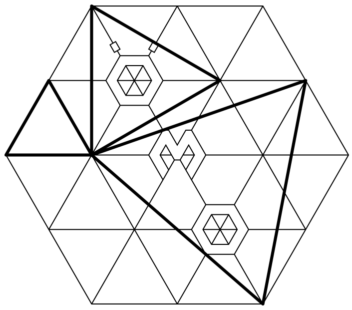

ÖMO

Österreichische MathematikOlympiade

Grundlagen der Geometrie – Beispiele

Anfängerkurs TU Graz 2010
Birgit Vera Schmidt

1. Man zeige: Die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem Inkreisradius mal dem halben Umfang.
2. Sei ABCD ein Quadrat der Seitenlänge 6cm und E der Mittelpunkt der Seite AD. Auf CE sei ein Punkt F so gelegen, dass die Flächen der Dreiecke AFE und BCF inhaltsgleich sind. Man ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks ABF.
3. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $\sphericalangle BAC = 45°$ und $\sphericalangle CBA = 30°$. D liegt auf AB so, dass $\overline{AD} = \overline{AC}$, und E liegt auf BC so, dass $\overline{BE} = \overline{BD}$ ist. Zeige, dass das Dreieck DEC gleichschenklig ist.
4. Man zeige: Die drei Winkelsymmetralen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
5. Man zeige: Wenn in einem Dreieck Umkreis- und Inkreismittelpunkt in einem Punkt zusammenfallen, so ist das Dreieck gleichseitig.
6. Man zeige: Sind in einem Dreieck zwei Höhen gleich lang, so ist das Dreieck gleichschenkelig.
7. Man zeige: Sind in einem Viereck gegenüberliegende Seiten zueinander parallel, so sind auch die einander gegenüberliegenden Seiten jeweils gleich lang. Man zeige, dass auch die Umkehrung gilt.
8. Man zeige: Wenn man die Seitenmittelpunkte eines konvexen Vierecks verbindet, entsteht ein Parallelogramm. (Dieses wird auch Varignon-Parallelogramm genannt.) Man zeige weiters, dass dieses Parallelogramm genau die Hälfte der Fläche des Vierecks bedeckt.
9. In einer Ebene liege das Parallelogramm ABCD und die völlig außerhalb verlaufende Gerade g. Seien A', B', C' und D' die Fußpunkte der Höhen von A, B, C und D auf g. Man zeige: $\overline{AA'} + \overline{CC'} = \overline{BB'} + \overline{DD'}$.
10. Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Man konstruiere über der Seite BC ein gleichseitiges, nach innen gerichtetes Dreieck mit A' als drittem Eckpunkt. Analog erhalte man B' und C' als Eckpunkte der gleichseitigen Dreiecke über AC und AB. Man zeige, dass $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$.
11. Sei ABCD ein Quadrat. Man schreibe dem Quadrat einen Viertelkreis ein mit Mittelpunkt B und Radius $\overline{AB}$. Sei P ein Punkt auf diesem Viertelkreis, der weder mit A noch mit C zusammenfällt. Man lege die Tangente an den Viertelkreis durch P. Diese schneide die Seiten AD und DC in Q und R. Man zeige: Der Umfang des Dreiecks DQR beträgt genau die Hälfte des Umfanges des Quadrates ABCD.
12. Sei ABC ein Dreieck und seien X, Y und Z beliebige Punkte auf AB, BC und CA. Man konstruiere einen Kreis durch A, X und Z, einen Kreis durch B, X und Y und jenen Kreis durch C, Y und Z, und zeige, dass diese sich in einem Punkt schneiden.
13. Sei ABCD ein Tangentenviereck. Man zeige: AB + CD = BC + DA.
14. Sei ABCD ein Sehnenviereck und S der Schnittpunkt der Diagonalen. Man zeige, dass die Dreiecke ABS und CDS ähnlich sind.

