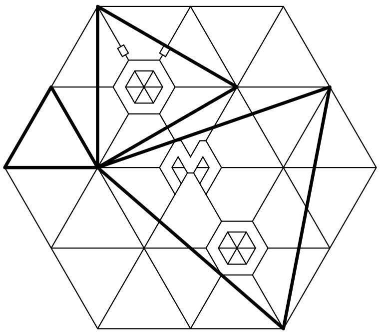


Folgen und Reihen

Vorbereitungskurs
Raach 2012

Birgit Vera Schmidt

16. Mai 2012

Kapitel 1

Folgen

1.1 Einleitung und Definition

Eine FOLGE ist eine Aneinanderreihung von endlich oder unendlich vielen Zahlen (oder generell Objekten), die zumeist gewissen Gesetzmäßigkeiten folgt. Dieselbe Zahl kann in einer Folge auch mehrfach auftreten. Wir werden uns im Weiteren vorwiegend mit unendlichen Folgen befassen.

Ein ganz einfaches Beispiel für eine Folge ist die Folge der Quadrate natürlicher Zahlen: $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots$.

Definition 1.1. *Üblich ist folgende Schreibweise:*
$\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ *oder* $\langle a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\rangle$ *bezeichnet die* FOLGE,
a_n *das* n*-te* ELEMENT *bzw.* GLIED *der Folge,*
und für jedes a_i *nennt man* i *den* INDEX.

Hinweis. Oft wird statt $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ einfach nur $\langle a_n \rangle$ geschrieben.

Hinweis. Ob man bei 0 oder 1 zu zählen beginnt, also das erste Folgenelement mit a_0 oder a_1 bezeichnet, ist reine Geschmackssache. Welche Schreibweise praktischer ist, hängt oft auch vom Problem ab.

Gelegentlich wird zusätzlich der Zahlenbereich angegeben, aus dem die Folgenelemente stammen. Eine „Folge natürlicher Zahlen" enthält beispielsweise nur natürliche Zahlen, eine „Folge reeller Zahlen" nur reelle Zahlen, und so weiter.

Die Gesetzmäßigkeiten, durch die die Folgenglieder definiert sind, können auf verschiedene Arten beschrieben werden:

- **Explizite Darstellung:** Jedes Folgenglied wird durch eine Formel direkt beschrieben. Die oben angeschiebene Folge der Quadrate natürlicher Zahlen könnte man also folgendermaßen beschreiben:

  Beispiel 1.2. Sei $\langle a_n \rangle$ die Folge mit $a_n = n^2$ (für alle n).

- **Beschreibende Darstellung:** Der Wert jedes Folgengliedes wird beschrieben, aber nicht notwendigerweise auf eine Art, die eine sofortige Berechnung zulässt. Als Beispiel:

  Beispiel 1.3. Sei $\langle p_n \rangle$ die Folge der Primzahlen, d.h. p_n ist die n-te Primzahl. (Also $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, et cetera.)

  Wie wir bereits wissen, ist das Berechnen der n-ten Primzahl nicht ganz einfach, und es gibt keine explizite Formel dafür.

Zwei weitere Beispiele:

Beispiel 1.4. Sei $\langle k_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$k_n = [\text{Anzahl Möglichkeiten, einen } (2 \times n)\text{-Streifen mit } (1 \times 2)\text{-Domino-Steinen zu überdecken}] \ .$$

Wir werden später versuchen, für diese Folge eine explizite Darstellung zu finden.

Beispiel 1.5. Sei $\langle q_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$q_n = [\text{Anzahl verschiedener magischer } (n \times n)\text{-Quadrate}] \ .$$

(Ein magisches Quadrat der Kantenlänge n ist eine quadratische Anordnung der Zahlen $1, 2, \dots, n^2$, sodass die Summe der Zahlen aller Zeilen, Spalten und der beiden Diagonalen gleich ist.)

Für diese Folge ist derzeit keine explizite Darstellung bekannt.

- **Rekursive Darstellung:** Jedes Folgenglied wird auf eine vorgegebene Weise aus den *vorherigen* Folgengliedern berechnet. Zusätzlich müssen hier die ersten Folgenelemente explizit angegeben werden. Die bereits betrachtete Folge der Quadrate natürlicher Zahlen könnte auf diese Art so beschrieben werden:

Beispiel 1.6. Sei $\langle a_n \rangle$ die Folge mit $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ für alle $n \geq 1$.

Weitere Beispiele für rekursive Darstellungen:

Beispiel 1.7. Sei $\langle F_n \rangle$ die Folge mit $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ und $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ für alle $n \geq 2$.

Rechnen wir hier die ersten Elemente aus, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
F_1 &= 1 \\
F_2 &= 1 \\
F_3 &= 2 \\
F_4 &= 3 \\
F_5 &= 5 \\
F_6 &= 8 \\
F_7 &= 13 \\
F_8 &= 21 \\
F_9 &= 34 \\
F_{10} &= 55 \\
F_{11} &= 89 \\
F_{12} &= 144 \\
F_{13} &= 233
\end{aligned}$$

Diese sehr bekannte Folge heißt „Fibonacci-Folge“.

Beispiel 1.8. Sei $\langle b_n \rangle$ die Folge mit $b_1 = 1$ und $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} b_n$ für alle $n \geq 1$.

Berechnen wir hier die ersten Glieder, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
b_1 &= 1 \\
b_2 &= 1 \\
b_3 &= 1 + 1 = 2 \\
b_4 &= 1 + 1 + 2 = 4 \\
b_5 &= 1 + 1 + 2 + 4 = 8 \\
b_6 &= 1 + 1 + 2 + 4 + 8 = 16 \\
b_7 &= 1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 32
\end{aligned}$$

Wir könnten hier vermuten, dass die explizite Darstellung $b_n = 2^{n-2}$ für $n \geq 2$ dieselbe Folge beschreibt, und müssten diese Vermutung nun noch beweisen (was wir in späteren Abschnitten auch tun werden).

- **Implizite Beschreibung durch gewisse Eigenschaften:** Es werden gewisse Eigenschaften angegeben, durch die die Folge zwar eindeutig beschrieben ist, die aber keinen sofort offensichtlichen Weg zur Berechnung einzelner Folgenelemente anbieten. Ein Beispiel:

Beispiel 1.9. Sei $\langle c_n \rangle$ jene Folge rationaler Zahlen, in der jedes Folgenelement das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarn ist, und für die weiters $c_7 = 13$ und $c_{37} = 53$ gilt.

Wie man relativ leicht überprüfen kann, gibt es nur eine Folge, die dies erfüllt.

Mitunter können die Eigenschaften auch so vage beschrieben sein, dass sie von vielen verschiedenen Folgen erfüllt werden.

Beispiel 1.10. Sei $\langle d_n \rangle$ eine Folge von Zahlen, für die gilt, dass $d_{n+1} > d_n$ sowie $d_n \mid d_{2n}$ (für alle n).

Diese Bedingung wird beispielsweise von der Folge $\hat{d}_n = n$ erfüllt, aber auch von der Folge $\tilde{d}_n = 17^n$ und vielen weiteren.

Noch eine mitunter nützliche Definition:

Definition 1.11. *Als* Teilfolge *einer Folge $\langle a_n \rangle$ bezeichnet man eine Folge $\langle b_n \rangle$, die entsteht, indem man aus $\langle a_n \rangle$ einige Elemente weglässt. Formal kann eine Teilfolge angeschrieben werden als $\langle a_{n_k} \rangle_{k \in \mathbb{N}}$, wobei $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ eine streng monoton wachsende unendliche Folge natürlicher Zahlen ist.*

Weiters gibt es für gewisse Eigenschaften spezielle Bezeichnungen:

Definition 1.12.

