49. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene – Lösungen

31. Mai/1. Juni 2018

Aufgabe 1. *Es sei $\alpha \neq 0$ eine reelle Zahl.*

Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$f(f(x)+y) = \alpha x + \frac{1}{f\left(\frac{1}{y}\right)}$$

für alle x, $y \in \mathbb{R}_{>0}$.

(Walther Janous)

Lösung 1. Antwort: Für $\alpha = 1$ ist die einzige Lösung $f(x) = x$, für andere Werte von α gibt es keine Lösung.

Es muss natürlich $\alpha > 0$ gelten, da sonst die rechte Seite für große x negativ wird. Durch Betrachten von x in der Ausgangsgleichung sehen wir, dass f injektiv ist ($f(x_1) = f(x_2)$ impliziert $\alpha x_1 = \alpha x_2$). Ebenso ist natürlich durch die beliebige Wahl von x auf der rechten Seite die Funktion surjektiv auf ein Intervall (a, ∞) mit einem passenden a (z.B. $a = \frac{1}{f(1)}$) und damit durch Wahl eines kleinen x und eines großen Funktionswertes $f(\frac{1}{y})$ auf der rechten Seite überhaupt surjektiv.

Wir ersetzen nun y durch $f(y)$ und erhalten

$$f(f(x)+f(y)) = \alpha x + \frac{1}{f\left(\frac{1}{f(y)}\right)}. \tag{1}$$

Die linke Seite ist symmetrisch in x und y, also gilt auch

$$\alpha x + \frac{1}{f\left(\frac{1}{f(y)}\right)} = \alpha y + \frac{1}{f\left(\frac{1}{f(x)}\right)}.$$

Wählen wir für y einen beliebigen festen Wert, erhalten wir

$$\frac{1}{f\left(\frac{1}{f(x)}\right)} = \alpha x + C$$

für ein passendes C. Offensichtlich muss $C \geq 0$ gelten, weil die Funktion nur positive Werte annimmt. Wir setzen die gewonnene Identität in Gleichung (1) ein und erhalten

$$f(f(x)+f(y)) = \alpha x + \alpha y + C.$$

Aufgrund der Injektivität gilt also

$$f(x)+f(y) = f(z)+f(w), \text{ falls } x+y = z+w. \tag{2}$$

Insbesondere gilt für x, $y \geq 0$, dass

$$f(x+1)+f(y+1) = f(x+y+1)+f(1).$$

Mit $g(x) = f(x+1)$ gilt also für die Funktion $g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, dass

$$g(x)+g(y) = g(x+y)+g(0).$$

Für $h(x) = g(x) - g(0)$ gilt also $h(x) \geq -g(0)$ und die Cauchysche Funktionalgleichung

$$h(x) + h(y) = h(x + y).$$

Wäre ein Funktionswert $h(t) < 0$, so würden die Werte $h(nt) = nh(t)$ für positive ganze n beliebig kleine Werte annehmen, was wegen der unteren Schranke unmöglich ist. Die Funktion h ist somit immer größer oder gleich Null. Für $0 < u < v$ gilt deswegen $h(v) = h(u) + h(v - u) \geq h(u)$.

Die monotonen Lösungen der Cauchyschen Funktionalgleichung haben aber immer die Form $h(x) = cx$. Es gilt also auch für $x > 1$, dass $f(x) = h(x - 1) + g(0) = cx + d$ für passende Konstanten c und d. Für kleinere x gilt das aber ebenfalls, wie man aus Gleichung (2) zum Beispiel mit den Werten $y = 3$, $z = 2$ und $w = x + 1$ erhält.

Da f surjektiv ist und c positiv sein muss, muss der konstante Term natürlich Null sein, da sonst kleine Werte nicht angenommen werden oder negative Werte angenommen werden. Einsetzen von $f(x) = cx$ in die Ursprungsgleichung ergibt (durch Koeffizientenvergleich) die Bedingungen $c^2 = \alpha$ und $c^2 = 1$. Da c positiv sein muss, erhalten wir so die einzige Lösung $f(x) = x$, falls $\alpha = 1$.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 1a. Antwort: Für $\alpha = 1$ ist die einzige Lösung $f(x) = x$, für andere Werte von α gibt es keine Lösung.

Es muss natürlich $\alpha > 0$ gelten, da sonst die rechte Seite für große x negativ wird. Durch Betrachten von x in der Ausgangsgleichung sehen wir wie in der vorigen Lösung, dass f injektiv ist.

Wir ersetzen nun y durch $f(y)$ und erhalten wie in Lösung 1 durch Ausnutzen der Symmetrie und Injektivität, dass

$$\frac{1}{f\left(\frac{1}{f(x)}\right)} = \alpha x + C \tag{3}$$

und

$$f(x) + f(y) = f(z) + f(w), \text{ falls } x + y = z + w.$$

Insbesondere gilt für x, $y \geq 0$ und $r > 0$, dass

$$f(x + r) + f(y + r) = f(x + y + r) + f(r).$$

Mit $g(x) = f(x + r)$ gilt also für die Funktion $g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, dass

$$g(x) + g(y) = g(x + y) + g(0).$$

Wie in Lösung 1 sehen wir, dass die Lösungen dieser Cauchyschen Funktionalgleichung die Form $g(x) = ax + b$ haben. Es gilt also auch für f für $x > r$, dass $f(x) = cx + d$, also gilt das auch für $x > 0$, da r beliebig war. An dieser Stelle könnte man auch direkt in die Ursprungsgleichung einsetzen, wir wählen aber lieber das folgende Argument:

Wir sehen durch Einsetzen in Gleichung (3), dass $\frac{cx+d}{cdx+c+d^2} = \alpha x + C$ und damit für alle $x > 0$ die Gleichung $cx + d = (\alpha x + C)(cdx + c + d^2)$ gilt. Der Vergleich des Koeffizienten von x^2 liefert $0 = \alpha cd$, also $c = 0$ oder $d = 0$.

Für $c = 0$ wäre die Funktion aber konstant und ist damit offensichtlich keine Lösung. Also ist $d = 0$. Einsetzen von $f(x) = cx$ in die Ursprungsgleichung liefert nun wie in der vorigen Lösung sofort die Antwort $f(x) = x$ für $\alpha = 1$.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 2. *Es seien A, B, C und D vier verschiedene Punkte auf einem Kreis in dieser Reihenfolge. Im Sehnenviereck $ABCD$ sei AB die (einzige) längste Seite.*

Man beweise, dass die Ungleichung

$$AB + BD > AC + CD$$

gilt.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Es sei S der Diagonalenschnittpunkt, $a = AB$ und $c = CD$.

Da die Dreiecke ABS und DCS wegen des Sehnenvierecks ähnlich sind, gilt für geeignete Zahlen r und s, dass $AS = sa$, $BS = ra$, $DS = sc$ und $CS = rc$. Die gewünschte Ungleichung wird damit zu

$$a + ra + sc > sa + rc + c.$$

Das ist äquivalent zu

$$a(1 + r - s) > c(1 + r - s).$$

Diese Ungleichung ist aber richtig, weil laut Angabe $a > c$ und wegen der Dreiecksungleichung in ABS auch $1 + r > s$ gilt.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 1a.

Lemma. Seien x, y und z die Seiten eines Dreiecks, und seien αx, αy und αz die Seiten eines dazu ähnlichen, größeren Dreiecks mit einer reellen Zahl $\alpha > 1$.

Dann gilt $\alpha x + \alpha y + z > x + y + \alpha z$.

