Ungleichungen & Geometrie Blatt 1 Raach 2009 *Birgit Vera Schmidt*

1. Man zeige für alle $a, b \in \mathbb{R}$:
$$a^4 + b^4 + 2 \geq 4ab$$

2. Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Man konstruiere über der Seite BC ein gleichseitiges, nach innen gerichtetes Dreieck mit A' als drittem Eckpunkt. Analog erhalte man B' und C' als Eckpunkte der gleichseitigen Dreiecke über AC und AB. Man zeige, dass $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$.

3. Man zeige für alle $N \in \mathbb{Z}^+$:
$$\sum_{n=1}^{N} \left(n^2 \cdot n!\right) \geq \frac{2N^2 + 3N + 1}{6} \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} n!\right)$$

Ungleichungen & Geometrie Blatt 2 Raach 2009 *Birgit Vera Schmidt*

4. Man zeige (ohne Verwendung der Eigenschaften des Parallelogramms): Sind in einem Viereck beide Paare gegenüberliegender Seiten zueinander parallel, dann sind gegenüberliegende Seiten auch gleich lang.

   Man zeige weiters die Umkehrung: Sind in einem Viereck beide Paare gegenüberliegender Seiten gleich lang, dann sind gegenüberliegende Seiten auch zueinander parallel.

5. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}, n > 1$:
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

6. Sei ABC ein Dreieck und seien X, Y und Z drei beliebige Punkte auf BC, CA und AB. Man zeige, dass die Umkreise von AYZ, BZX und CXY einander in einem Punkt schneiden.

Ungleichungen & Geometrie Blatt 3 Raach 2009 *Birgit Vera Schmidt*

7. Man zeige für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\neq 0}$:
$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq ab + 2$$

8. (GWF 2003) Gegeben sind zwei parallele Geraden g und h sowie ein Punkt P, der außerhalb des von g und h gebildeten Streifens liegt. Durch P werden nun drei paarweise verschiedene Geraden g_1, g_2 und g_3 gezeichnet, die g in den Punkten A_1, A_2, A_3 und h in den Punkten B_1, B_2, B_3 schneiden.

   Die Punkte $C_{12} = (A_1B_2) \cap (A_2B_1)$, $C_{13} = (A_1B_3) \cap (A_3B_1)$, $C_{23} = (A_2B_3) \cap (A_3B_2)$ sind die Schnittpunkte der entsprechenden Geraden.

   Man zeige: Es gibt genau eine Gerade n, die die Punkte C_{12}, C_{13}, C_{23} enthält und n ist parallel zu g und h.

9. Man zeige für $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{a+b+c}{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}} \leq \frac{ab + bc + ca}{a+b+c}$$

Ungleichungen & Geometrie Blatt 4 Raach 2009 *Birgit Vera Schmidt*

10. Sei $ABCD$ ein Quadrat der Seitenlänge 6 und E der Mittelpunkt der Seite AD. Auf CE sei ein Punkt F so gelegen, dass die Flächen der Dreiecke AFE und BCF inhaltsgleich sind. Man ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks ABF.

11. Man zeige für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 1}$:

$$a^3b^3 + 3a^2b^2 + 3ab + 1 \geq (a+b)^3$$

12. Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck. Der Kreis k mit dem Durchmesser AB schneidet die Strecken AC und BC in den Punkten P und Q. Sei R der Schnittpunkt der Kreistangenten in A und Q und S derjenige der Tangenten in B und P.

    Man zeige: C liegt auf der Strecke RS.

Ungleichungen & Geometrie Blatt 5 Raach 2009 *Birgit Vera Schmidt*

13. Man zeige für alle $n \in \mathbb{Z}^+$:
$$\frac{n!}{n^n} \leq \left(\frac{n+1}{2n}\right)^2$$

14. Sei ABC ein beliebiges Dreieck und F der Fußpunkt der Höhe auf AB. Sei weiters h_a die Höhe auf BC und h_b die Höhe auf AC. Man projiziere F auf h_a und h_b (oder gegebenenfalls auf die Verlängerungen davon) und erhalte D und D'. Außerdem projiziere man F auf die Seiten AC und BC und erhalte die Punkte E und E'. Man zeige: D, D', E und E' liegen auf einer Geraden.

