5. Pauli-Wettbewerb 2012

Lösungsskizzen

1. (4 Punkte) Seien $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ mit $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Man zeige:

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n) \geq 2^n$$

Lösung 1. Auf Grund der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung gilt $\frac{1+x}{2} \geq \sqrt{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$, also $(1+x) \geq 2\sqrt{x}$.

Folglich gilt:

$$\begin{aligned}(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n) &\geq 2\sqrt{a_1}\cdot 2\sqrt{a_2}\cdot 2\sqrt{a_3}\cdots 2\sqrt{a_n}\\ &= 2^n \cdot \sqrt{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}\\ &= 2^n \cdot \sqrt{1} = 2^n\end{aligned}$$

□

Lösung 2. Wir multiplizieren die linke Seite aus und erhalten folgende Ungleichung:

$$1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \cdots + a_1a_2\cdots a_n \geq 2^n$$

Auf der linken Seite haben wir also 2^n Terme, wobei jede mögliche Teilmenge von $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ genau ein Mal vorkommt. (Etwas mathematisch korrekter: Wobei für jede mögliche Teilmenge von $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ genau ein Summand vorkommt, der aus dem Produkt der Elemente dieser Teilmenge besteht.)

Wir können diese 2^n Summanden daher zu 2^{n-1} Paaren zusammenfassen, indem wir jeweils Summanden einander zuordnen, die zu komplementären Teilmengen gehören:

$$(1 + a_1a_2\cdots a_n) + (a_1 + a_2a_3\cdots a_n) + \cdots + (a_n + a_1a_2\cdots a_{n-1}) + (a_1a_2 + a_3a_4\cdots a_n) + \cdots \geq 2^n$$

Alle Paare haben also die Form $(a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_l} + a_{k_{l+1}}\cdots a_{k_n})$, wobei $k_1, k_2, \dots, k_n$ eine Permutation von $1, 2, \dots, n$ ist. Nun gilt aber $a_{k_{l+1}}\cdots a_{k_n} = \frac{a_1a_2\dots a_n}{a_{k_{l+1}}\cdots a_{k_n}} = \frac{1}{a_{k_{l+1}}\cdots a_{k_n}}$, da $a_{k_{l+1}}\cdots a_{k_n}$ ja genau das Komplement zu $a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_l}$ ist.

Da für jedes x gilt, dass $x + \frac{1}{x} \geq 2$, gilt dies somit auch für jedes dieser Paare der Form $(a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_l} + \frac{1}{a_{k_{l+1}}\cdots a_{k_n}})$. Somit beträgt die Summe der 2^{n-1} Paare mindestens $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. □

Lösung 3. Wir multiplizieren wieder die linke Seite aus und erhalten folgende Ungleichung:

$$1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_1a_2 + \cdots + a_1a_2\cdots a_n \geq 2^n$$

Auf der linken Seite haben wir also 2^n Terme, wobei jede mögliche Teilmenge von $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ genau ein Mal vorkommt. Folglich kommt a_1 genau gleich oft vor wie $a_2, a_3, \dots, a_n$, nämlich jeweils 2^{n-1} Mal.

Wir dividieren beide Seiten durch 2^n und wenden dann die arithmetisch-geometrische Mittelungleichung an:

$$\begin{aligned}\frac{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_1a_2 + \cdots + a_1a_2\cdots a_n}{2^n} &\overset{!}{\geq} 1\\ \frac{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_1a_2 + \cdots + a_1a_2\cdots a_n}{2^n} &\geq \sqrt[2^n]{1\cdot a_1\cdot a_2\cdots a_n\cdot a_1a_2\cdots a_1a_2\cdots a_n}\\ &= \sqrt[2^n]{a_1^{2^{n-1}}a_2^{2^{n-1}}\cdots a_n^{2^{n-1}}}\\ &= \sqrt[2^n]{(a_1a_2\cdots a_n)^{2^{n-1}}}\\ &= \sqrt[2^n]{1^{2^{n-1}}}\\ &= 1\end{aligned}$$

□

Lösung 4. Wir definieren die Funktion

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = (1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n)$$

und suchen deren Minimum, i.e., wir suchen Werte für $a_1, a_2, \dots, a_n$, sodass $a_1a_2a_3\cdots a_n = 1$ erfüllt ist, und $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ möglichst klein wird.