Beweis. Wegen der Dreiecksungleichung ist $x + y - z > 0$, folglich gilt wegen $\alpha > 1$ auch $\alpha \cdot (x + y - z) > x + y - z$. Dies ist äquivalent zur zu beweisenden Ungleichung. ■

Sei S der Diagonalenschnittpunkt. Die Dreiecke ABS und DCS sind ähnlich, wobei ABS größer ist und daher $\alpha = \frac{AB}{CD}$. Somit gilt

$$AB+BD = AB+BS+SD = \alpha\cdot CD+\alpha\cdot CS+SD > CD+CS+\alpha\cdot SD = CD+CS+SA = CD+AC.$$

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 2. Es sei S der Schnittpunkt der beiden Diagonalen, vgl. Abbildung 1.

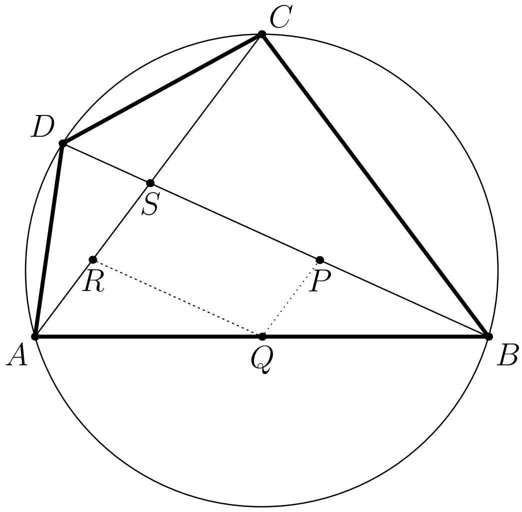

Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 2

Die beiden Dreiecke ABS und DCS sind ähnlich wegen Peripheriewinkelsatz. Da $AB > DC$ ist, folgt $AS > DS$ bzw. $BS > CS$. Es sei Q jener Punkt auf AB, für den $AQ = CD$ gilt, und R jener Punkt auf AC, für den $AR = DS$ gilt. Dann sind die Dreiecke ARQ und DSC kongruent (wegen der Gleichheit zweier Seiten und des davon eingeschlossenen Winkels) und es gilt $RQ = CS$. Somit sind ARQ und ASB ähnlich, daher ist RQ parallel zu SB.

Die Parallele zur Diagonalen AC durch den Punkt Q schneide die Diagonale BD in P. Das entstehende Viereck $PQRS$ ist dann ein Parallelogramm.

Dann gilt

$$AC = AR + RS + CS = DS + PQ + CS,$$
$$BD = BP + PS + DS = BP + CS + DS.$$

Daher gilt

$$AC - BD = PQ - BP,$$

und mit der Dreiecksungleichung folgt

$$AC - BD = PQ - BP < BQ = AB - CD.$$

Daraus folgt aber unmittelbar die Behauptung.

(Karl Czakler) □

Lösung 3. Wir setzen $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DCA =: 180° - \varphi$. Den Umkreisradius des Sehnenvierecks bezeichnen wir mit R. Die Streckensymmetrale von AD bezeichnen wir mit g.

Wir setzen $\beta := \min\{\sphericalangle BAD, \sphericalangle ADB\}$ und $\gamma := \min\{\sphericalangle CAD, \sphericalangle ADC\}$. Aufgrund der Winkelsumme im Dreieck BAD gilt $\beta \leq \varphi/2$. Aufgrund des Sinussatzes im Dreieck BAD und aufgrund der Additionstheoreme gilt

$$\begin{aligned} AB + BD &= 2R(\sin\beta + \sin(\varphi - \beta)) \\ &= 2R\Big(2 \cdot \sin\Big(\frac{\beta + (\varphi - \beta)}{2}\Big) \cdot \cos\Big(\frac{\beta - (\varphi - \beta)}{2}\Big)\Big) \\ &= 4R \sin\frac{\varphi}{2} \cos\Big(\beta - \frac{\varphi}{2}\Big). \end{aligned}$$

Analog erhalten wir $\gamma \leq \varphi/2$ und

$$AC + CD = 4R \sin\frac{\varphi}{2} \cos\Big(\gamma - \frac{\varphi}{2}\Big).$$

Beide auftretenden Argumente des Cosinus sind im Intervall $[-90°, 0]$, wo der Cosinus streng monoton wachsend ist. Zu zeigen bleibt damit $\beta > \gamma$.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\beta = \sphericalangle BAD$. In diesem Fall liegen D und B auf derselben Seite von g. Damit muss auch C auf derselben Seite von g liegen, woraus $\gamma = \sphericalangle CAD < \sphericalangle BAD = \beta$ folgt.

Es verbleibt der Fall, dass $\beta = \sphericalangle ADB$. Daraus folgt $\sphericalangle ADB \leq \varphi/2 < 90°$, der Winkel über der längsten Seite AB des Sehnenvierecks ist damit spitz. Da $AB > CD$ folgt daraus $\beta = \sphericalangle ADB > \sphericalangle CAD \geq \gamma$ wie gewünscht.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 4. Es sei ε die Ellipse, die A und D als Brennpunkte hat und durch den Punkt B geht. Für jeden Punkt K im Inneren der Ellipse ε gilt:

$$AK + DK < AB + DB.$$

Es ist also zu zeigen, dass C im Inneren der Ellipse liegt.

Es sei nun s die Streckensymmetrale von AD, die die gemeinsame Symmetrieachse des Umkreises des Vierecks und der Ellipse ist. Weiters sei P der Schnittpunkt von s mit dem Kreisbogen ABD (siehe Abbildung 2).

Aufgrund der Anordnung der Punkte A, B, C und D auf dem zugehörigen Umkreis liegt C auf derselben Seite der Achse AD wie B und der einzige Bereich des Kreises, der dort außerhalb der Ellipse ist, ist der Kreisbogen BPB', wobei B' die Spiegelung von B an s ist. Es bleibt also zu zeigen, dass C nicht auf BPB' liegen kann.