- *Eine Folge, deren Glieder alle übereinstimmen, wird* konstante Folge *genannt.*
- *Eine Folge, die gegen* 0 *konvergiert (also sich dem Wert* 0 *immer mehr annähert), heißt* Nullfolge.
- *Eine Folge, deren Werte abwechselnd positiv und negativ sind, heißt* alternierend.
- *Eine Folge, die aus Wiederholungen einer endlichen Teilfolge besteht, heißt* periodisch.

1.2 Wichtige Folgen

1.2.1 Arithmetische Folgen

Eine arithmetische Folge ist eine Folge, bei der der Abstand (Distanz) aufeinanderfolgender Folgenelemente konstant ist:

Definition 1.13. *Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge von Zahlen (die aus einer beliebigen Grundmenge stammen können, beispielsweise $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$). Diese nennt man eine* ARITHMETISCHE FOLGE *dann und nur dann, wenn für ein fixes d gilt:*

$$a_{n+1} = a_n + d \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Wir können leicht zeigen, dass diese rekursive Darstellung äquivalent zur folgenden expliziten Darstellung ist:

Satz 1.14. *Sei $\langle a_n \rangle$ eine arithmetische Folge mit $a_{n+1} = a_n + d$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$a_n = a_0 + n \cdot d \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis. Um dies zu beweisen, benutzen wir eine INDEXVERSCHIEBUNG: Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_{n+1} = a_n + d$, dann gilt natürlich auch $a_n = a_{n-1} + d$ (für alle $n \geq 1$), ebenso $a_{n-1} = a_{n-2} + d$ (für alle $n \geq 2$), $a_{n-2} = a_{n-3} + d$ (für alle $n \geq 3$), und so weiter.

Diese Gleichungen setzen wir nun der Reihe nach ein:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + d \\
&= a_{n-2} + 2 \cdot d \\
&= a_{n-3} + 3 \cdot d \\
&= a_{n-4} + 4 \cdot d \\
&\;\;\vdots \\
&= a_{n-k} + k \cdot d \\
&\;\;\vdots \\
&= a_{n-n} + n \cdot d \\
&= a_0 + n \cdot d
\end{aligned}$$

□

Noch eine kleine Beobachtung:

Lemma 1.15. *Sei $\langle a_n \rangle$ eine arithmetische Folge, in der aufeinanderfolgender Elemente den Abstand d haben. Seien weiters x und y zwei Zahlen, die in der Folge (in dieser Reihenfolge) enthalten sind. Dann ist $(y - x)$ ein Vielfaches von d, und für jedes $t \in \mathbb{N}$ ist auch $x + t \cdot (y - x)$ in der Folge enthalten.*

Beweis. Seien X und Y die Indizes, an denen x und y auftreten, d.h. $a_X = x$ und $a_Y = y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
y - x &= a_Y - a_X \\
&= a_0 + Yd - a_0 - Xd \\
&= (Y - X)d
\end{aligned}$$

Für jedes $t \in \mathbb{N}$ gilt folglich:

$$\begin{aligned}
x + t \cdot (y - x) &= a_X + t \cdot (Y - X)d \\
&= a_0 + Xd + t(Y - X)d \\
&= a_0 + (X + tY - tX)d \\
&= a_{X+tY-tX}
\end{aligned}$$

Da t, X und Y Konstanten sind, ist die Aussage damit bewiesen. □

Betrachten wir Beispiel 1.9 aus der Einleitung:

Beispiel 1.16. Sei $\langle c_n \rangle$ jene Folge rationaler Zahlen, in der jedes Folgenelement das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarn ist, und für die weiters $c_7 = 13$ und $c_{37} = 53$ gilt. Man bestimme alle Elemente dieser Folge.

Lösung. Seien c_0 und c_1 die beiden ersten Elemente. Wir definieren $d := c_1 - c_0$. Jedes Element muss arithmetisches Mittel seiner beiden Nachbarn sein, also muss gelten:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{c_0 + c_2}{2} && \Big/ \cdot 2 \\ 2c_1 &= c_0 + c_2 && \Big/ - c_0 - c_1 \\ c_1 - c_0 &= c_2 - c_1 \\ d &= c_2 - c_1 \end{aligned}$$

Es gilt also bereits $c_1 = c_0 + d$ und $c_2 = c_1 + d$. Wir zeigen nun allgemein, dass $c_{n+1} = c_n + d$ für alle n gibt. Dazu verwenden wir vollständige Induktion:

- Basis: $c_1 = c_0 + d$ und $c_2 = c_1 + d$
- Annahme: $c_k = c_{k-1} + d$ für $k = 1, 2, \ldots, n$
- Schritt: Wir wollen zeigen, dass auch $c_{n+1} = c_n + d$ gelten muss. Laut Angabe muss jedes Element arithmetisches Mittel seiner beiden Nachbarn sein, also gilt:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{c_{n-1} + c_{n+1}}{2} && \Big/ \cdot 2 \\ 2c_n &= c_{n-1} + c_{n+1} && \Big/ - c_{n-1} - c_n \\ c_n - c_{n-1} &= c_{n+1} - c_n \\ d &= c_{n+1} - c_n && \Big/ + c_n \\ c_{n+1} &= c_n + d \end{aligned}$$

Also ist $\langle c_n \rangle$ eine arithmetische Folge mit Distanz d zwischen aufeinanderfolgenden Folgenelementen. Folglich gilt $c_n = c_0 + n \cdot d$ für alle n.
Es soll gelten $c_7 = 13$ und $c_{37} = 53$, also:

$$\begin{aligned} I: &\quad & c_7 = c_0 + 7d &= 13 \\ II: &\quad & c_{37} = c_0 + 37d &= 53 \\ II - I: &\quad & c_0 + 37d - c_0 - 7d &= 53 - 13 \\ && 30d &= 40 \\ && d &= \frac{40}{30} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Nun müssen wir noch c_0 berechnen:

$$\begin{aligned} c_7 = c_0 + 7d &= 13 \\ c_0 + 7 \cdot \frac{4}{3} &= 13 \\ c_0 + \frac{28}{3} &= 13 && \Big/ - \frac{28}{3} \\ c_0 &= 13 - \frac{28}{3} = \frac{39}{3} - \frac{28}{3} = \frac{11}{3} \end{aligned}$$

Folglich gilt für alle Folgenelemente $c_n = \frac{11}{3} + n \cdot \frac{4}{3}$. □

Wir können aus dem Beispiel noch eine kleine Erkenntnis ableiten:

Satz 1.17. *Eine Folge ist eine arithmetische Folge dann und nur dann, wenn jedes Folgenelement das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarn ist.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei $\langle c_n \rangle$ eine arithmetische Folge. Dann gilt für jedes n, dass $c_n = c_0 + nd$, sowie $c_{n+1} = c_0 + (n+1)d$ und $c_{n-1} = c_0 + (n-1)d$.

Daher gilt:

$$\begin{aligned}\frac{c_{n+1} + c_{n-1}}{2} &= \frac{c_0 + (n+1)d + c_0 + (n-1)d}{2} \\ &= \frac{2c_0 + 2nd}{2} \\ &= c_0 + nd \\ &= c_n\end{aligned}$$

„$\Longleftarrow$“: Siehe Beispiel 1.16. □

Ein weiteres Beispiel:

Beispiel 1.18. Man zeige: Enthält eine arithmetische Folge zwei verschiedene Potenzen einer positiven ganzen Zahl, so enthält sie unendlich viele Potenzen dieser Zahl.

Lösung. Sei $\langle a_n \rangle$ eine arithmetische Folge, und seien x^k und x^{k+m} zwei in $\langle a_n \rangle$ enthaltene Potenzen von x.

Wir wissen aus Lemma 1.15, dass damit auch für jedes $t \in \mathbb{N}$ die Zahl $\tilde{a}(t) := x^k + t \cdot (x^{k+m} - x^k)$ in $\langle a_n \rangle$ enthalten sein muss.