ÖMO

Österreichische MathematikOlympiade

Grundlagen der Geometrie – Beispiele

Anfängerkurs TU Graz 2010
Birgit Vera Schmidt

15. Gegeben sei ein Trapez ABCD, wobei die Seiten AB und CD parallel sind. Auf der Seite AD liegt der Punkt E, und es gilt $\sphericalangle ABE=18°$, $\sphericalangle BEC=30°$. Man bestimme $\sphericalangle ECD$.
16. In einem Rechteck $ABCD$ ist M der Mittelpunkt der Seite AB und $AB:AD=2:1$. Über der Strecke MD zeichne man ein gleichseitiges Dreieck MDX derart, dass die Punkte X und A auf verschiedenen Seiten der Geraden durch MD liegen. Man bestimme $\sphericalangle XCD$.
17. Gegeben sei ein regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$. Die Seiten AB, CD seien Tangenten an einen Kreis k mit Berührungspunkten A und D. Die Verlängerung der Seite AE schneide k in F. Man zeige, dass DEF ein gleichschenkeliges Dreieck ist.
18. Im Dreieck ABC sei $\sphericalangle CAB=60°$, $\sphericalangle CBA=50°$. Die Streckensymmetrale s von BC schneide die Seite AB im Punkt D. Die Streckensymmetralen von AD, CD schneiden s in den Punkten M, N und einander im Punkt O. Man bestimme die Art des Dreiecks MNO.
19. Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb dieses Kreises. Von P gehen zwei Strahlen aus, von denen einer k in A und B schneidet, der andere in C und D. Man zeige: $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$.
20. Seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die sich nicht berühren, und seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte dieser Kreise. Man lege von M_1 die Tangenten an k_2. Diese schneiden k_1 den Punkten A und A'. Analog lege man von M_2 die Tangenten an k_1 und erhalte die Punkte B und B'. Man zeige: $\overline{AA'}=\overline{BB'}$.
21. Gegeben seien ein Punkt P und zwei parallele Geraden, die beide auf derselben Seite von P liegen. Von P gehen drei Strahlen aus. Der erste schneide die parallelen Geraden in A und A', der zweite in B und B', der dritte in C und C'. Sei X der Schnittpunkt von AB' und A'B, Y der von BC' und B'C und Z der Schnittpunkt von AC' und A'C. Man zeige: X, Y und Z liegen auf einer Geraden. Man zeige außerdem, dass diese Gerade parallel zu den bereits gegebenen parallelen Geraden ist. (GWF 2003)
22. Man zeige: Spiegelt man den Umkreismittelpunkt eines Dreiecks an seinen Seiten, so erhält man ein zu dem ursprünglichen Dreieck kongruentes Dreieck.
23. Es sei I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Er wird an den Dreiecksseiten gespiegelt. Dabei entsteht ein Dreieck PQR. Man zeige: Das Dreieck PQR ist spitzwinkelig. Welcher besondere Punkt des Dreiecks PQR ist der Punkt I? (LWA 1993)
24. Zwei gleich große Kreise k_1 und k_2 schneiden einander in den Punkten P und Q. Für eine (beliebige) Gerade g durch P sei P_1 der zweite Schnittpunkt mit k_1 und P_2 der zweite Schnittpunkt mit k_2. Man zeige, dass unabhängig von der Wahl von g, das Dreieck P_1QP_2 ein gleichschenkeliges Dreieck ist. (LWA 1994)
25. Von einem rechtwinkeligen Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C sind die Eckpunkte A und B sowie der Punkt P auf der Strecke AB, der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite AB, gegeben. Man konstruiere den Eckpunkt C und damit das Dreieck. (LWA 1996)
26. Über dem Durchmesser AB wird der Halbkreis h mit dem Mittelpunkt M errichtet. Über MB wird auf der selben Seite der Geraden AB der Halbkreis k errichtet. Seien X und Y Punkte auf k, sodaß der Bogen BX eineinhalb mal so groß wie der Bogen BY ist. Die Gerade MY schneidet die Gerade BX in D und den großen Halbkreis h in C. Man zeige, daß Y die Mittelpunkt der Strecke CD ist. (GWF 2005)
27. Sei ABCDEFG die Hälfte eines regelmäßigen Zwölfecks. Sei P der Schnittpunkt der Geraden AB und GF und Q der Schnittpunkt der Geraden AC und GE. Man zeige: Q ist Umkreismittelpunkt des Dreiecks AGP. (LWA 2000)
28. Gegeben sei ein konvexes Viereck ABCD mit $\sphericalangle ADC=\sphericalangle BCD>90°$. E sei der Schnittpunkt der Geraden AC mit der Parallelen zu AD durch B und F sei der Schnittpunkt der Geraden BD mit der Parallelen zu BC durch A. Man zeige: EF ist parallel zu CD. (GWF 2004)
29. Sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck, in dem sich die Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle BAC$, die Höhe durch B und die Symmetrale der Seite AB in einem Punkt schneiden. Man bestimme die Größe des Winkels $\alpha=\sphericalangle BAC$.