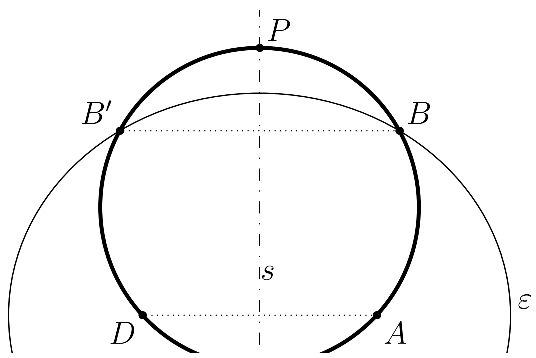

Abbildung 2: Aufgabe 2, Lösung 4, Notationen

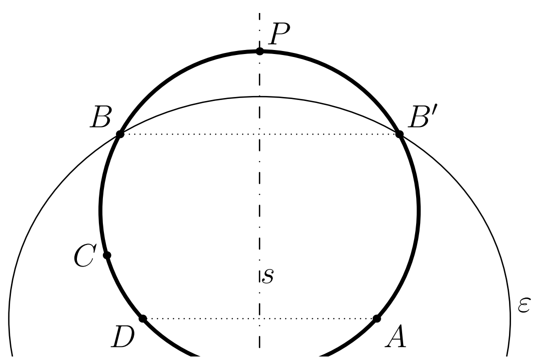

Abbildung 3: Aufgabe 2, Lösung 4, B links

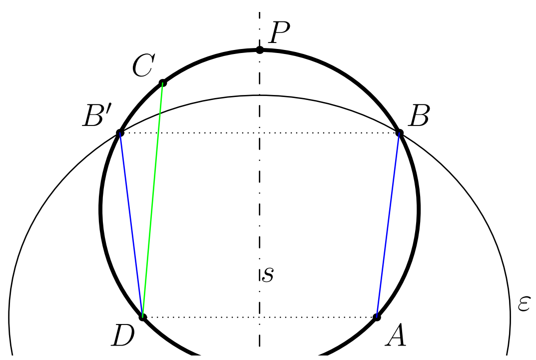

Abbildung 4: Aufgabe 2, Lösung 4, Fall 1

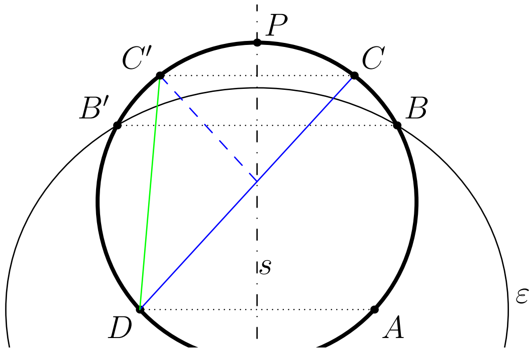

Abbildung 5: Aufgabe 2, Lösung 4, Fall 2

Falls B auf s liegt oder auf der Seite von s ist, die A nicht enthält, vgl. Abbildung 3, muss dann C auf dem Bogen BD, der A nicht enthält, liegen und ist offensichtlich nicht auf BPB'. Es reicht also, den Fall zu betrachten, in dem B auf derselben Seite von s wie A liegt.

Fall 1: C liegt auf dem Bogen $B'P$, der B nicht enthält (siehe Abbildung 4).

In diesem Fall liegt DC näher am Mittelpunkt des Umkreises von $ABCD$ als $DB' = AB$ oder fällt mit DB' zusammen, sodass $DC \geq AB$ gilt, was ein Widerspruch zur Angabe ist.

Fall 2: C liegt auf dem Bogen BP, der B' nicht enthält (siehe Abbildung 5).

Sei C' das Bild von C unter der Spiegelung an s. Aus Fall 1 wissen wir bereits, dass $DC' > AB$ gilt. Wenn wir aber DC bis zur Symmetrieachse s folgen und dann die Strecke zu C' gehen, ist das einerseits aus Symmetriegründen genausolang wie DC, andererseits natürlich länger als oder gleich lang wie die direkte Verbindung DC'. Damit gilt $DC \geq DC' > AB$, was wieder einen Widerspruch zur Angabe ergibt.

(Thiemo Dsubanko, Stefanie Rauch) □

Aufgabe 3. *In einem Raum sind n Kinder, von denen jedes mindestens ein Zuckerl hat. In Runde 1, Runde 2, usw., werden nun weitere Zuckerln an diese Kinder nach folgender Regel verteilt:*

In Runde k bekommt jedes Kind, dessen Zuckerlanzahl teilerfremd zu k ist, ein Zuckerl dazu.

Man zeige, dass nach einigen Runden die Kinder im Raum höchstens zwei verschiedene Anzahlen von Zuckerln haben.

(Theresia Eisenkölbl)

Lösung. Wir bemerken zunächst, dass ein Kind, das zu Beginn der Runde k entweder $k-1$ oder $k+1$ Zuckerl hat, wegen $\operatorname{ggT}(k, k \pm 1) = 1$ ein Zuckerl dazubekommt und daher in der nächsten Runde $(k+1)$ wieder in derselben Situation ist. Hat ein Kind $k+d$ Zuckerl, dann hat es nach Runde k entweder $(k+1)+(d-1)$ oder $(k+1)+d$ Zuckerl. Die Differenz zwischen Zuckerlanzahl und Rundenanzahl bleibt also gleich oder fällt um eins, und sie ist zu Beginn positiv oder Null. Da wir schon gesehen haben, dass sich die Differenz -1 nicht mehr ändern kann, kann die Differenz also niemals unter -1 fallen.

Wenn wir nun noch zeigen, dass diese Differenz nur für -1 und 1 dauerhaft konstant bleiben kann, ist klar, dass jedes Kind nach genügend langem Warten entweder $k-1$ oder $k+1$ Zuckerl zu Beginn der Runde k hat.

Falls die Differenz 0 ist, dann hat das Kind k Zuckerl. Ist $k = 1$, dann erhält es ein Zuckerl, in der nächsten Runde aber keines und fällt so nach zwei Schritten auf Differenz -1. Ist $k > 1$, so erhält das Kind sofort kein Zuckerl und fällt auf Differenz -1.

Falls die Differenz d größer als 1 ist, dann muss innerhalb von d Schritten eine Runde vorkommen, deren Nummer durch d teilbar ist. Entweder ist die Differenz bis dahin sowieso schon gesunken oder d ist an dieser Stelle ein gemeinsamer Teiler von Rundenzahl und Zuckerlanzahl, somit sinkt dann die Differenz um eins und kann nicht dauerhaft konstant bleiben.

Damit ist gezeigt, dass nach genügend langer Wartezeit alle Kinder zu Beginn der Runde k entweder $k-1$ oder $k+1$ Zuckerl haben und danach jede Runde ein Zuckerl erhalten.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 4. *Es seien ABC ein Dreieck und P ein Punkt im Inneren des Dreiecks, für den die Mittelpunkte M_B und M_A der Umkreise k_B bzw. k_A von ACP bzw. BCP außerhalb des Dreiecks ABC liegen. Weiters seien die drei Punkte A, P und M_A kollinear und ebenso die drei Punkte B, P und M_B. Die durch P verlaufende Parallele zur Seite AB schneide die Kreise k_A und k_B in den Punkten D bzw. E mit D, $E \neq P$.*

Man zeige, dass dann $DE = AC + BC$ gilt.

(Walther Janous)

Lösung 1. Wir setzen $\varphi := \sphericalangle CBP$, vgl. Abbildung 6.