Nun versuchen wir, Werte für t zu finden, für die $\tilde{a}(t)$ ebenfalls eine Potenz von x ist. Durch Ausprobieren sehen wir:

$$\begin{aligned}\tilde{a}(1) &= x^k + 1 \cdot (x^{k+m} - x^k) \\ &= x^k + x^{k+m} - x^k \\ &= x^{k+m} \\ \tilde{a}(x^m + 1) &= x^k + (x^m + 1) \cdot (x^{k+m} - x^k) \\ &= x^k + x^{k+2m} - x^{k+m} + x^{k+m} - x^k \\ &= x^{k+2m} \\ \tilde{a}(x^{2m} + x^m + 1) &= x^k + (x^{2m} + x^m + 1) \cdot (x^{k+m} - x^k) \\ &= x^k + x^{k+3m} - x^{k+2m} + x^{k+2m} - x^{k+m} + x^{k+m} - x^k \\ &= x^{k+3m}\end{aligned}$$

Vermutung: $\tilde{a}(x^{bm} + x^{(b-1)m} + x^{(b-2)m} + \cdots + x^{2m} + x^m + 1) = x^{k+(b+1)m}$ für alle b.
Wir zeigen dies durch vollständige Induktion:

- Basis: Siehe oben für $b = 1$, $b = 2$ und $b = 3$.
- Annahme:
$$\tilde{a}(x^{bm} + x^{(b-1)m} + x^{(b-2)m} + \cdots + x^{2m} + x^m + 1) = x^{k+(b+1)m}$$
für $b = 1, 2, \ldots, n$
- Schritt: Wir wollen zeigen, dass auch
$$\tilde{a}(x^{(b+1)m} + x^{bm} + x^{(b-1)m} + x^{(b-2)m} + \cdots + x^{2m} + x^m + 1) = x^{k+(b+2)m}$$

gelten muss.

$$\begin{aligned}
&\tilde{a}(x^{(b+1)m} + x^{bm} + x^{(b-1)m} + x^{(b-2)m} + \cdots + x^{2m} + x^m + 1) \\
&= x^k + (x^{(b+1)m} + x^{bm} + x^{(b-1)m} + x^{(b-2)m} + \cdots + x^{2m} + x^m + 1) \cdot (x^{k+m} - x^k) \\
&= x^k + x^{(b+1)m} \cdot (x^{k+m} - x^k) + (x^{bm} + x^{(b-1)m} + x^{(b-2)m} + \cdots + x^{2m} + x^m + 1) \cdot (x^{k+m} - x^k) \\
&= x^{(b+1)m} \cdot (x^{k+m} - x^k) + x^k + (x^{bm} + x^{(b-1)m} + x^{(b-2)m} + \cdots + x^{2m} + x^m + 1) \cdot (x^{k+m} - x^k) \\
&= x^{(b+1)m} \cdot (x^{k+m} - x^k) + \tilde{a}(x^{bm} + x^{(b-1)m} + x^{(b-2)m} + \cdots + x^{2m} + x^m + 1) \\
&\overset{\text{I.A.}}{=} x^{(b+1)m} \cdot (x^{k+m} - x^k) + x^{k+(b+1)m} \\
&= x^{k+(b+2)m} - x^{k+(b+1)m} + x^{k+(b+1)m} \\
&= x^{k+(b+2)m}
\end{aligned}$$

Da x ganzzahlig ist, ist auch $t = x^{bm} + x^{(b-1)m} + x^{(b-2)m} + \cdots + x^{2m} + x^m + 1$ ganzzahlig. Daher ist x^{k+bm} für jedes $b \in \mathbb{N}$ in der Folge enthalten. $\square$

Lösung. Noch ein alternativer (weniger konstruktiver) Lösungsweg: Wir wollen zeigen, dass x^{k+bm} für jedes $b \in \mathbb{N}$ in der Folge enthalten ist. Wir formen dafür die Distanz $x^{k+bm} - x^k$ um:

$$\begin{aligned}
x^{k+bm} &= x^k + x^{k+bm} - x^k \\
&= x^k + x^k(x^{bm} - 1) \\
&= x^k + x^k(x^m - 1)(1 + x^m + x^{2m} + x^{3m} + \cdots + x^{(b-2)m} + x^{(b-1)m}) \\
&= x^k + (x^{k+m} - x^k)(1 + x^m + x^{2m} + x^{3m} + \cdots + x^{(b-2)m} + x^{(b-1)m})
\end{aligned}$$

Wenn wir $t = 1 + x^m + x^{2m} + x^{3m} + \cdots + x^{(b-2)m} + x^{(b-1)m}$ setzen, folgt damit wieder mit Lemma 1.15, dass $x^{k+bm} = x^k + t \cdot (x^{k+m} - x^k)$ in der Folge enthalten sein muss. $\square$

1.2.2 Geometrische Folgen

Eine geometrische Folge ist eine Folge, bei der der Quotient aufeinanderfolgender Folgenelemente konstant ist:

Definition 1.19. *Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge von Zahlen (die aus einer beliebigen Grundmenge stammen können, beispielsweise $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$). Diese nennt man eine* GEOMETRISCHE FOLGE *dann und nur dann, wenn für ein fixes q gilt:*

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Wir können leicht zeigen, dass diese rekursive Darstellung äquivalent zur folgenden expliziten Darstellung ist:

Satz 1.20. *Sei $\langle a_n \rangle$ eine geometrische Folge mit $a_{n+1} = a_n \cdot q$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$a_n = a_0 \cdot q^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis. Um dies zu beweisen, benutzen wir wieder eine INDEXVERSCHIEBUNG: Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_{n+1} = a_n \cdot q$, dann gilt natürlich auch $a_n = a_{n-1} \cdot q$ (für alle $n \geq 1$), ebenso $a_{n-1} = a_{n-2} \cdot q$ (für alle $n \geq 2$), und so weiter.

Diese Gleichungen setzen wir nun der Reihe nach ein:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} \cdot q \\
&= a_{n-2} \cdot q^2 \\
&= a_{n-3} \cdot q^3 \\
&= a_{n-4} \cdot q^4 \\
&\ \ \vdots \\
&= a_{n-k} \cdot q^k \\
&\ \ \vdots \\
&= a_{n-n} \cdot q^n \\
&= a_0 \cdot q^n
\end{aligned}$$

□

Wir erhalten eine ähnliche Beobachtung wie in Lemma 1.15:

Lemma 1.21. *Sei $\langle a_n \rangle$ eine geometrische Folge, in der aufeinanderfolgender Elemente den Quotienten q haben. Seien weiters x und y zwei Zahlen, die in der Folge (in dieser Reihenfolge) enthalten sind. Dann ist $\frac{y}{x}$ eine Potenz von q, und für jedes $t \in \mathbb{N}$ ist auch $x \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^t$ in der Folge enthalten.*

Beweis. Seien X und Y die Indizes, an denen x und y auftreten, d.h. $a_X = x$ und $a_Y = y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{y}{x} &= \frac{a_Y}{a_X} \\
&= \frac{a_0 \cdot q^Y}{a_0 \cdot q^X} \\
&= q^{Y-X}
\end{aligned}$$

Für jedes $t \in \mathbb{N}$ gilt folglich:

$$\begin{aligned}
x \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^t &= a_X \cdot \left(q^{Y-X}\right)^t \\
&= a_0 \cdot q^X \cdot q^{tY-tX} \\
&= a_0 \cdot q^{X+tY-tX} \\
&= a_{X+tY-tX}
\end{aligned}$$

Da t, X und Y Konstanten sind, ist die Aussage damit bewiesen. □

Wenn wir zwei bestimmte Folgenelemente gegeben haben, können wir die Folge auf dieselbe Art bestimmen wie in Beispiel 1.16. Wir erhalten auch einen ähnlichen Zusammenhang zwischen geometrischen Folgen und geometrischem Mittel:

Satz 1.22. *Eine Folge ist eine geometrische Folge dann und nur dann, wenn jedes Folgenelement das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarn ist.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei $\langle c_n \rangle$ eine geometrische Folge. Dann gilt für jedes n, dass $c_n = c_0 \cdot q^n$, sowie $c_{n+1} = c_0 \cdot q^{n+1}$ und $c_{n-1} = c_0 \cdot q^{n+1}$.

Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{c_{n+1} \cdot c_{n-1}} &= \sqrt{c_0 \cdot q^{n+1} \cdot c_0 \cdot q^{n-1}} \\
&= \sqrt{c_0^2 \cdot q^{2n}} \\
&= c_0 \cdot q^n \\
&= c_n
\end{aligned}$$

„$\Longleftarrow$“: Sei $\langle c_n \rangle$ eine Folge, in der jedes Folgenelement das geometrische Mittel seiner Nachbarn ist. Seien c_0 und c_1 die beiden ersten Elemente. Wir definieren $q := \frac{c_1}{c_0}$. Wieder zeigen wir durch vollständige Induktion allgemein, dass $c_{n+1} = c_n \cdot q$ für alle n gilt.

- Basis: $c_1 = c_0 \cdot q$ gemäß der Definition von q
- Annahme: $c_k = c_{k-1} \cdot q$ für $k = 1, 2, \ldots, n$
- Schritt: Wir wollen zeigen, dass auch $c_{n+1} = c_n \cdot q$ gelten muss. Laut Annahme muss jedes Element geometrisches Mittel seiner beiden Nachbarn sein, also gilt:

$$
\begin{aligned}
c_n &= \sqrt{c_{n-1} \cdot c_{n+1}} && \Big/^2 \\
c_n^2 &= c_{n-1} \cdot c_{n+1} && \Big/ \cdot \frac{1}{c_n c_{n-1}} \\
\frac{c_n}{c_{n-1}} &= \frac{c_{n+1}}{c_n} \\
q &= \frac{c_{n+1}}{c_n} && \Big/ \cdot c_n \\
c_{n+1} &= c_n \cdot q
\end{aligned}
$$

□

Ein Beispiel:

Beispiel 1.23. Man zeige: Enthält eine geometrische Folge nur ganze Zahlen (die nicht alle 0 sind), so muss auch der Quotient q aufeinanderfolgender Folgenelemente ganzzahlig sein.

Lösung. Seien x und y zwei aufeinanderfolgende Folgenelemente in einer Folge $\langle c_n \rangle$ ganzer Zahlen, dann gilt $q = \frac{x}{y}$. Da x und y ganzzahlig sind, ist q daher rational.

Sei $q = \frac{a}{b}$ die gekürzte Darstellung von q, d.h. a und b sind relativ prim. Nehmen wir nun an, dass q keine ganze Zahl ist, also $b \neq 1$. Dann enthält b mindestens einen Primfaktor p, der nicht in a enthalten ist.

Für jedes n gilt:

$$
\begin{aligned}
c_n &= c_0 \cdot q^n \\
&= c_0 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n \\
&= \frac{c_0 a^n}{b^n}
\end{aligned}
$$

Sei k die Vielfachheit von p als Primfaktor von c_0. Dann tritt p im Zähler genau k Mal als Primfaktor auf, und im Nenner n Mal. Für $n > k$ ist c_n daher keine ganze Zahl, was im Widerspruch zur Angabe stünde. Daher ist $b = 1$ und q somit ganzzahlig. □

1.2.3 Harmonische Folge

Wie wir gesehen haben, ist in einer arithmetischen Folge jedes Folgenglied das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarn, und in einer geometrischen Folge ist jedes das geometrische Mittel. Analog können wir daher auch harmonische Folgen definieren:

Definition 1.24. *Eine harmonische Folge ist eine Folge, in der jedes Folgenglied das harmonische Mittel seiner beiden Nachbarn ist.*

Die einfachste harmonische Folge $\langle h_n \rangle$ ist definiert durch $h_n = \frac{1}{n}$.

Beispiel 1.25. Man zeige: Die Folge $\langle a_n \rangle$ ist eine harmonische Folge dann und nur dann, wenn $\langle \frac{1}{a_n} \rangle$ eine arithmetische Folge ist.

Lösung. Wir zeigen zuerst allgemein, dass x dann und nur dann das arithmetische Mittel von y und z ist, wenn $\frac{1}{x}$ das harmonische Mittel von $\frac{1}{y}$ und $\frac{1}{z}$ ist:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{2}{\left(\frac{1}{y}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{z}\right)^{-1}} \quad \Longleftrightarrow \\
\frac{1}{x} &= \frac{2}{y+z} \quad \Longleftrightarrow \\
x &= \frac{y+z}{2}
\end{aligned}$$

Nun beweisen wir die Aussage:

„$\Longrightarrow$“: Sei $\langle a_n \rangle$ eine harmonische Folge, dann ist für jedes n das Folgenelement a_n harmonisches Mittel von a_{n+1} und a_{n-1}, also ist auf Grund der Vorüberlegung $\frac{1}{a_n}$ arithmetisches Mittel von $\frac{1}{a_{n+1}}$ und $\frac{1}{a_{n-1}}$. Da dies für jedes n gilt, ist $\langle \frac{1}{a_n} \rangle$ eine arithmetische Folge.

„$\Longleftarrow$“: Sei $\langle \frac{1}{a_n} \rangle$ eine arithmetische Folge, dann ist für jedes n das Folgenelement $\frac{1}{a_n}$ arithmetisches Mittel von $\frac{1}{a_{n+1}}$ und $\frac{1}{a_{n-1}}$, also ist auf Grund der Vorüberlegung a_n harmonisches Mittel von a_{n+1} und a_{n-1}. Da dies für jedes n gilt, ist $\langle a_n \rangle$ eine harmonische Folge. □

1.2.4 Fibonacci-Folge

Eine der wichtigsten und bekanntesten Folgen ist die Fibonacci-Folge, benannt nach dem italienischen Mathematiker Leonardo Fibonacci (ca. 1180 – ca. 1241), obwohl die Folge den Griechen und Indern bereits in der Antike bekannt war.

Fibonacci beschrieb ein Beispiel, das zur Fibonacci-Folge führt, folgendermaßen:

Beispiel 1.26. In einem ausreichend großen Garten werden Kaninchen gezüchtet:

- Junge Kaninchen werden in einem Jahr erwachsen.
- Jedes erwachsene Paar Kaninchen bringt jedes Jahr zwei Junge zur Welt.
- Zu Beginn befindet sich ein junges Kaninchenpaar im Garten.

Wir betrachten nun die Entwicklung der Kaninchenpopulation in diesem Garten:

- Im ersten Jahr befindet sich das junge Kaninchenpaar im Garten.
- Im zweiten Jahr ist dieses Paar erwachsen geworden, es befindet sich also noch immer genau ein Paar im Garten.
- Im dritten Jahr befinden sich das gleiche Paar und zusätzlich deren erste zwei Nachkommen im Garten, zusammen also zwei Paare, ein junges und ein erwachsenes.
- Das erwachsene Paar bekommt weiteren Nachwuchs, während das junge Paar erwachsen wird. Im vierten Jahr befinden sich daher drei Paare im Garten, ein junges und zwei Erwachsene.
- Beide erwachsenen Paare bekommen Nachwuchs, während das junge Paar erwachsen wird. Im fünften Jahr befinden sich fünf Paare im Garten, zwei junge und drei Erwachsene.
- Die drei erwachsenen Paare bekommen Nachwuchs, während die zwei jungen Paare erwachsen werden. Im sechsten Jahr befinden sich acht Paare im Garten, drei junge und fünf Erwachsene.

- Die fünf erwachsenen Paare bekommen Nachwuchs, während die drei jungen Paare erwachsen werden. Im siebenten Jahr befinden sich somit dreizehl Paare im Garten, fünf junge und acht Erwachsene.

- ...

