frac{(a + b)}{2} &\geq \sqrt{abc^2} \cdot \sqrt{ab} \\ \frac{(ab + c^2)(a + b)}{4} &\geq abc \\ (ab + c^2)(a + b) &\geq 4abc \end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn sowohl $a = b$ als auch $ab = c^2$ gilt. Aufgrund der ersten Bedingung ist die zweite Bedingung genau dann erfüllt, wenn $a^2 = b^2 = c^2$, also (wegen $a, b, c > 0$) $a = b = c$ gilt. □

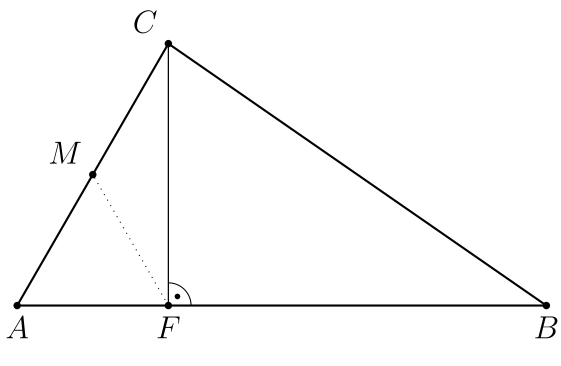
Lösung 5. (Moritz Hiebler) Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der AGMU gilt

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} = \frac{a^2}{ac} + \frac{c^2}{bc} \geq \frac{(a + c)^2}{ac + bc} \geq \frac{4ac}{ac + bc} = \frac{4a}{a + b},$$

wobei Gleichheit in der ersten Ungleichung genau für $a/(ac) = c/(bc)$ und in der letzten genau für $a = c$, also insgesamt genau für $a = b = c$, eintritt. □

Aufgabe 2. (Karl Czakler) *Es seien ABC ein spitzwinkliges Dreieck, M der Mittelpunkt der Seite AC und F auf AB der Fußpunkt der Höhe durch den Eckpunkt C.*
Man beweise, dass $\overline{AM} = \overline{AF}$ genau dann gilt, wenn $\sphericalangle BAC = 60°$.

Lösung. (Karl Czakler) Wir haben den Beweis in zwei Richtungen zu führen.



- Es sei $\overline{AM} = \overline{AF}$.

  Da das Dreieck ACF rechtwinkelig ist, gilt mit dem Satz von Thales $\overline{AM} = \overline{MF}$. Daher ist das Dreieck AMF gleichseitig und somit $\sphericalangle BAC = 60°$.

- Es sei $\sphericalangle BAC = 60°$.

  Da das Dreieck ACF rechtwinkelig ist, gilt wie oben $\overline{AM} = \overline{MF}$. Daher ist das Dreieck AMF gleichschenkelig und der Basiswinkel $\sphericalangle BAC = \sphericalangle FAM = 60°$. Da die Basiswinkel in einem gleichschenkligen Dreieck gleich groß sind, ist auch der andere Winkel $\sphericalangle AFM = 60°$ und daher alle Winkel gleich $60°$. Daher ist das Dreieck AMF gleichseitig und somit gilt $\overline{AM} = \overline{AF}$. □

Aufgabe 3. (Gerhard J. Woeginger) *Zu einer gegebenen ganzen Zahl $n \geq 4$ untersuchen wir, ob es eine Tabelle mit drei Zeilen und n Spalten gibt, die mit den Zahlen 1, 2, ..., $3n$ gefüllt werden kann, sodass*

- *sich in jeder Zeile die selbe Summe z ergibt und*
- *sich in jeder Spalte die selbe Summe s ergibt.*

Man zeige:

(a) *Wenn n gerade ist, gibt es keine solche Tabelle.*

(b) *Für $n = 5$ gibt es eine solche Tabelle.*

Lösung. (Gerhard Kirchner)

1. Durch Addition aller Einträge erhalten wir

$$1 + 2 + \ldots + 3n = \frac{3n(3n+1)}{2} = 3z = ns.$$

   Daraus folgt $s = \frac{3(3n+1)}{2}$. Wenn n gerade ist, so ist aber $3n+1$ und somit auch $3(3n+1)$ ungerade. Also ist s keine ganze Zahl, Widerspruch.