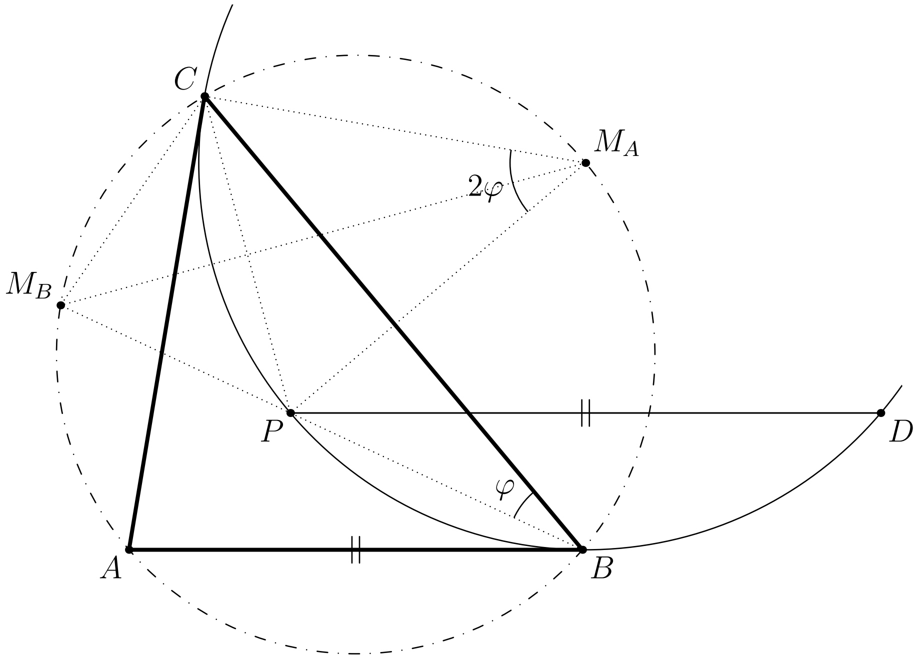

Abbildung 6: Aufgabe 4, Lösung 1

Dann ist der zugehörige Zentriwinkel $\sphericalangle CM_AP = 2\varphi$. Da M_ACM_BP ein Deltoid mit Symmetrieachse M_AM_B ist, folgt $\sphericalangle CM_AM_B = \varphi = \sphericalangle CBM_B$. Daher liegen B und (wegen einer entsprechenden Überlegung) auch A am Umkreis von M_ACM_B, mit anderen Worten, die Mittelpunkte M_A und M_B liegen am Umkreis des Dreiecks ABC.

Daher sind M_A und M_B die Südpole der Dreieckseckpunkte A bzw. B und P ist der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Deshalb ist $\sphericalangle PBA = \sphericalangle CBP = \varphi$ und wegen $PD \parallel AB$ gilt auch $\sphericalangle BPD = \varphi$. Also ist $PBDC$ ein gleichschenkeliges Trapez mit gleich langen Diagonalen, woraus sich $PD = BC$ ergibt.

Analog zeigt man $PE = AC$ und erhält damit durch Addition $DE = AC + BC$.

(Clemens Heuberger, Walther Janous) □

Lösung 1a. Wir zeigen wie in Lösung 1, dass A und B am Umkreis von M_ACM_B liegen.

Über der Sehne AM_B ergibt der Peripheriewinkelsatz daher $\sphericalangle M_BBA = \sphericalangle M_BM_AA = \varphi = \sphericalangle CBM_B$. Wegen der Parallelität von DE und AB gilt auch $\sphericalangle BPD = \sphericalangle PBA = \varphi$. Andererseits gilt im Kreis k_A klarerweise $\sphericalangle PDB = \sphericalangle PCB$, weshalb die Dreiecke PCB und BDP ähnlich sind. Daher liegen den Sehnen DP und BC die gleichen Winkel gegenüber, sie sind daher gleich lang.

Analog zeigen wir $PE = AC$ und Summation ergibt das Ergebnis.

(Clemens Heuberger) □

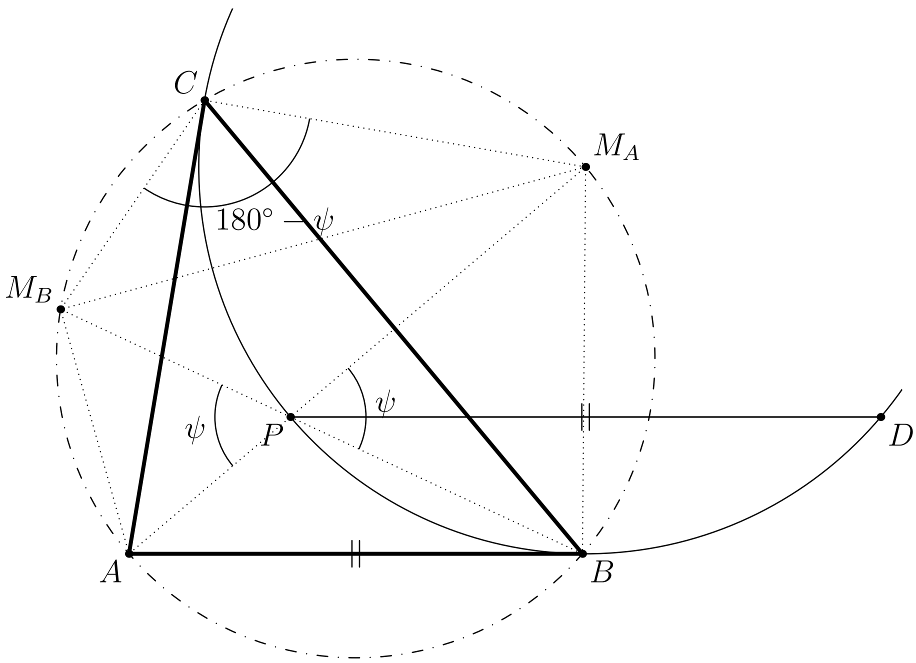

Abbildung 7: Aufgabe 4, Lösung 1b

Lösung 1b. Weil A, P und M_A bzw. B, P und M_B auf je einer Geraden liegen, folgt $\sphericalangle M_BPA = \sphericalangle BPM_A =: \psi$, vgl. Abbildung 7.

Die Dreiecke BM_AP und PM_BA sind gleichschenkelig. Deshalb ergeben sich $\sphericalangle PAM_B = \sphericalangle M_ABP = \psi$, d. h. $\sphericalangle M_AAM_B = \sphericalangle M_ABM_B$. Folglich liegen die vier Punkte A, B, M_A und M_B auf einem Kreis.

Da das Viereck M_ACM_BP ein Deltoid mit Symmetrieachse M_AM_B ist, gilt $\sphericalangle M_BCM_A = \sphericalangle M_APM_B = 180° - \psi$. Damit ist AM_ACM_B ein Sehnenviereck, die Mittelpunkte M_A und M_B liegen also am Umkreis des Dreiecks ABC.

Die Behauptung ergibt sich nun wie in Lösung 1.

(Walther Janous) □

Lösung 1c. Es sei M_C der Mittelpunkt des Umkreises k_C des Dreiecks ABP, vgl. Abbildung 8.

Die Gerade M_AM_C ist die Streckensymmetrale von BP. Sie steht daher normal auf die Gerade $BM_B = PM_B$. Analog steht M_BM_C normal auf die Gerade $AM_A = PM_A$. Daher ist P der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $M_AM_BM_C$.

Spiegelt man nun diesen Höhenschnittpunkt an den Seiten dieses Dreiecks, so erhält man die Punkte A, B und C. Da sie nach einem bekannten Satz am Umkreis des Dreiecks $M_AM_BM_C$ liegen, folgt, dass der Umkreis des Dreiecks ABC gleich dem Umkreis des Dreiecks $M_AM_BM_C$ ist.

Die Behauptung ergibt sich nun wie in Lösung 1.

(Karl Czakler) □

Aufgabe 5. *Auf einer Kreislinie liegen 2018 Punkte. Jeder dieser Punkte wird mit einer ganzen Zahl beschriftet. Dabei sei jede Zahl größer als die Summe der zwei Zahlen, die im Uhrzeigersinn unmittelbar davor stehen.*

Man bestimme die größtmögliche Anzahl von positiven Zahlen, die sich unter den 2018 Zahlen befinden können.

(Walther Janous)

Lösung 1. Wir nennen die Punkte im Uhrzeigersinn a_0, a_1, $\ldots$, a_{2017} mit zyklischer Notation, d.h. $a_{k+2018} = a_k$ für alle ganzen Zahlen k.

Lemma 1. In einer gültigen Anordnung dürfen keine zwei nicht-negativen Zahlen benachbart sein.