Fassen wir als Tabelle zusammen:

Jahr	**Erwachsene Paare**	**Junge Paare**	**Paare gesamt**
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21
9	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89
12	89	55	144
13	144	89	233
14	233	144	377
15	377	233	610

Drei Beobachtungen:

- Die Gesamtanzahl ist die Anzahl der erwachsenen plus der jungen Kaninchenpaare.

- Die Anzahl der erwachsenen Kaninchenpaare eines Jahres ist gleich der Gesamtanzahl der Kaninchenpaare des Vorjahres. (Die erwachsenen Kaninchen des Vorjahres bleiben erwachsen, und die jungen des Vorjahres werden erwachsen.)

- Die Anzahl der jungen Kaninchenpaare eines Jahres ist gleich der Anzahl der erwachsenen Kaninchenpaare des Vorjahres. (Jedes erwachsene Paar bringt ein junges Paar zur Welt.)

Damit gilt:
Gesamtanzahl im Jahr n
= Erwachsene im Jahr n + Junge im Jahr n
= Gesamtanzahl im Jahr $(n-1)$ + Erwachsene im Jahr $(n-1)$
= Gesamtanzahl im Jahr $(n-1)$ + Gesamtanzahl im Jahr $(n-2)$

Definition 1.27. *Die Fibonacci-Folge ist definiert durch das rekursive Bildungsgesetz*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{für } n \geq 2$$

mit den Anfangswerten

$$F_1 = F_2 = 1 \ .$$

Die Folgenelemente der Fibonacci-Folge werden auch als Fibonacci-Zahlen bezeichnet.

Hinweis. Oft werden stattdessen auch die Anfangswerte $F_0 = 0, F_1 = 1$ angegeben. Das Resultat ist dasselbe, da wiederum $F_2 = F_0 + F_1 = 0 + 1 = 1$ gilt.

Die ersten Folgenelemente lauten damit:

$$(0,)1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots$$

Im obigen Beispiel ist F_n somit die Anzahl der Kaninchenpaare im n-ten Jahr.

Beispiel 1.28. Man zeige: Aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen sind teilerfremd.

Lösung. Wir beweisen dies durch vollständige Induktion:

- Basis: Für die ersten Folgenelemente ist leicht überprüft, dass aufeinanderfolgende Folgenelemente teilerfremd sind: 1 ist teilerfremd zu 2, 2 teilerfremd zu 3, 3 ist teilerfremd zu 5, 5 ist teilerfremd zu 8, und so weiter.
- Annahme: F_k ist teilerfremd zu F_{k-1} für $k = 1, 2, \ldots, n$
- Schritt: Wir wollen zeigen, dass auch F_{n+1} teilerfremd zu F_n sein muss. Nehmen wir an, die beiden wären nicht teilerfremd, d.h. es existiert ein Primfaktor p sodass $p \mid F_{n+1}$ und $p \mid F_n$. Dann gilt wegen $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ aber auch $p \mid F_{n-1}$, und somit wäre p ein gemeinsamer Teiler von F_n und F_{n-1}, was im Widerspruch zur Angabe stünde.

□

Beispiel 1.29. Man zeige: $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

Lösung. Wir betrachten zwei verschiedene Beweise. Zum einen können wir den Beweis durch vollständige Induktion führen:

- Basis:

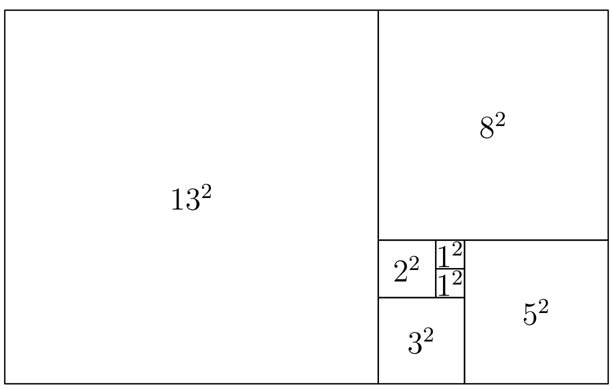
$$\begin{aligned}
1^2 + 1^2 &= 2 = 1 \cdot 2 \\
1^2 + 1^2 + 2^2 &= 6 = 2 \cdot 3 \\
1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 &= 15 = 3 \cdot 5 \\
1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 &= 40 = 5 \cdot 8
\end{aligned}$$

- Annahme: $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_k^2 = F_k \cdot F_{k+1}$ für $k = 1, 2, \ldots, n$
- Schritt: Wir wollen zeigen, dass auch $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{n+1} \cdot F_{n+2}$ gilt.

$$\begin{aligned}
F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 + F_{n+1}^2 &\overset{\text{I.A.}}{=} F_n \cdot F_{n+1} + F_{n+1}^2 \\
&= F_{n+1} \cdot (F_n + F_{n+1}) \\
&= F_{n+1} \cdot F_{n+2}
\end{aligned}$$

□

Lösung. Alternativ können wir auch eine graphische Lösung betrachten. Wir zeichnen eine Reihe von Quadraten, die jeweils eine Fibonacci-Zahl als Seitenlänge haben:



Nach dem Zeichnen der ersten n solchen Quadraten machen wir folgende Beobachtungen:

- Eine Seitenlänge des entstandenen Rechtecks ist F_n, die andere F_{n+1}. Die Fläche setzt sich somit einerseits aus den Quadraten der ersten n Fibonacci-Zahlen zusammen, und lässt sich andererseits berechnen als $F_n \cdot F_{n+1}$. Für n ist die Gleichung somit bewiesen.
- Das nächste Quadrat mit Seitenlänge F_{n+1} kann an die längere Seite des Rechtecks angeschlossen werden. Das entstehende neue Rechteck hat eine Breite von F_{n+1} und eine Länge von $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$. Somit bleiben die Bedingungen erhalten.
- Durch vollständige Induktion über die Anzahl der Quadrate ist die Gleichung damit für alle n bewiesen.

□

1.2.5 Lucas-Folgen

Eine Verallgemeinerung der Fibonacci-Folge sind die Lucas-Folgen:

Definition 1.30. *Die Lucas-Folgen erster Art sind für ganzzahlige Parameter P und Q definiert durch das rekursive Bildungsgesetz*

$$U_n(P,Q) = P \cdot U_{n-1}(P,Q) - Q \cdot U_{n-2}(P,Q) \qquad \text{für } n \geq 2$$

mit den Anfangswerten

$$U_0(P,Q) = 0 \qquad \text{und} \qquad U_1(P,Q) = 1 \ .$$

Die Lucas-Folgen zweiter Art sind für ganzzahlige Parameter P und Q definiert durch das rekursive Bildungsgesetz

$$V_n(P,Q) = P \cdot V_{n-1}(P,Q) - Q \cdot V_{n-2}(P,Q) \qquad \text{für } n \geq 2$$

mit den Anfangswerten

$$V_0(P,Q) = 2 \qquad \text{und} \qquad V_1(P,Q) = P \ .$$

Viele der Lucas-Folgen haben spezielle Namen:

Lucas-Folge	**Name**	**Erste Folgenelemente**
$\langle U_n(1,-1)\rangle$	Fibonacci-Folge	$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$
$\langle V_n(1,-1)\rangle$	Folge der Lucas-Zahlen	$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots$
$\langle U_n(2,-1)\rangle$	Pell-Folge	$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \ldots$
$\langle V_n(2,-1)\rangle$	Pell-Lucas-Folge	$2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, \ldots$
$\langle U_n(1,-2)\rangle$	Jacobsthal-Zahlen	$0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, \ldots$
$\langle U_n(3,2)\rangle$	Mersenne-Zahlen	$0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, \ldots$

Beispiel 1.31. Sei $\langle F_n\rangle$ die Fibonacci-Folge und $\langle L_n\rangle = \langle V_n(1,-1)\rangle$ die Folge der Lucas-Zahlen. Man zeige: $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ für alle $n \geq 1$.