Behauptung: Existieren unter den Variablen $a_1, a_2, \dots, a_n$ zwei, die verschiedene Werte haben, so ist $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nicht minimal.

Beweis der Behauptung: Nehmen wir an, es existieren zwei Werte a_i und a_j mit $a_i \neq a_j$. Wir definieren neue Werte wie folgt:

$$\tilde{a}_k = \begin{cases} a_k & k \neq i \text{ und } k \neq j \\ \sqrt{a_ia_j} & k = i \text{ oder } k = j \end{cases}$$

Nun gilt $f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) < f(a_1, a_2, \dots, a_n)$, wie man folgendermaßen zeigen kann:

$$\begin{aligned}
f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) &< f(a_1, a_2, \dots, a_n) &\iff \\
(1+\tilde{a}_1)(1+\tilde{a}_2)\cdots(1+\tilde{a}_i)\cdots(1+\tilde{a}_j)\cdots(1+\tilde{a}_n) &< (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_i)\cdots(1+a_j)\cdots(1+a_n) &\iff \\
(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+\sqrt{a_ia_j})\cdots(1+\sqrt{a_ia_j})\cdots(1+a_n) &< (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_i)\cdots(1+a_j)\cdots(1+a_n) &\iff \\
(1+\sqrt{a_ia_j})(1+\sqrt{a_ia_j}) &< (1+a_i)(1+a_j) &\iff \\
1 + 2\sqrt{a_ia_j} + a_ia_j &< 1 + a_i + a_j + a_ia_j &\iff \\
2\sqrt{a_ia_j} &< a_i + a_j &\iff \\
\sqrt{a_ia_j} &< \frac{a_i + a_j}{2}
\end{aligned}$$

Dies entspricht der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung, und ist wegen $a_i \neq a_j$ nicht mit Gleichheit erfüllt, folglich also echt kleiner.

Weiters sehen wir sofort, dass $\tilde{a}_1\tilde{a}_2\cdots\tilde{a}_n = 1$ gilt.

Das Minimum der Funktion $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ kann also nur dann angenommen werden, wenn $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ gilt. Wegen $a_1a_2\cdots a_n = 1$ erhalten wir somit $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$, und somit ein Minimum von $f(1, 1, \dots, 1) = (1 + 1)(1 + 1)\cdots(1 + 1) = 2^n$.

□

2. (8 Punkte) Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ mit $xyz = 1$. Man zeige:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

Lösung 1. Zunächst eine Vorüberlegung **(VÜ)**, die wir in fast allen der folgenden Lösungen benötigen werden:

$$x + y + z = 3 \cdot \frac{x+y+z}{3} \overset{\text{AM-GM}}{\geq} 3\sqrt[3]{xyz} = 3\sqrt[3]{1} = 3$$

Sei $f(x) = \frac{1}{x}$. Diese Funktion ist im Intervall $(0, \infty)$ konvex. Somit gilt laut Jensen (mit nicht normierten Gewichten, siehe unten):