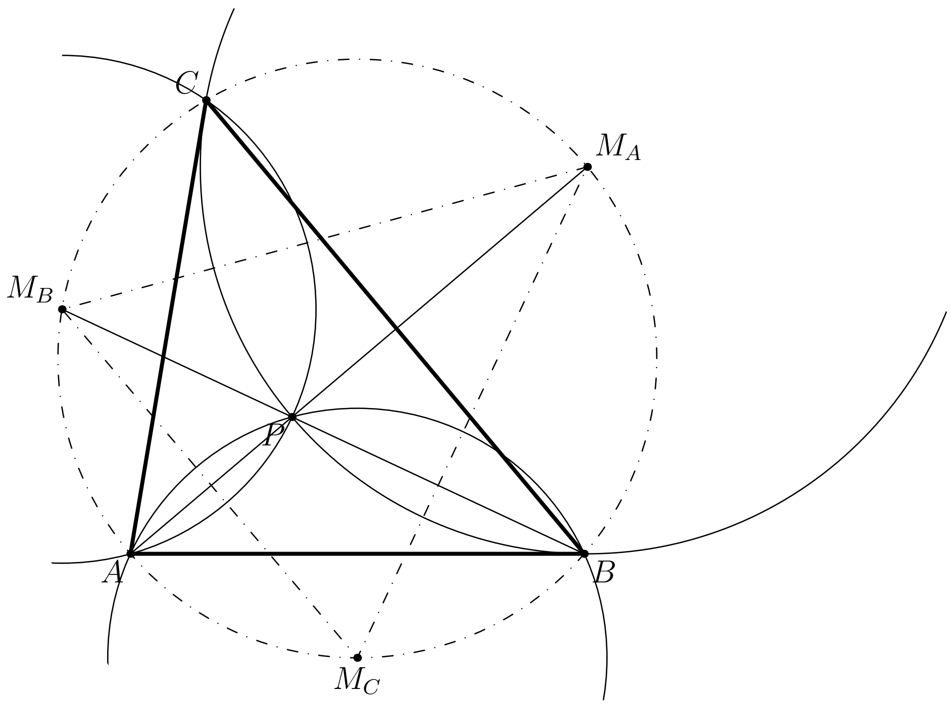

Abbildung 8: Aufgabe 4, Lösung 1c

Beweis. Angenommen, es gibt irgendwo zwei benachbarte Zahlen a_{k-1} und a_k, die beide nicht-negativ sind. Dann folgt $a_{k+1} > a_k + a_{k-1} \geq a_k$, wobei sich die erste Ungleichung aus der Bedingung in der Angabe ergibt und die zweite aus $a_{k-1} \geq 0$. Damit sind nun auch a_k und a_{k+1} beide nicht-negativ, also folgt analog $a_{k+2} > a_{k+1}$, dann $a_{k+3} > a_{k+2}$, und so weiter, bis wir schließlich $a_{k+2018} > a_{k+2017} > \cdots > a_{k+1} > a_k = a_{k+2018}$ haben, Widerspruch. ∎

Es kann also höchstens jede zweite Zahl nicht-negativ sein. Wir zeigen nun, dass auch das noch zu viele nicht-negative Zahlen sind.

Lemma 2. In einer gültigen Anordnung kann nicht jede zweite Zahl nicht-negativ sein.

Beweis. Nehmen wir an, das wäre so, also oBdA $a_{2k} \geq 0$ und $a_{2k+1} < 0$ für alle ganzen k. (Der andere Fall, $a_{2k} < 0$ und $a_{2k+1} \geq 0$, läuft völlig analog, da wir den Beginn der Beschriftung ja beliebig gewählt haben.) Dann gilt $a_3 > a_2 + a_1 \geq a_1$, wobei wieder die erste Ungleichung aus der Angabe und die zweite aus $a_2 \geq 0$ folgt. Analog erhalten wir $a_5 > a_3$, weiters $a_7 > a_5$, et cetera, bis $a_1 = a_{2019} > a_{2017} > a_{2015} > \cdots > a_3 > a_1$, Widerspruch. ∎

Zusammenfassend ist eine Anordnung mit mehr als 1009 nicht-negativen Zahlen also nicht möglich, weil dann nach Schubfachschluss irgendwo zwei nicht-negative Zahlen benachbart sind, was gemäß Lemma 1 nicht erlaubt ist, und eine Anordnung mit genau 1009 nicht-negativen Zahlen widerspricht entweder Lemma 1 oder Lemma 2.

Mit 1008 positiven und 1010 negativen Zahlen finden wir beispielsweise die Anordnung

$$-4035, 1, -4033, 1, -4031, 1, -4029, \ldots, 1, -2021, 1, -2019, -2017,$$

deren Korrektheit wir leicht überprüfen können.

(Anmerkung: Es sind viele weitere Anordnungen mit 1008 positiven Zahlen möglich. Verringert man beispielsweise in einer gültigen Anordnung jede negative Zahl um 1, so erhält man eine weitere mögliche Anordnung. Es kann weiters gezeigt werden, dass jede möglichen Anordnungen drei aufeinanderfolgende negative Zahlen und ansonsten abwechselnd positive und negative Zahlen enthält, sowie dass für jede beliebige Wahl der positiven Zahlen eine Lösung existiert.)

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 1a. Lösung 1 funktioniert vom Prinzip her völlig gleich, wenn man in Lemma 1 zeigt, dass keine zwei *positiven* Zahlen benachbart sein dürfen, und ebenso in Lemma 2 die Möglichkeit von 1009 *positiven* Zahlen ausschließt. In beiden Fällen hat man in den Ungleichungsketten $a_{k+1} > a_k + a_{k-1} > a_k$ bzw. $a_3 > a_2 + a_1 > a_1$ sogar zwei echte Ungleichheitszeichen, kann also sogar $a_{k+1} \geq a_k + 2$ bzw. $a_3 \geq a_1 + 2$ zeigen.

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 1b. Alternativer Beweis von Lemma 1:

Wenn zwei aufeinanderfolgende Zahlen positiv sind, dann sind schon alle positiv, womit es für die Zahl nach dem (oder einem) Maximum unmöglich wird, die Ungleichung zu erfüllen. Somit kann höchstens jede zweite Zahl positiv sein.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 1c. Alternativer Beweis von Lemma 2:

Es gilt

$$a_0 > a_{2017} + a_{2016} > a_{2017} + a_{2015} + a_{2014} > \cdots > a_{2017} + a_{2015} + a_{2013} + \cdots + a_3 + a_1 + a_0.$$

Nach Subtraktion von a_0 auf beiden Seiten sehen wir, dass die Summe aller Zahlen mit ungeradem Index negativ ist. Analog gilt das auch für die Summe der Zahlen mit geradem Index. Somit muss jede dieser beiden Summen mindestens eine negative Zahl enthalten.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 1d. Eine mögliche Konfiguration kann auch in folgender Notation angegeben werden:

Wir definieren für $0 \leq 2k, 2k+1 \leq 2017$:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= -4035 + 2k, \\ a_{2k+1} &= \begin{cases} -2017 & \text{für } 2k+1 = 2017, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Wir überprüfen zuerst $a_{2k} + a_{2k+1} < a_{2k+2}$.

Falls der Index 2017 nicht involviert ist, ist das einfach $-4035 + 2k + 1 < -4035 + 2k + 2$, was sicher stimmt. Falls hingegen $2k + 1 = 2017$ ist, wird das zu $-4035 + 2016 - 2017 < -4035$, was ebenfalls stimmt.

Jetzt überprüfen wir noch $a_{2k-1} + a_{2k} < a_{2k+1}$.