Lösung. Wir zeigen dies durch vollständige Induktion:

- Basis: Wir betrachten die ersten Werte:

Fibonacci-Folge	**Lucas-Folge**
$F_0 = 0$	$L_0 = 2$
$F_1 = 1$	$L_1 = 1$
$F_2 = 1$	$L_2 = 3$
$F_3 = 2$	$L_3 = 4$
$F_4 = 3$	$L_4 = 7$
$F_4 = 5$	$L_4 = 11$

Es gilt
$L_1 = 1 = 0 + 1 = F_0 + F_2$,
$L_2 = 3 = 1 + 2 = F_1 + F_3$,
$L_3 = 4 = 1 + 3 = F_2 + F_4$,
$L_4 = 7 = 2 + 5 = F_3 + F_5$.

- Annahme: $L_k = F_{k+1} + F_{k-1}$ für $k = 1, 2, \ldots, n$
- Schritt: Wir wollen zeigen, dass auch $L_{n+1} = F_{n+2} + F_n$ gelten muss. Es gilt:

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= L_n + L_{n-1} \\ &\overset{\text{I.A.}}{=} F_{n+1} + F_{n-1} + F_n + F_{n-2} \\ &= F_{n+1} + F_n + F_{n-1} + F_{n-2} \\ &= F_{n+2} + F_n \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.32. Sei $\langle F_n \rangle$ die Fibonacci-Folge und $\langle L_n \rangle = \langle V_n(1, -1) \rangle$ die Folge der Lucas-Zahlen. Man zeige: Jede Folge $\langle a_n \rangle$, die für alle $n \geq 2$ die Rekursionsgleichung $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ erfüllt, kann dargestellt werden als $a_n = A \cdot F_n + B \cdot L_n$ mit geeigneten Konstanten A und B.

Lösung. Da die Folge $\langle a_n \rangle$ die Rekursionsgleichung erfüllen muss, sind alle weiteren Folgenelemente abhängig von den Startwerten a_0 und a_1. Auch für diese soll die Darstellung gelten, also erhalten wir für A und B durch Einsetzen die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} a_0 &= A \cdot F_0 + B \cdot L_0 \\ &= A \cdot 0 + B \cdot 2 \\ &= 2B \\ B &= \frac{a_0}{2} \\ a_1 &= A \cdot F_1 + B \cdot L_1 \\ &= A \cdot 1 + B \cdot 1 \\ &= A + B \\ &= A + \frac{a_0}{2} \\ A &= a_1 - \frac{a_0}{2} \end{aligned}$$

Nun beweisen wir die Korrektheit der resultierenden Darstellung durch vollständige Induktion:

- Basis: Für $n = 0$ und $n = 1$ gilt die Darstellung auf Grund der Definition von A und B.
- Annahme: $a_k = A \cdot F_k + B \cdot L_k$ für $k = 1, 2, \ldots, n$
- Schritt: Wir wollen zeigen, dass auch $a_{n+1} = A \cdot F_{n+1} + B \cdot L_{n+1}$ gelten muss. Es gilt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} \\ &\overset{\text{I.A.}}{=} A \cdot F_n + B \cdot L_n + A \cdot F_{n-1} + B \cdot L_{n-1} \\ &= A \cdot (F_n + F_{n-1}) + B \cdot (L_n + L_{n-1}) \\ &= A \cdot F_{n+1} + B \cdot L_{n+1} \end{aligned}$$

□

1.3 Finden expliziter Darstellungen

In vielen Aufgaben gilt es, von einer impliziten oder rekursiven Darstellung zu einer expliziten Darstellung zu gelangen. Einige Methoden dafür werden wir uns im Folgenden anschauen.

1.3.1 Erraten und durch vollständige Induktion beweisen

Will man von einer rekursiven zu einer expliziten Darstellung gelangen, so reicht es im Grunde genommen, die explizite Darstellung zu erraten und durch vollständige Induktion zu beweisen, dass diese Darstellung auch tatsächlich für alle n gilt. Der Induktionsschritt ergibt sich hierbei bereits aus der Rekursionsgleichung: Da diese das nächste Folgenglied aus den vorhergehenden berechnet, und für alle vorhergehenden Elemente die Induktionsannahme bereits gezeigt ist, kann man einfach einsetzen und durch Umformung zum Ergebnis kommen. (Die Schwierigkeit bei dieser Methode liegt natürlich im Erraten der expliziten Darstellung.)

Beispiel 1.33. Man finde eine explizite Form für die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = a_{n-1} + n$ und dem Startwert $a_0 = 0$.

Lösung. Die ersten Folgenelemente lauten: $0, 1, 3, 6, 10, 15$. Wir vermuten: $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Nun wenden wir vollständige Induktion an:

- Basis: Für die ersten Werte lässt sich die Gleichung leicht nachprüfen, beispielsweise $a_4 = 10 = \frac{4 \cdot 5}{2}$.
- Annahme: $a_k = \frac{k(k+1)}{2}$ für $k = 1, 2, \ldots, n$
- Schritt: Wir wollen zeigen, dass auch $a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ gelten muss. Es gilt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + n \\ &\overset{\text{I.A.}}{=} \frac{n(n-1)}{2} + n \\ &= \frac{n^2 - n}{2} + \frac{2n}{2} \\ &= \frac{(n+1)n}{2} \end{aligned}$$

□

Als weiteres Beispiel betrachten wir noch einmal Beispiel 1.8 aus der Einleitung:

Beispiel 1.34. Man finde eine explizite Darstellung für die Folge $\langle b_n \rangle$ mit $b_1 = 1$ und $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} b_n$ für alle $n \geq 1$.

Lösung. Berechnen wir hier die ersten Glieder, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 \\ b_2 &= 1 \\ b_3 &= 1 + 1 = 2 \\ b_4 &= 1 + 1 + 2 = 4 \\ b_5 &= 1 + 1 + 2 + 4 = 8 \\ b_6 &= 1 + 1 + 2 + 4 + 8 = 16 \\ b_7 &= 1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 32 \end{aligned}$$

Wir vermuten, dass die explizite Darstellung $b_n = 2^{n-2}$ für $n \geq 2$ dieselbe Folge beschreibt. Wiederum verwenden wir vollständige Induktion:

- Basis: Für die ersten Werte haben wir dies bereits durch die oben berechneten Werte überprüft.
- Annahme: $b_k = 2^{k-2}$ für $k = 2, 3, \ldots, n$ (und $a_1 = 1$).
- Schritt: Wir wollen zeigen, dass auch $b_{n+1} = 2^{n-1}$ gelten muss. Es gilt:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n} b_n \\ &= b_1 + \sum_{i=2}^{n} b_n \\ &\overset{\text{I.A.}}{=} 1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n-2} \\ &= 1 + 2^{n-1} - 1 \\ &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

Mit der Gleichung $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-2} = 2^{n-1}$ greifen wir natürlich schon ein wenig vor auf das Kapitel 2, das sich mit Reihen befassen wird. Die Gleichheit kann in diesem Fall aber auch sehr einfach durch vollständige Induktion gezeigt werden.

Alternativ kann man den Induktionsschritt auch folgendermaßen zeigen:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n} b_n \\ &= b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n \\ &= b_n + b_n \\ &= 2b_n \\ &\overset{\text{I.A.}}{=} 2 \cdot 2^{n-2} \\ &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

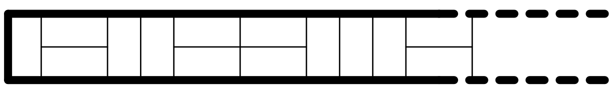
□

Manchmal genügt es auch zu zeigen, dass eine Folge gleich der Fibonacci-Folge ist, oder direkt damit zusammenhängt (beispielsweise $a_n = 2F_{n+3} - 2$). Als Beispiel dafür betrachten wir noch einmal Beispiel 1.4 aus der Einleitung:

Beispiel 1.35. Für jedes n bestimme man die Anzahl der Möglichkeiten, einen $(2 \times n)$-Streifen mit (1×2)-Domino-Steinen zu überdecken.