2. Für $n = 5$ erhalten wir $s = 24$ und $z = 40$. Zum Beispiel erfüllt die folgende Tabelle die Bedingung:

15	6	2	7	10
8	4	13	12	3
1	14	9	5	11

□

Aufgabe 4. (Richard Henner) *Für eine beliebige natürliche Zahl n bezeichnen wir die Anzahl der positiven Teiler von n mit $d(n)$ und die Summe dieser Teiler mit $s(n)$. Zum Beispiel ist $d(2018)$ gleich 4, weil 2018 vier Teiler hat (1, 2, 1009 und 2018) und $s(2018) = 1 + 2 + 1009 + 2018 = 3030$.*
Man bestimme alle natürlichen Zahlen x, für die $s(x) \cdot d(x) = 96$ gilt.

Lösung 1. (Richard Henner) Aus $s(x) \cdot d(x) = 96$ folgt, dass sowohl $s(x)$ als auch $d(x)$ ein Teiler von 96 sein muss und selbstverständlich gilt $d(x) < s(x)$. $96 = 2^5 \cdot 3$ hat 12 Teiler, nämlich 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48 und 96. $d(x)$ kann also die Werte 1, 2, 3, 4, 6 oder 8 annehmen.
$d(x) = 1$ bedeutet $x = 1$ und damit $s(x) = 1$ und ist daher keine Lösung.
Aus $d(x) = 2$ folgt x ist prim, aus $s(x) = 48$ folgt $x = 47$, eine Primzahl, also Lösung.
Aus $d(x) = 3$ folgt x ist das Quadrat einer Primzahl (p^2), $s(x) = 32 = 1 + p + p^2$, keine Lösung.
Aus $d(x) = 4$ folgt $x = p^3$ oder $x = p \cdot q$ (p, q prim). Aus $x = p^3$ folgt $s(x) = 24 = 1 + p + p^2 + p^3$, keine Lösung. Aus $x = p \cdot q$ folgt $s(x) = 24 = 1 + p + q + p \cdot q$, also $23 = p + q + p \cdot q$, das geht für $p = 2$ und $q = 7$ oder $p = 3$ und $q = 5$. Also sind $x = 14$ und $x = 15$ Lösungen.
Aus $d(x) = 6$ folgt $s(x) = 16$ und $x = p^5$, was zu groß ist, oder $x = p^2 \cdot q$. Wenn man $p = 2$ oder 3 einsetzt, sieht man, dass das nicht geht.
Aus $d(x) = 8$ folgt $s(x) = 12$, was nicht geht, weil 8 verschiedene Teiler eine Summe haben müssen, die größer als 12 ist.
Die Lösungen sind also 14, 15 und 47. □

Lösung 2. (Richard Henner) Sei $d(x) \geq 6$. Dann gilt $s(x) \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + x = 15 + x$ und daher $96 = s(x) \cdot d(x) \geq 6 \cdot (15 + x) = 90 + 6x$, also $x \leq 1$, was natürlich nicht möglich ist.
Weil $d(x)$ ein Teiler von 96 sein muss, sind daher nur $d(x) = 1$ oder $d(x) = 2$ oder $d(x) = 3$ oder $d(x) = 4$ möglich.
$d(x) = 1$ liefert keine Lösung (siehe Lösung 1).
$d(x) = 2$ liefert die Lösung $x = 47$ (siehe Lösung 1).
$d(x) = 3$ liefert keine Lösung (siehe Lösung 1).
Für $d(x) = 4$ gilt $s(x) = 24$.
Aus $s(x) \geq 1 + 2 + 3 + x = 6 + x$ folgt $x \leq 18$. Aus $s(x) \leq x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 1 = \frac{11x}{6} + 1$ folgt $x \geq 13$.
$x = 13$ ist wegen $s(x) = 14$ keine Lösung. $x = 16$ ist wegen $s(x) = 31$ keine Lösung. $x = 17$ ist wegen $s(x) = 18$ keine Lösung. $x = 18$ ist wegen $s(x) = 39$ keine Lösung.
$x = 14$ und $x = 15$ sind wegen $s(x) = 24$ Lösungen. $\square$