15. Man zeige für $x, y, z \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(y+x)(y+z)} + \frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geq \frac{3}{4}$$

Ungleichungen & Geometrie Blatt 6 Raach 2009 *Birgit Vera Schmidt*

16. (LWA 1993) Es sei I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Er wird an den Dreiecksseiten gespiegelt. Dabei entsteht ein Dreieck PQR. Man zeige: Das Dreieck PQR ist spitzwinkelig. Welcher besondere Punkt des Dreiecks PQR ist der Punkt I?

17. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

$$3\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}\right) \leq a^3 + \frac{2}{a^3} + b^3 + \frac{2}{b^3} + c^3 + \frac{2}{c^3}$$

18. (BWF 2005) Im spitzwinkeligen Dreieck ABC wird über der Seite AC als Durchmesser der Kreis k_1 und über der Seite BC als Durchmesser der Kreis k_2 gezeichnet. Sei E der Fußpunkt der Höhe h_b auf AC und F der Fußpunkt der Höhe h_a auf BC.

    Seien L und N die Schnittpunkte der Geraden BE mit dem Kreis k_1 (L auf der Strecke BE) und K und M die Schnittpunkte der Geraden AF mit dem Kreis k_2 (K auf der Strecke AF).

    Man zeige: $KLMN$ ist ein Sehnenviereck.

Ungleichungen & Geometrie Blatt 7 Raach 2009 *Birgit Vera Schmidt*

19. Man zeige für alle $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2} \geq 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{e} + \frac{e}{a}\right)$$

    Wann gilt Gleichheit?

20. (GWF 2005) Über dem Durchmesser AB wird der Halbkreis h mit dem Mittelpunkt M errichtet. Über MB wird auf derselben Seite der Geraden AB der Halbkreis k errichtet. Seien X und Y Punkte auf k, sodass der Bogen BX eineinhalb mal so groß wie der Bogen BY ist. Die Gerade MY schneidet die Gerade BX in D und den großen Halbkreis h in C.

    Man zeige, dass Y der Mittelpunkt der Strecke CD ist.

21. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ mit $abc = 1$:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$$

Ungleichungen & Geometrie Blatt 8 Raach 2009 *Birgit Vera Schmidt*

22. Gegeben sei ein Trapez $ABCD$, wobei die Seiten AB und CD parallel sind. Auf der Seite AD liegt der Punkt E, und es gilt $\sphericalangle ABE = 18°$, $\sphericalangle BEC = 30°$. Man bestimme $\sphericalangle ECD$.

23. Man zeige für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

24. (BWF 2000) Im spitzwinkeligen, nicht gleichseitigen Dreieck ABC mit dem Winkel $\gamma = 60°$ seien U der Umkreismittelpunkt, H der Höhenschnittpunkt und D der Schnittpunkt der Geraden AH und BC (Höhenfußpunkt der Höhe durch A).

    Man zeige, dass die eulersche Gerade HU Winkelsymmetrale des Winkels BHD ist.

Ungleichungen & Geometrie Bonusblatt 1 Raach 2009 *Birgit Vera Schmidt*

1. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{\sqrt{b+c}}{a} + \frac{\sqrt{c+a}}{b} + \frac{\sqrt{a+b}}{c} \geq \frac{4(a+b+c)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

2. Sei $ABCD$ ein Sehnentangentenviereck und seien E, F, G und H die Berührpunkte des Inkreises. Dann stehen EG und FH normal aufeinander.

    Auch die Umkehrung gilt: Wenn diese beiden Strecken normal aufeinander stehen, ist $ABCD$ ein Sehnentangentenviereck.

Ungleichungen & Geometrie Bonusblatt 2 Raach 2009 *Birgit Vera Schmidt*

3. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ mit $abc = 1$:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

4. Gegeben seien eine Strecke AB und eine positive reelle Zahl $\lambda \neq 1$. Man zeige, dass dann die Menge der Punkte X, für die der Quotient der Abstände zu A und B gleich λ ist (also $\overline{AX} : \overline{XB} = \lambda$), ein Kreis ist.

Ungleichungen & Geometrie Bonusblatt 3 Raach 2009 *Birgit Vera Schmidt*

5. Man finde die größte Zahl $K \in \mathbb{R}$, sodass für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \geq K$$

6. Ein Kreis wird „Separator“ einer Menge von 5 Punkten genannt, wenn er durch drei dieser Punkte geht, ein vierter Punkt innerhalb und der verbleibende Punkt außerhalb liegt. Man zeige: Jede Menge von Punkten, von denen keine drei kollinear sind und keine vier auf einem Kreis liegen, hat genau vier Separatoren.