Lösung. Wir definieren die Folge $\langle k_n \rangle$ als

$$k_n = [\text{Anzahl der Möglichkeiten, einen } (2 \times n)\text{-Streifen mit } (1 \times 2)\text{-Domino-Steinen zu überdecken}] .$$



Nehmen wir an, wir kennen die Werte von $\langle k_n \rangle$ bis zu einem gewissen N. Betrachten wir die Überdeckungen eines Rechtecks der Länge $N + 1$, so gibt es zwei Möglichkeiten für die $(N + 1)$-te Spalte: Entweder dort befindet sich ein senkrechter Domino-Stein, oder zwei waagrechte.

Die Anzahl der Überdeckungen eines Rechtecks der Länge $N + 1$, die mit einem senkrechten Stein enden, ist gleich der Gesamtanzahl der Überdeckungen eines Rechtecks der Länge N – an jede solche Überdeckung kann ein senkrechter Stein angehängt werden.

Die Anzahl der Überdeckungen eines Rechtecks der Länge $N+1$, die mit zwei waagrechten Steinen enden, ist gleich der Gesamtanzahl der Überdeckungen eines Rechtecks der Länge $N-1$ – an jede solche Überdeckung kann ein 2×2-Block aus zwei waagrechten Steinen angehängt werden.

Damit gilt also $k_{n+1} = k_n + k_{n-1}$, die Rekursionsformel der Fibonacci-Folge. Für die Startwerte erhalten wir durch Durchprobieren $k_1 = 1 = F_2$ und $k_2 = 2 = F_3$. Somit gilt $k_n = F_{n+1}$. Formal lässt sich dies durch vollständige Induktion beweisen:

- Basis: Für die ersten Werte haben wir dies bereits überprüft.
- Annahme: $k_i = F_{i+1}$ für $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
- Schritt: Wir wollen zeigen, dass auch $k_{n+1} = F_{n+2}$ gelten muss. Es gilt:

$$\begin{aligned} k_{n+1} &= k_n + k_{n-1} \\ &= F_{n+1} + F_n \\ &= F_{n+2} \end{aligned}$$

□

Hinweis. Der letzte Schritt muss nicht zwingend so explizit ausgeführt und aufgeschrieben werden. Wenn zwei Folgen dieselbe Rekursionsgleichung haben, die sich auf die vorigen k Folgenelemente bezieht, und wenn k Startelemente übereinstimmen, dann müssen auch alle weiteren Folgenelemente gleich sein.

1.3.2 Lösungsmethode für homogene lineare Rekursionen

Definition 1.36. *Wir bezeichnen eine Rekursionsgleichung als* LINEARE *Rekursion, wenn sie die Form*

$$a_{n+1} = a_n \cdot c_0 + a_{n-1} \cdot c_1 + a_{n-2} \cdot c_2 + \cdots + a_{n-m} \cdot c_m + s(n) \tag{1.1}$$

hat mit Konstanten c_i für $i = 0, 1, \ldots, m$ und mit $c_m \neq 0$.

Gilt $s(n) = 0$, so nennt man sie HOMOGEN, *andernfalls* INHOMOGEN.

$m + 1$ ist die ORDNUNG *der linearen Rekursion.*

Für lineare Rekursionen gibt es ein Lösungsschema, das meist zum Ziel führt, also zu einer expliziten Darstellung:

Methode 1.37.

0. *Für eine Folge $\langle a_n \rangle$ sei eine homogene lineare Rekursionsformel mit konstanten Koeffizienten gegeben. (Hinweis: Manchmal kann man fehlende Elemente durch „dazubasteln“ mit Koeffizient 0 ersetzen.)*
1. *Man ersetze jedes a_n durch q^n (und entsprechend $a_{n\pm k}$ durch $q^{n\pm k}$). Die entstehende Gleichung nennt man die* CHARAKTERISTISCHE GLEICHUNG *der Rekursion.*
2. *Sei $n - m$ die kleinste vorkommende Potenz von q. Man dividiere die Gleichung durch q^{n-m}.*
3. *Nun hat man eine Gleichung in q mit konstanten Koeffizienten und Potenzen. Man löse diese nach q mit den gewohnten Methoden, beispielsweise der Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Seien $q_1, q_2, \ldots, q_l$ die Lösungen mit Vielfachheiten $v_1, v_2, \ldots, v_l$.*
4. *Man stelle folgenden Ansatz auf:*

$$\begin{aligned} a_n = \; & B_{1,1} \cdot q_1^n + B_{1,2} \cdot n \cdot q_1^n + \cdots + B_{1,v_1} \cdot n^{v_1-1} \cdot q_1^n + \\ & B_{2,1} \cdot q_2^n + B_{2,2} \cdot n \cdot q_2^n + \cdots + B_{2,v_2} \cdot n^{v_2-1} \cdot q_2^n + \\ & \vdots \\ & + B_{l,1} \cdot q_l^n + B_{l,2} \cdot n \cdot q_l^n + \cdots + B_{l,v_l} \cdot n^{v_l-1} \cdot q_l^n \end{aligned}$$

Hinweis. Für lauter verschiedene Lösungen vereinfacht sich das zu:

$$a_n = B_1 \cdot q_1^n + B_2 \cdot q_2^n + \cdots + B_l \cdot q_l^n$$

Hinweis. Normalerweise schreibt man nicht $B_{i,j}$, sondern setzt einfach Großbuchstaben in alphabetischer Reihenfolge ein.

5. *Man setze die bekannten Anfangswerte $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$ ein und bestimme die $B_{i,j}$ bzw. B_i. (Da bei einer Rekursion der Länge $m+1$ genau $m+1$ solche Werte B_* zu bestimmen sind, benötigt man $m+1$ Gleichungen, um diese eindeutig zu bestimmen.)*

6. *Probe!*

Beispiel 1.38. Die Rekursionsgleichung der Fibonaccis, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ist eine homogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten. Wir wenden daher die neue Methode darauf an:

0. $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$
1. $q^{n+1} = q^n + q^{n-1}$
2. Wir dividieren durch q^{n-1}:

$$q^2 = q + 1$$

3.

$$\begin{aligned} q^2 - q - 1 &= 0 \\ q_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

4. $F_n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
5.

$$\begin{aligned} F_0 &= A + B = 0 \Longrightarrow B = -A \\ F_1 &= A \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + B \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \\ &= A \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} - A \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \\ &= A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ &= A \cdot \sqrt{5} = 1 \\ \Longrightarrow A &= \frac{1}{\sqrt{5}} = -B \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

6. Wir berechnen zur Probe mit dieser Formel F_4:

$$F_4 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4\right) = 3 \qquad \text{OK}$$

1.3.3 Lösungsmethode für inhomogene lineare Rekursionen

Inhomogene lineare Rekursionsgleichungen sind im Allgemeinen wesentlich schwieriger zu lösen. Eine spezielle Form von inhomogenen Rekursionsgleichungen wollen wir dennoch kurz betrachten, nämlich diejenigen, bei denen der INHOMOGENE TERM (STÖRTERM) $s(n)$ die Form

$$s(n) = (s_0 + s_1 \cdot n + s_2 \cdot n^2 + \cdots + s_r \cdot n^r) \cdot \alpha^n \tag{1.2}$$

hat mit Konstanten s_i für alle i. Für Rekursionen dieser Form können wir eine Modifikation von Methode 1.37 verwenden:

Methode 1.39.