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} &= x \cdot \frac{x}{y+z} + y \cdot \frac{y}{z+x} + z \cdot \frac{z}{x+y} \\
&= xf\left(\frac{y+z}{y}\right) + yf\left(\frac{z+x}{y}\right) + zf\left(\frac{x+y}{z}\right) \\
&\geq (x+y+z) \cdot f\left(\frac{(y+z) + (z+x) + (x+y)}{x+y+z}\right) \\
&= (x+y+z) \cdot f(2) \\
&= \frac{x+y+z}{2} \\
&\overset{\text{VÜ}}{\geq} \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Jensen wurde in einer leicht modifizierten Schreibweise verwendet. Seien $w_1, w_2, \dots, w_n$ Gewichte, die nicht notwendigerweise $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$ erfüllen. Wir erhalten normierte Gewichte t_i, indem wir $w := w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ setzen, und $t_i := \frac{w_i}{w}$ für alle i. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n) &\geq f\left(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n\right) &\iff \\
\frac{w_1}{w} f(x_1) + \frac{w_2}{w} f(x_2) + \cdots + \frac{w_n}{w} f(x_n) &\geq f\left(\frac{w_1}{w} x_1 + \frac{w_2}{w} x_2 + \cdots + \frac{w_n}{w} x_n\right) &\iff \\
\frac{w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \cdots + w_n f(x_n)}{w} &\geq f\left(\frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n}{w}\right) &\iff \\
w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \cdots + w_n f(x_n) &\geq w \cdot f\left(\frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n}{w}\right)
\end{aligned}$$

Diese Form von Jensen gilt also für beliebige Gewichte w_i. Im diesem Fall wurde $w_1 = x$, $w_2 = y$ und $w_3 = z$ verwendet. □

Lösung 2. Sei $f(x) = x^2$. Diese Funktion ist überall konvex. Somit gilt laut Jensen (wiederum mit nicht normierten Gewichten):

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} &= (y+z) \cdot \frac{x^2}{(y+z)^2} + (z+x) \cdot \frac{y^2}{(z+x)^2} + (x+y)\frac{z^2}{(x+y)^2} \\
&= (y+z) f\left(\frac{x}{y+z}\right) + (z+x) f\left(\frac{y}{z+x}\right) + (x+y) f\left(\frac{z}{x+y}\right) \\
&\geq (y+z+z+x+x+y) \cdot f\left(\frac{(y+z) \cdot \frac{x}{y+z} + (z+x) \cdot \frac{y}{z+x} + (x+y)\frac{z}{x+y}}{(y+z+z+x+x+y)}\right) \\
&= 2(x+y+z) \cdot f\left(\frac{x+y+z}{2(x+y+z)}\right) \\
&= 2(x+y+z) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 2(x+y+z) \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{x+y+z}{2} \\
&\overset{\text{VÜ}}{\geq} \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

□

Lösung 3. Wir erweitern mit $(x + y + z)$:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} &= \frac{x+y+z}{x+y+z} \cdot \left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right) \\
&= \frac{1}{x+y+z} \cdot (x+y+z) \left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right) \\
&= \frac{1}{x+y+z} \cdot \frac{1}{2}((y+z) + (z+x) + (x+y)) \left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right) \\
\text{(Cauchy-Schwarz)} \quad &\geq \frac{1}{x+y+z} \cdot \frac{1}{2}(x+y+z)^2 \\
&= \frac{1}{2}(x+y+z) \\
&\overset{\text{VÜ}}{\geq} \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

□

Lösung 4. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x \geq y \geq z$. Folglich gilt auch $\frac{x}{y+z} \geq \frac{y}{x+z} \geq \frac{z}{x+y}$. Mittels Tschebyscheff folgt daher:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} &= x\cdot\left(\frac{x}{y+z}\right)+y\cdot\left(\frac{y}{z+x}\right)+z\cdot\left(\frac{z}{x+y}\right)\\ &\geq \frac{1}{3}\cdot(x+y+z)\cdot\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}\frac{z}{x+y}\right)\\ &\geq \frac{1}{3}\cdot 3\cdot\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}\frac{z}{x+y}\right)\end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}\,.$$

