49. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene (Tag 1)

31. Mai 2018

1. Es sei $\alpha \neq 0$ eine reelle Zahl.

   Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit

   $$f(f(x)+y) = \alpha x + \frac{1}{f\left(\frac{1}{y}\right)}$$

   für alle x, $y \in \mathbb{R}_{>0}$.

   (Walther Janous)

2. Es seien A, B, C und D vier verschiedene Punkte auf einem Kreis in dieser Reihenfolge. Im Sehnenviereck $ABCD$ sei AB die (einzige) längste Seite.

   Man beweise, dass die Ungleichung

   $$AB + BD > AC + CD$$

   gilt.

   (Karl Czakler)

3. In einem Raum sind n Kinder, von denen jedes mindestens ein Zuckerl hat. In Runde 1, Runde 2, usw., werden nun weitere Zuckerln an diese Kinder nach folgender Regel verteilt:

   In Runde k bekommt jedes Kind, dessen Zuckerlanzahl teilerfremd zu k ist, ein Zuckerl dazu.

   Man zeige, dass nach einigen Runden die Kinder im Raum höchstens zwei verschiedene Anzahlen von Zuckerln haben.

   (Theresia Eisenkölbl)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

49. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene (Tag 2)

1. Juni 2018

4. Es seien ABC ein Dreieck und P ein Punkt im Inneren des Dreiecks, für den die Mittelpunkte M_B und M_A der Umkreise k_B bzw. k_A von ACP bzw. BCP außerhalb des Dreiecks ABC liegen. Weiters seien die drei Punkte A, P und M_A kollinear und ebenso die drei Punkte B, P und M_B. Die durch P verlaufende Parallele zur Seite AB schneide die Kreise k_A und k_B in den Punkten D bzw. E mit D, $E \neq P$.

   Man zeige, dass dann $DE = AC + BC$ gilt.

   (Walther Janous)

5. Auf einer Kreislinie liegen 2018 Punkte. Jeder dieser Punkte wird mit einer ganzen Zahl beschriftet. Dabei sei jede Zahl größer als die Summe der zwei Zahlen, die im Uhrzeigersinn unmittelbar davor stehen.

   Man bestimme die größtmögliche Anzahl von positiven Zahlen, die sich unter den 2018 Zahlen befinden können.

   (Walther Janous)

6. Man bestimme alle Ziffern z, sodass für jede ganze Zahl $k \geq 1$ eine ganze Zahl $n \geq 1$ mit der Eigenschaft existiert, dass die Dezimaldarstellung von n^9 mit mindestens k Ziffern z endet.

   (Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Lösungen: `http://www.math.aau.at/OeMO/loesungen/BWF/2018`