Falls der Index 2017 nicht involviert ist, ist das $1 - 4035 + 2k < 1$ oder $2k < 4035$, was stimmt. Falls $2k - 1 = 2017$, dann wird die Ungleichung zu $-2017 - 4035 < 1$, was ebenfalls stimmt. Falls schließlich $2k + 1 = 2017$, dann wird das $1 - 4035 + 2016 < -2017$, was ebenfalls stimmt.

Damit ist alles bewiesen.

Bemerkung: Das Beispiel wurde konstruiert, indem alle positiven Terme gleich 1 gesetzt wurden, mit $a_0 = x$ startend die Ungleichungen vom ersten Typ auf Differenz 1 gesetzt wurden, und dann am Schluss ein Wert für x gewählt wurde, sodass alle übrigen Bedingungen erfüllt sind.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 6. *Man bestimme alle Ziffern z, sodass für jede ganze Zahl $k \geq 1$ eine ganze Zahl $n \geq 1$ mit der Eigenschaft existiert, dass die Dezimaldarstellung von n^9 mit mindestens k Ziffern z endet.*

(Walther Janous)

Lösung 1. Antwort: Die gesuchten Ziffern z sind $z \in \{0, 1, 3, 7, 9\}$.

Wir setzen $z_k := (\underbrace{z \dots z}_{k})_{10}$ für $k \geq 1$ und halten fest, dass die Aufgabenstellung äquivalent zur Lösung der Kongruenz

$$n^9 \equiv z_k \pmod{10^k} \tag{4}$$

für $k \geq 1$ ist.

Für $z = 0$ setze beispielsweise $n = 10^k$. Ab jetzt betrachte nur noch $z \in \{1, \dots, 9\}$.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\operatorname{ggT}(z, 10) \neq 1$. Dann gibt es eine Primzahl $p \in \{2, 5\}$ mit $p \mid z$. Für $k = 4$ ergibt sich aus (4)

$$n^9 \equiv z_4 = z \cdot 1111 \pmod{p^4}$$

(da diese Kongruenz modulo 10^4 gelten muss, und daher auch modulo 2^4 und modulo 5^4).

Die rechte Seite ist durch p teilbar, also ist auch die linke Seite n^9 durch p teilbar, daher weiters n durch p teilbar, somit n^9 sogar durch p^9 teilbar, also kongruent 0 modulo p^4, damit schließlich auch die rechte Seite $z \cdot 1111$ durch p^4 teilbar und daher wegen $\operatorname{ggT}(1111, 10) = 1$ auch $p^4 \mid z$. Das geht sich im Dezimalsystem wegen $p^4 > 10 > z$ nicht aus. Also gibt es hier keine Lösung.

Wir betrachten nun die übrigen Fälle $z \in \{1, 3, 7, 9\}$. Sei r der inverse Rest von 9 modulo $\varphi(10^k)$, der wegen $\operatorname{ggT}(9, \varphi(10^k)) = \operatorname{ggT}(9, 4 \cdot 10^{k-1}) = 1$ existiert. Wir behaupten, dass $n := z_k^r$ eine Lösung von (4) ist. Wegen $\operatorname{ggT}(z_k, 10^k) = 1$ und $9r \equiv 1 \pmod{\varphi(10^k)}$ können wir mit das mit Euler-Fermat leicht zeigen:

$$n^9 = (z_k^r)^9 = z_k^{9r} \equiv z_k \pmod{10^k}.$$

Anmerkung: Allgemein gilt für alle ganzen Zahlen $\ell > 0$, $m \geq 1$ und b mit $\operatorname{ggT}(b, m) = 1$ und $\operatorname{ggT}(\ell, \varphi(m)) = 1$, dass die Kongruenz $n^\ell \equiv b \pmod{m}$ eine eindeutige Lösung n modulo m besitzt, nämlich $n \equiv b^r \pmod{m}$, wobei r der inverse Rest von ℓ modulo $\varphi(m)$ ist. Der Beweis erfolgt ganz analog zu obigen Überlegungen.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 1a. Die Fälle $z \in \{2, 4, 5, 6, 8\}$ können auch explizit ausgeschlossen werden.

Für $z \in \{2, 4, 6, 8\}$ muss n^9 durch 2^9 teilbar sein, insbesondere also auch durch 8. Die dreistelligen Enden 222, 444 und 666 sind aber nicht durch 8 teilbar, wie wir modulo 8 leicht nachrechnen können. Weil auch das vierstellige Ende 8888 nicht durch 16 teilbar ist, ist keine gerade Ziffer $z \neq 0$ brauchbar.

Die Ziffer $z = 5$ entfällt ebenso: Wenn n^9 auf 55 endet, ist n^9 durch 5 teilbar, also muss auch n durch 5 teilbar sein. Dann ist n^9 sogar durch 5^9 teilbar, und somit insbesondere auch durch 25. Zahlen, die auf 55 enden, sind aber keine Vielfachen von 25.

(Walther Janous) □

Lösung 1b. Die Ziffer $z = 5$ lässt sich auch wie folgt ausschließen:

Für $z = 5$ endet n auf 5, aber jede Potenz von einem solchen n endet auf 25 oder 75.

Beweis: Sei $n = 5 + 10x$ mit $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und sei $m \geq 2$ eine ganze Zahl, dann gilt modulo 100 nach dem binomischen Lehrsatz, dass

$$(5 + 10x)^m = 5^m + m \cdot 5^{m-1} \cdot 10x + 100R \equiv 5^m + 50 \cdot 5^{m-2} \cdot m \cdot x \pmod{100}$$

(mit $R = \sum_{l=2}^{m} \binom{m}{l} \cdot 5^{m-l} \cdot 10^{l-2} x^l \in \mathbb{Z}$). Wir wissen, dass 5^m immer auf 25 endet, und durch Addition eines Vielfachen von 50 erhalten wir sicher eine Zahl, die auf 25 oder 75 endet.

(Walther Janous) □

Lösung 1c. Der Fall $z = 9$ lässt sich auch mit $n = 10^k - 1$ lösen, da $(10^k - 1)^9 = C \cdot 10^k - 1$ für eine passende positive ganze Zahl C gilt und damit mit k Neunern endet.

Alternativ: Für $n \equiv -1 \pmod{10^k}$ gilt natürlich $n^9 \equiv -1 \pmod{10^k}$.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. In dieser Lösung zeigen wir mittels sogenannten Hensel-Liftings, dass für $\operatorname{ggT}(z, 10) = 1$ die Kongruenz (4) stets lösbar ist. Für Lösung 2b unten zeigen wir auch nebenher, dass die Lösung eindeutig modulo 10^k ist. Wir zeigen also folgendes Lemma:

> *Lemma.* Sei $z \in \{1, 3, 7, 9\}$ und $k \geq 1$. Dann existiert eine Lösung n von (4), und diese Lösung ist eindeutig modulo 10^k.

