1. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$$

2. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}, n > 1$:
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

3. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}, n > 1$:
$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

4. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$:
$$n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

5. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:
$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) \geq \frac{8}{abc}$$

6. Man zeige für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$:
$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

7. Man zeige für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

8. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^3}{3} + \frac{c^6}{6} \geq abc$$

9. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{a+b+c}{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}} \leq \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$$

10. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:
$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}$$

11. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$:
$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$$

12. Man zeige für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} \geq 4$$

13. Seien $a, b, c \in (0, 1)$. Man zeige, dass nicht jede der Zahlen $a(1-b)$, $b(1-c)$ und $c(1-a)$ größer als $\frac{1}{4}$ ist.

14. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{3}{a+b+c}$$

15. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

16. Man zeige für alle $a, b \in \mathbb{Z}^+$:
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[a+b]{a^b b^a}$$

17. Man zeige für alle $x, y \in \mathbb{R}$:
$$x + y \leq \sqrt{2x^2 + 2y^2}$$

18. Man bestimme alle Paare ganzer Zahlen (x, y), für die
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2}$$
gilt.

19. Man zeige für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{(a+b)^3}{a^2 b} \geq \frac{27}{4}$$
Wann gilt Gleichheit?

20. Man bestimme alle reellen Zahlen x, für die die Ungleichung
$$(x-1)^2(x-4)^2 < (x-2)^2$$
gilt.

21. Man zeige für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{a+b+c+d}{abcd} \leq \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}$$

22. Man zeige für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ mit $0 < a \leq b \leq c \leq d$:
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}$$

23. Man zeige für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$:
$$x^4(1+y^4) + y^4(1+z^4) + z^4(1+x^4) \geq 6x^2y^2z^2$$

24. Es sei $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ mit $x_i > 0$ für alle i. Man zeige
$$\frac{S}{S-x_1} + \frac{S}{S-x_2} + \cdots + \frac{S}{S-x_n} \geq \frac{n^2}{n-1}$$
und bestimme, wann Gleichheit gilt.

25. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{a\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}{b^2+c^2}+\frac{b\left(b^2+c^2\right)\left(b^2+a^2\right)}{c^2+a^2}+\frac{c\left(c^2+a^2\right)\left(c^2+b^2\right)}{a^2+b^2} \geq a^3+b^3+c^3+3abc$$

26. Man zeige für alle $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+, n, k \in \mathbb{N}$ mit $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$:
$$\frac{1}{a_1^k}+\frac{1}{a_2^k}+\cdots+\frac{1}{a_n^k} \geq n^{k+1}$$

27. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot (3n+2)}>\frac{1}{\sqrt{2n+4}}$$

28. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c} \geq 3\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}+\frac{1}{b+2a}+\frac{1}{c+2b}+\frac{1}{a+2c}\right)$$

29. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$:
$$3 \cdot(1! \cdot 2! \cdot \cdots \cdot n!) \geq (n!)^2$$

30. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}, c \geq 1$ mit $a+b+c=0$:
$$a^4+b^4+c^4>3abc$$

31. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:
$$\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)^2 \leq \frac{3}{2} \sqrt{4(4(a-b)^4(b-c)^4+(b-c)^4(c-a)^4+(c-a)^4(a-b)^4}$$

32. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}, 0<a, b, c<1$ mit $a+b+c=2$:
$$\frac{a}{1-a} \cdot \frac{b}{1-b} \cdot \frac{c}{1-c} \geq 8$$

33. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ mit $a+b+c=1$:
$$\sqrt{12abc}+a^2+b^2+c^2 \leq 1$$

34. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:
$$a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2 \geq \frac{1}{2}(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$
Wann gilt Gleichheit?

35. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reelle Zahlen aus dem Intervall $[a, b]$ und sei $a+b>0$. Man zeige:
$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \frac{ab}{a+b}+\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n(a+b)}$$

36. Die reellen Zahlen a, b, c, d, e sollen die Gleichung $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=1$ erfüllen. Man zeige, dass $min\left(a_i-a_j\right)^2 \leq \frac{1}{10}$ gilt.

37. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:
$$\sum_{cyc} bc(a^2 - bc)^2(a - b)(a - c) \geq 0$$

38. Man zeige für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^+, x, y, z > 1$ mit $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$:
$$\sqrt{x + y + z} \geq \sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{z - 1}$$

39. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 4, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ mit $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$:
$$x_1 x_2 \cdots x_n \cdot \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \right) \leq n$$

40. Man zeige für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^+$:
$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} + z^2 + \frac{1}{z^2} + 6} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}$$

41. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{a + b + c} \geq 3 \cdot \sum_{sym} \frac{1}{2a + b}$$

42. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:
$$a^3 + b^3 + c^3 + ab + bc + ca + 1 \geq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$$
Wann gilt Gleichheit?

43. Man zeige für alle $0 < x, y, z < 1$:
$$(1 - z(1 - y) - x(1 - z) - y(1 - x)) \cdot \left(\frac{1}{z(1 - y)} + \frac{1}{x(1 - z)} + \frac{1}{y(1 - x)} \right) \geq 3$$
Wann gilt Gleichheit?

44. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ mit $abc \leq 1$:
$$\sum_{cyc} \frac{1 + ab}{2a + ab} \geq \frac{6(abc + 2)}{4abc + 5}$$

45. Man zeige für alle $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a + b + c)^3}{3(x + y + z)}$$

46. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ mit $x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz = 2xy + 2yz + 2zx$:
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 3$$

47. Man zeige für alle $a_1 \geq b_1 \geq a_2 \geq b_2 \geq a_3 \geq b_3 \geq a_4 \geq b4 \geq a_5 \geq b_5, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}$:
$$\left(\sum_{i=1}^{5} (a_i + b_i) \right)^2 \geq 5 \sum_{1 \leq i < j \leq 5} (a_i a_j + b_i b_j)$$

48. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$