Pauli-Wettbewerb 2011

Lösungsskizzen

1. (4 Punkte) Man bestimme die größte reelle Konstante C, sodass für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\left(11a^3 + 5b^3 + 2011c^3\right)^2 \geq C \cdot \left(11a^2 + 5b^2 + 2011c^2\right)^3$$

Zunächst stellen wir fest, dass $C = 0$ eine mögliche Lösung ist (wenn auch möglicherweise nicht die größte Lösung). Wir können daher $C \geq 0$ annehmen. Somit sind rechte und linke Seite beide nicht-negativ, und das Ziehen der sechsten Wurzel ist eine Äquivalenzumformung. Die Ungleichung ist daher äquivalent zu:

$$\begin{aligned}
& \sqrt[3]{11a^3 + 5b^3 + 2011c^3} \geq \sqrt[6]{C} \cdot \sqrt[2]{11a^2 + 5b^2 + 2011c^2} && \Big| : \sqrt[3]{11+5+2011} = \sqrt[3]{2027} \\
\iff & \sqrt[3]{\frac{11a^3 + 5b^3 + 2011c^3}{2027}} \geq \frac{\sqrt[6]{C} \cdot \sqrt[2]{11a^2 + 5b^2 + 2011c^2}}{\sqrt[3]{2027}} \\
\iff & \sqrt[3]{\frac{11a^3 + 5b^3 + 2011c^3}{2027}} \geq \sqrt[6]{C} \cdot \sqrt[6]{2027} \cdot \frac{\sqrt[2]{11a^2 + 5b^2 + 2011c^2}}{\sqrt[2]{2027}} \\
\iff & \sqrt[3]{\frac{11a^3 + 5b^3 + 2011c^3}{2027}} \geq \sqrt[6]{C} \cdot \sqrt[6]{2027} \cdot \sqrt[2]{\frac{11a^2 + 5b^2 + 2011c^2}{2027}}
\end{aligned}$$

Wir haben nun auf der linken Seite das gewichtete kubische Mittel von a, b und c mit Gewichten 11, 5 und 2011, und auf der rechten Seite $\sqrt[6]{C \cdot 2027}$ Mal dem gewichteten quadratischen Mittel derselben Werte und Gewichte. Wir vermuten daher $C = \frac{1}{2027}$. Für dieses C erhalten wir die Ungleichung

$$\sqrt[3]{\frac{11a^3 + 5b^3 + 2011c^3}{2027}} \geq \sqrt[2]{\frac{11a^2 + 5b^2 + 2011c^2}{2027}} ,$$

die äquivalent zur geforderten Ungleichung und auf Grund der gewichteten kubisch-quadratischen Mittelungleichung immer erfüllt ist. Somit ist $C = \frac{1}{2027}$ eine mögliche Konstante, die die geforderte Bedingung erfüllt. Es bleibt zu zeigen, dass $\frac{1}{2027}$ auch die größte solche Konstante ist.

Da die Ungleichung für alle Werte erfüllt sein muss, muss sie insbesondere auch erfüllt sein für $a = b = c \neq 0$. Dann folgt aus der ursprünglichen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
& \left(2027a^3\right)^2 \geq C \cdot \left(2027a^2\right)^3 \\
\iff & (2027)^2 a^6 \geq C \cdot (2027)^3 a^6 && \Big| : (2027)^3 a^6 \neq 0 \\
\iff & \frac{1}{2027} \geq C
\end{aligned}$$

Folglich kann C nicht größer als $\frac{1}{2027}$ gewählt werden, und $C = \frac{1}{2027}$ ist die gesuchte Konstante.

Alternative Herangehensweise:

Alternativ können wir auch zuerst wie oben zeigen, dass $C \leq \frac{1}{2027}$ gelten muss. Wir nehmen dann an, $C = \frac{1}{2027}$ auch tatsächlich möglich ist und müssen nun zeigen, dass die geforderte Ungleichung mit diesem C für alle positiven reellen Zahlen a, b, c gilt, wofür wir wieder wie oben auf eine gewichtete kubisch-quadratische Mittelungleichung umformen.

2. (8 Punkte) Man zeige für $a, b, x, y, z \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} \geq \frac{3}{a+b}$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit $(a+b)(xy+yz+zx) = x(ay+bz) + y(az+bx) + z(ax+by) \neq 0$ und erhalten die äquivalente Ungleichung

$$(x(ay+bz) + y(az+bx) + z(ax+by)) \left(\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} \right) \geq 3(xy+yz+zx) \ .$$

Wir verschärfen die linke Seite mit Cauchy-Schwarz:

$$(x(ay+bz) + y(az+bx) + z(ax+by)) \left(\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} \right) \geq (x+y+z)^2 \overset{!}{\geq} 3(xy+yz+zx)$$

Diese noch zu beweisende Ungleichung zeigen wir durch Äquivalenzumformungen, die auf eine Summe von Quadraten reeller Zahlen führen:

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^2 &\overset{!}{\geq} 3(xy+yz+zx) \quad \Longleftrightarrow \\
x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx &\overset{!}{\geq} 3xy+3yz+3zx \quad \Longleftrightarrow \\
x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx &\overset{!}{\geq} 0 \quad \Longleftrightarrow \\
x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2 &\overset{!}{\geq} 0 \quad \Longleftrightarrow \\
(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 &\overset{!}{\geq} 0
\end{aligned}$$