Dies ist Nesbitts Ungleichung und somit bekannt. Nesbitts Ungleichung könnte beispielsweise folgendermaßen bewiesen werden:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \overset{!}{\geq} \frac{3}{2}\\ \iff\quad & \frac{x}{y+z}+1+\frac{y}{z+x}+1+\frac{z}{x+y}+1-3 \overset{!}{\geq} \frac{3}{2}\\ \iff\quad & \frac{x+y+z}{y+z}+\frac{y+z+x}{z+x}+\frac{z+x+y}{x+y}-3 \overset{!}{\geq} \frac{3}{2}\\ \iff\quad & (x+y+z)\cdot\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}-3 \overset{!}{\geq} \frac{3}{2} \qquad \Big|+3 \qquad \Big|\cdot 2\\ \iff\quad & ((y+z)+(z+y)+(x+y))\cdot\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y} \overset{!}{\geq} 9\end{aligned}$$

Dies folgt aus der arithmetisch-harmonischen Mittelungleichung. □

Lösung 5. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x \geq y \geq z$. Folglich gilt auch $x^2 \geq y^2 \geq z^2$ sowie $\frac{1}{y+z} \geq \frac{1}{x+z} \geq \frac{1}{x+y}$. Mittels Ordnungsungleichung folgt somit:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} &= \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)+\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)\right)\\ &\geq \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}+\frac{x^2}{x+y}\right)+\left(\frac{z^2}{y+z}+\frac{x^2}{z+x}+\frac{y^2}{x+y}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}+\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)\end{aligned}$$

Laut QM-AM gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} = \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2\cdot\frac{2}{a+b} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{2}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{2(a+b)} = \frac{a+b}{2}$$

Folglich können wir weiter umformen und abschätzen:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} &\geq \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}+\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)\\ &\geq \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2}+\frac{x+y}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot(x+y+z)\\ &\overset{\text{VÜ}}{\geq} \frac{3}{2}\end{aligned}$$

□

Lösung 6. Wir multiplizieren beide Seiten mit $2(x+y)(y+z)(z+x)$ und erhalten folgende äquivalente Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} &\overset{!}{\geq} \frac{3}{2} \quad\Longleftrightarrow\\
2\sum_{cyc} x^2(x+y)(x+z) &\overset{!}{\geq} 3\prod_{cyc}(x+y) \quad\Longleftrightarrow\\
2\left(\sum_{cyc} x^4+\sum_{cyc} x^3y+\sum_{cyc} x^3z+\sum_{cyc} x^2yz\right) &\overset{!}{\geq}\\
&3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y+2xyz) \quad\Longleftrightarrow\\
2\left(\sum_{cyc} x^4+\sum_{cyc} x^3y+\sum_{cyc} x^3z+\sum_{cyc} x\right) &\overset{!}{\geq}\\
&3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y+2) \quad\Longleftrightarrow\\
2\left(x^4+y^4+z^4+x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+z^3x+zx^3+x+y+z\right) &\overset{!}{\geq}\\
&3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y+2) \quad\Longleftrightarrow
\end{aligned}$$

Nun gilt für die linke Seite:

$$\begin{aligned}
LS &= 2\left(x^4+y^4+z^4+x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+z^3x+zx^3+x+y+z\right)\\
&= (x^4+xy^3+x)+(x^4+xz^3+x)+(y^4+yx^3+y)+(y^4+yz^3+y)+\\
&\quad (z^4+zx^3+z)+(z^4+zy^3+z)+(x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+z^3x+zx^3)\\
&\geq 3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z+3z^2x+3z^2y+6
\end{aligned}$$

Für die ersten 6 Klammerausdrücke wurde hierbei jeweils verwendet, dass

$$a^4+ab^3+a = 3\cdot\frac{a^4+ab^3+a}{3} \overset{\text{AM-GM}}{\geq} 3\sqrt[3]{a^4ab^3a} = 3\sqrt[3]{a^6b^3} = 3a^2b$$

für beliebige positive reelle a und b gilt. Der 7. Klammerausdruck wurde abgeschätzt mittels

$$x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+z^3x+zx^3 \overset{\text{AM-GM}}{\geq} 6\sqrt[6]{x^8y^8z^8} = 6\sqrt[6]{1} = 6\ .$$

$\square$