> *Beweis.* Wir beweisen das Lemma durch Induktion nach k. Für $k = 1$ überprüfen wir leicht, dass $n \equiv z \pmod{10}$ die einzige mögliche Wahl modulo 10 ist.
>
> Für den Schritt von k auf $k+1$ fixieren wir zunächst eine Lösung N von (4) für k. Wir definieren $Y \in \mathbb{Z}$ durch $N^9 = z_k + Y \cdot 10^k$.
>
> Für jede Lösung n von (4) für $k + 1$ gilt
>
> $$n^9 \equiv z_{k+1} \equiv z_k \pmod{10^k}.$$
>
> Daraus folgt $n \equiv N \pmod{10^k}$, da N nach Induktionsvoraussetzung die einzige Zahl modulo 10^k war, deren neunte Potenz kongruent zu z_k ist. Damit ist n sicher darstellbar als $n = N + x \cdot 10^k$ für ein passendes $x \in \mathbb{Z}$.
>
> Dann ist (4) für $k + 1$ nach dem binomischen Lehrsatz äquivalent zu
>
> $$\begin{aligned} z_{k+1} &\equiv n^9 = (N + x \cdot 10^k)^9 \\ &= N^9 + 9 \cdot N^8 \cdot x \cdot 10^k + R \cdot 10^{2k} \\ &\equiv N^9 + 9 \cdot N^8 \cdot x \cdot 10^k \pmod{10^{k+1}} \end{aligned}$$
>
> (wobei $R = \sum_{l=2}^{9} \binom{9}{l} \cdot N^{9-l} \cdot x^l \cdot 10^{k(l-2)} \in \mathbb{Z}$ alle im binomischen Lehrsatz auftretenden Summanden repräsentiert, die mindestens mit 10^{2k} multipliziert werden und modulo 10^{k+1} daher irrelevant sind).
>
> Durch Einsetzen von $N^9 = z_k + Y \cdot 10^k$ erhalten wir die äquivalente Kongruenz
>
> $$\begin{aligned} z_{k+1} &\equiv z_k + Y \cdot 10^k + 9 \cdot N^8 \cdot x \cdot 10^k \\ &= z_k + 10^k(Y + 9 \cdot N^8 \cdot x) \pmod{10^{k+1}}. \end{aligned}$$
>
> Wegen $z_{k+1} = z \cdot 10^k + z_k$ können wir auf beiden Seiten z_k subtrahieren und durch 10^k dividieren und erhalten die äquivalente Kongruenz
>
> $$Y + 9 \cdot N^8 \cdot x \equiv z \pmod{10}. \tag{5}$$
>
> Da $N^9 \equiv z_k \equiv z \pmod{10}$ und $\operatorname{ggT}(z, 10) = 1$, folgt $\operatorname{ggT}(N^9, 10) = 1$ und damit auch $\operatorname{ggT}(N, 10) = 1$. Damit ist nach dem Satz von Euler-Fermat auch $N^8 = (N^4)^2 \equiv 1 \pmod{10}$. Daher ist (5) äquivalent zu $Y - x \equiv z \pmod{10}$ und damit zu $x \equiv Y - z \pmod{10}$.
>
> Zusammenfassend stellen wir somit fest, dass $n^9 \equiv z_{k+1} \pmod{10^{k+1}}$ genau dann gilt, wenn
>
> $$n \equiv N + (Y - z)10^k \pmod{10^{k+1}}. \tag{6}$$
>
> Damit ist sowohl die Existenz solcher Lösungen n als auch deren Eindeutigkeit modulo 10^{k+1} gezeigt. ■

Mit Hilfe dieser Methode (wir wählen in jedem Schritt eine beliebige Lösung N von (4) für k und erhalten daraus die eindeutige $(k + 1)$-te Ziffer) können wir auch leicht die letzten Stellen der gesuchten Zahlen n ausrechnen, siehe Tabelle 1.

(Clemens Heuberger, Walther Janous, Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 2a. Wie in den anderen Lösungen stellen wir fest, dass 0 die gewünschte Eigenschaft hat, 2, 4, 5, 6 und 8 aber nicht.

Für die Ziffern z, die teilerfremd zu 10 sind, verwenden wir das Henselsche Lemma (dessen genereller Beweis ähnlich verläuft wie Lösung 2):

z	Letzte 20 Stellen von n
1	48380786853911584391
3	95637820349815348853
7	71520157468718084337
9	99999999999999999999

Tabelle 1: Letzte 20 Stellen der gesuchten n

Lemma (Henselsches Lemma). Sei $f(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, p eine Primzahl und $m \geq 1$ eine ganze Zahl. Ist nun r eine ganze Zahl mit den Eigenschaften

$$f(r) \equiv 0 \pmod{p^m} \text{ und } f'(r) \not\equiv 0 \pmod{p},$$

dann existiert eine ganze Zahl s mit

$$f(s) \equiv 0 \pmod{p^{m+1}} \text{ und } s \equiv r \pmod{p^m}.$$

Dieses s ist modulo p^{m+1} eindeutig bestimmt.

Durch wiederholtes Anwenden des Lemmas mit $m = 1, 2, \ldots, k-1$ erhält man sofort das folgende Korollar, das ebenfalls als Henselsches Lemma bezeichnet wird.

Lemma (Henselsches Lemma, Version 2). Sei $f(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, p eine Primzahl und $k \geq 1$ eine ganze Zahl. Ist nun r eine ganze Zahl mit den Eigenschaften

$$f(r) \equiv 0 \pmod{p} \text{ und } f'(r) \not\equiv 0 \pmod{p},$$

dann existiert eine ganze Zahl s mit

$$f(s) \equiv 0 \pmod{p^k} \text{ und } s \equiv r \pmod{p}.$$

Dieses s ist modulo p^k eindeutig bestimmt.

Sei nun k eine beliebige ganze Zahl ≥ 1 und z_k wie in den übrigen Lösungen die Zahl $zzz\ldots z$, die also im Dezimalsystem k Ziffern z hat. Dann wählen wir als Polynom $f(x) = x^9 - z_k$.

Es gilt $f(z) \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 2$, $f'(z) \equiv 9z^8 \equiv 1 \pmod 2$, $f(z) \equiv z^9 - z \equiv 0 \pmod 5$ und $f'(z) \equiv 9z^8 \equiv 4 \pmod 5$ (da $z^4 \equiv 1 \pmod 5$ gilt).

Die Voraussetzungen von Version 2 des Henselschen Lemmas sind also erfüllt und es gibt daher Zahlen s_1 und s_2 mit $f(s_1) \equiv 0 \pmod{2^k}$ und $f(s_2) \equiv 0 \pmod{5^k}$. Nach dem Chinesischen Restsatz gibt es eine Zahl s mit $s \equiv s_1 \pmod{2^k}$ und $s \equiv s_2 \pmod{5^k}$ und somit auch $f(s) \equiv 0 \pmod{10^k}$.

Das bedeutet aber $s^9 \equiv z_k \pmod{10^k}$ wie gewünscht.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2b. Statt die Zahlen $z \in \{2, 4, 5, 6, 8\}$ elegant über Teilbarkeiten auszuschließen, können wir das auch (zugegeben etwas brutal) direkt mit der Konstruktionsmethode aus Lösung 2 erledigen. Wir überprüfen leicht, dass $n \equiv z \pmod{10}$ für alle Ziffern z die einzige Lösung modulo 10 ist.

Wie in Lösung 2 berechnen wir nun iterativ, für welche Restklassen modulo 10^k deren neunte Potenz auf k Ziffern z endet, indem wir in jedem Schritt n als $n = N + x \cdot 10^k$ für eine Lösung N von (4) für k und ein passendes $x \in \mathbb{Z}$ ansetzen. Zum leichteren Rechnen wählen wir als N jeweils den kleinsten positiven Repräsentanten $0 \leq N < 10^k$ einer solchen Restklasse modulo 10^k.

Somit erhalten wir für x die Bedingung (5), also $9N^8x \equiv z - Y \pmod{10}$. Wegen $N \equiv z \pmod{10}$ und $9 \equiv -1 \pmod{10}$ können wir die Kongruenz auch als $z^8x \equiv Y - z \pmod{10}$ schreiben. Da

z	k	N	Y mod 10	$z^8x \equiv Y - z \pmod{10}$	x_1	x_2	n_1	n_2
2	1	2	1	$6x \equiv 9 \pmod{10}$	–	–	–	–
4	1	4	4	$6x \equiv 0 \pmod{10}$	0	5	4	54
	2	4	1	$6x \equiv 7 \pmod{10}$	–	–	–	–
		54	3	$6x \equiv 9 \pmod{10}$	–	–	–	–
5	1	5	2	$5x \equiv 7 \pmod{10}$	–	–	–	–
6	1	6	9	$6x \equiv 3 \pmod{10}$	–	–	–	–
8	1	8	2	$6x \equiv 4 \pmod{10}$	4	9	48	98
	2	48	6	$6x \equiv 8 \pmod{10}$	3	8	348	848
		98	8	$6x \equiv 0 \pmod{10}$	0	5	98	598
	3	348	5	$6x \equiv 7 \pmod{10}$	–	–	–	–
		848	7	$6x \equiv 9 \pmod{10}$	–	–	–	–
		98	9	$6x \equiv 1 \pmod{10}$	–	–	–	–
		598	1	$6x \equiv 3 \pmod{10}$	–	–	–	–

Tabelle 2: Lifting-Schritte für nicht teilerfremde Ziffern

$z \in \{2, 4, 5, 6, 8\}$ nicht teilerfremd zu 10 ist, besitzt diese Kongruenz aber entweder keine oder mehrere Lösungen modulo 10. Im Falle mehrerer Lösungen schreiben wir die Lösungen als x_j und die resultierenden Werte für n als n_j für passende Indizes j.

Nun brauchen wir die Ziffern durch Einsetzen in diese Bedingung nur noch der Reihe nach ausrechnen (bzw. feststellen, in welchen Fällen das möglich ist). In Tabelle 2 ist jeweils der Schritt von k auf $k + 1$ angegeben. Es zeigt sich, dass spätestens für $k = 3$ keine Lösung mehr existiert. Somit sind diese z ausgeschlossen. (Anmerkung: Nebenher finden wir damit auch für jedes z das größtmögliche k, für das eine solche Zahl n existiert, sowie alle Zahlen n (modulo 10^k) mit der gewünschten Eigenschaft.)

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 3. Wie in den anderen Lösungen finden wir leicht eine gültige Zahl für $z = 0$, und schließen $z \in \{2, 4, 5, 6, 8\}$ aus. Nun wollen wir zeigen, dass für jedes $z \in \{1, 3, 7, 9\}$ und jedes gewünschte k eine solche Zahl n existiert.

Sei M die Menge der zu 10^k teilerfremden Restklassen modulo 10^k. Wir wissen, dass $|M| = \varphi(10^k) = 4 \cdot 10^{k-1}$.

Lemma. Sei $k \geq 1$ und seien x und y zu 10 teilerfremd und inkongruent modulo 10^k. Dann sind auch x^9 und y^9 inkongruent modulo 10^k.

Beweis. Wir nehmen indirekt an, dass $x^9 \equiv y^9 \pmod{10^k}$ und damit auch $x^9 \equiv y^9 \pmod{p^k}$ für $p \in \{2, 5\}$. Dann gilt auch $x^9 \equiv y^9 \pmod{p}$. Wegen $a^9 \equiv a \pmod{p}$ für alle a folgt $x \equiv y \pmod{p}$. Nach dem Lifting-the-Exponent-Lemma folgt

$$k \leq v_p(x^9 - y^9) = v_p(x - y) + v_p(9) = v_p(x - y),$$

also $x \equiv y \pmod{p^k}$. Da dies für $p \in \{2, 5\}$ gilt, folgt nach dem chinesischen Restsatz $x \equiv y \pmod{10^k}$, ein Widerspruch.

Wenn man das Lifting-the-Exponent-Lemma vermeiden will, so schreibt man

$$x^9 - y^9 = (x - y)(x^8 + x^7y + x^6y^2 + x^5y^3 + x^4y^4 + x^3y^5 + x^2y^6 + xy^7 + y^8).$$

Der zweite Faktor ist wegen $y \equiv x \pmod{p}$ kongruent zu

$$x^8 + x^8 + x^8 + x^8 + x^8 + x^8 + x^8 + x^8 + x^8 \equiv 9x^8 \not\equiv 0 \pmod{p},$$

daher gilt $v_p(x^9 - y^9) = v_p(x - y)$. (In der Tat ist das die Hälfte des Beweises des Lifting-the-Exponent-Lemmas). ∎

Wenn wir aus jeder Restklasse aus M einen Repräsentanten wählen, also beispielsweise die $\varphi(10^k)$ Zahlen $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 10^k \text{ und } \mathrm{ggT}(x, 10^k) = 1\}$, und deren neunte Potenzen betrachten, so liegen diese daher alle in verschiedenen Restklassen aus M. Da M ebenfalls genau $\varphi(10^k)$ Elemente hat, kommen also *alle* Restklassen aus M darunter vor, deswegen insbesondere auch die Restklassen $(111\ldots1)_{10}$, $(333\ldots3)_{10}$, $(777\ldots7)_{10}$ und $(999\ldots9)_{10}$.

Anmerkung: Im Gegensatz zu anderen Lösungen haben wir hier nur die Existenz eines solchen n gezeigt, ohne zu wissen, wie man es (effizient) berechnet.

(Clemens Heuberger, Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 3a. Diese Variante ist eine Art Cross-Over zwischen Lösungen 1 und 3: Wir beweisen hier nur das Lemma aus Lösung 3 mit Hilfe des Satzes von Euler-Fermat.

Sei M die Menge der zu 10^k teilerfremden Restklassen modulo 10^k.

Lemma. Wenn x und y zwei Zahlen aus verschiedenen Restklassen aus M sind, dann liegen auch x^9 und y^9 in verschiedenen Restklassen aus M.

Beweis. Zunächst ist klar, dass x^9 und y^9 überhaupt in Restklassen aus M liegen, da x^9 genau dann teilerfremd zu 10^k ist, wenn x teilerfremd zu 10^k ist.

Seien nun x und y zwei zu 10^k teilerfremde Zahlen mit $x^9 \equiv y^9 \pmod{10^k}$. Wegen $\mathrm{ggT}(x, 10^k) = 1$ gilt nach Euler-Fermat $x^{a+\varphi(10^k)} \equiv x^a \pmod{10^k}$ für alle ganzen Zahlen a, daher können wir im Exponenten von x modulo $\varphi(10^k)$ rechnen (und ebenso im Exponenten von y).

Wegen $\mathrm{ggT}(9, \varphi(10^k)) = \mathrm{ggT}(9, 4 \cdot 10^{k-1}) = 1$ existiert modulo $\varphi(10^k)$ ein zu 9 inverser Rest r, sodass also $9r \equiv 1 \pmod{\varphi(10^k)}$. Nehmen wir von $x^9 \equiv y^9 \pmod{10^k}$ auf beiden Seiten die r-te Potenz, so folgt daher $x^{9r} \equiv y^{9r} \pmod{10^k}$, also $x \equiv y \pmod{10^k}$. Falls die neunten Potenzen von x^9 und y^9 in derselben Restklasse modulo 10^k liegen, so gilt das daher auch für x und y. ∎

(Birgit Vera Schmidt) □