0. *Sei eine inhomogene lineare Rekursionsformel mit konstanten Koeffizienten gegeben, deren Störterm die angegebene Form hat.*
1. *Man lasse den Störterm vorerst weg und löse die Rekursion für die Gleichung ohne den Störterm mit Schritten 1-3 von Methode 1.37.*
2. *Man bestimme eine sogenannte partikuläre Lösung, das heißt eine Folge, die die Rekursionsgleichung erfüllt, aber nicht notwendigerweise die richtigen Startwerte hat. Dazu verwende man folgenden Ansatz:*

$$y_n = (t_0 + t_1 \cdot n + t_2 \cdot n^2 + \cdots + t_r \cdot n^r) \cdot n^v \cdot \alpha^n \tag{1.3}$$

   wobei v die Vielfachheit von α als Nullstelle der gerade gelösten homogenen Gleichung ist. Diesen Ansatz setzt man in die Rekursionsgleichung ein und berechnet die Werte $t_0, t_1, \ldots, t_r$.
3. *Die Lösung der Rekursion erhält man nun als Addition von partikulärer Lösung und Ansatz der homogenen Lösung (wie in Schritt 4 der vorigen Methode).*
4. *Man bestimme die noch ausständigen Koeffizienten wie zuvor.*
5. *Probe!*

Beispiel 1.40. Man finde eine explizite Darstellung für die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_{n+1} = 2 \cdot a_n - a_{n-1} + n$ mit den Startwerten $a_0 = 3$ und $a_1 = 5$.

0. $a_{n+1} = 2 \cdot a_n - a_{n-1} + n$
1. Lösung der homogenen Rekursionsgleichung mittels Methode 1.37:
   0. Die Gleichung ohne Störterm lautet $a_{n+1} = 2 \cdot a_n - a_{n-1}$.
   1. Die charakteristische Gleichung dazu ist $q^{n+1} = 2q^n - q^{n-1}$.
   2. Nach Division durch q^{n-1} erhalten wir $q^2 = 2q - 1$.
   3. Dies ist äquivalent zu $q^2 - 2q + 1 = 0$, also $(q-1)^2 = 0$. Wir erhalten daher die doppelte Lösung $q_1 = q_2 = 1$.
2. Der Störterm lautet $s(n) = n = (1 \cdot n + 0 \cdot 1) \cdot 1^n$, also gilt $\alpha = 1$. Dies ist eine doppelte Nullstelle der homogenen Lösung, daher verwenden wir den Ansatz $y_n = (A \cdot n + B) \cdot n^2 \cdot 1^n$
   Einsetzen in Rekursionsgleichung ergibt:

$$\begin{aligned}
(A \cdot (n+1) + B)(n+1)^2 &= 2 \cdot (A \cdot n + B) \cdot n^2 - (A \cdot (n-1) + B) \cdot (n-1)^2 + n \\
An^3 + 3An^2 + 3An + A + Bn^2 + 2Bn + B &= An^3 + 3An^2 - 3An + A + Bn^2 + 2Bn - B + n \\
3An + B &= -3An - B + n \\
(6A-1)n + 2B &= 0
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man $A = \frac{1}{6}, B = 0$. Die partikuläre Lösung lautet daher $y_n = \frac{1}{6} \cdot n^3$.
Wir stellen fest, dass diese Lösung die Rekursionsgleichung für jedes n erfüllt:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &\stackrel{!}{=} 2 \cdot y_n - y_{n-1} + n \\
\frac{1}{6} \cdot (n+1)^3 &\stackrel{!}{=} 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot n^3 - \frac{1}{6} \cdot (n-1)^3 + n \qquad \Big/ \cdot 6 \\
n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &\stackrel{!}{=} 2n^3 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1 + 6n \\
n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &\stackrel{!}{=} n^3 + 3n^2 + 3n + 1
\end{aligned}$$

3. Ansatz für allgemeine Lösung: $a_n = C + D \cdot n + y_n = C + D \cdot n + \frac{1}{6} \cdot n^3$.
4. Einsetzen der Startwerte ergibt für $n = 0$, dass $a_0 = 3 = C = C + D \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 0^3$ gelten muss, also $C = 3$, sowie für $n = 1$, dass $a_1 = 5 = 3 + D + \frac{1}{6} = C + D \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1^3$, also $D = \frac{11}{6}$ gelten muss. Die explizite Form der Rekursionsgleichung lautet daher: $a_n = 3 + \frac{11}{6} \cdot n + \frac{1}{6} \cdot n^3$.
5. Berechnen wir die ersten Folgenelemente mittels der Rekursionsformel, so erhalten wir $3, 5, 8, 13, 21, 33, \ldots$. Für a_3 soll also gelten, dass

$$\begin{aligned}
13 = a_3 &= 3 + \frac{11}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 3^3 \\
&= 3 + \frac{11}{2} + \frac{9}{2} = 13 \;,
\end{aligned}$$

was erfüllt ist (und somit die Vermutung nahelegt, dass wir uns nicht verrechnet haben).

Hinweis. Bei mehr als einem Störterm kann man diese auch getrennt betrachten und dann alle partikulären Lösungen zur homogenen Lösung addieren.

1.3.4 Mehr als eine Rekursion

Gelegentlich kommt es vor, dass wir zwei oder sogar mehr Rekursionen gleichzeitig betrachten müssen. Im Allgemeinen versucht man in so einem Fall, geschickt so lange umzuformen, bis eine der Folgen eine Rekursionsvorschrift besitzt, die nicht mehr von den anderen abhängig ist.

Beispiel 1.41. Seien $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ zwei Folgen, die den folgenden Rekursionsgleichungen genügen:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2 \cdot a_n + b_n \\
b_{n+1} &= a_n + b_n
\end{aligned}$$

Seien die Startwerte $a_1 = b_1 = 1$. Man berechne a_n in Abhängigkeit von n.

Lösung. Die zweite der beiden Rekursionsgleichungen lässt sich umformen zu

$$a_n = b_{n+1} - b_n \;.$$

Da dies für jedes n gilt, gilt durch Indexverschiebung natürlich auch

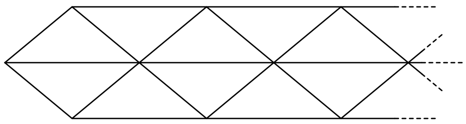
$$a_{n+1} = b_{n+2} - b_{n+1} \;.$$

Wir setzen dies in die erste Rekursionsgleichung ein und erhalten:

$$\begin{aligned} (b_{n+2} - b_{n+1}) &= 2 \cdot (b_{n+1} - b_n) + b_n \\ b_{n+2} &= 3b_{n+1} - b_n \end{aligned}$$

Ab hier kommen wir wieder mit dem bekannten Verfahren ans Ziel. □

Beispiel 1.42. In einem Straßennetz, dessen Anfang gezeichnet ist, sind die Punkte in der mittleren Horizontalen der Reihe nach mit $1, 4, 7, \dots$ bezeichnet. Die oberen Punkte der Reihe nach mit $2, 5, 8, \dots$ und die unteren der Reihe nach mit $3, 6, 9, \dots$.



Wie viele Wege von „1“ nach „$3n + 1$“ gibt es, die Punkte nur in monoton wachsender Reihenfolge besuchen? (BWF 2002)

Lösung. Die Punkte nur in monoton wachsender Reihenfolge zu besuchen ist äquivalent dazu, in der gegeben Skizze immer „von links nach rechts“ zu gehen.

Sei a_n die Anzahl der Möglichkeiten, den n-ten Knoten auf der mittleren Horizontalen zu erreichen (also jenen mit der Beschriftung „$3n + 1$“), und b_n die Anzahl der Möglichkeiten, den n-ten Knoten der oberen Reihe zu erreichen (der die Beschriftung „$3n + 2$“ trägt). Die Anzahl der Möglichkeiten, den n-ten Knoten der unteren Reihe zu erreichen, ist auf Grund der Symmetrie natürlich ebenfalls b_n.

Wir erhalten folgende Rekursionen:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2 \cdot b_n \\ b_{n+1} &= a_{n+1} + b_n \end{aligned}$$

mit den Startwerten $a_0 = 1$ und $b_0 = 1$.

Durch Umformung erhalten wir aus der ersten Gleichung $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2}$ und durch Indexverschiebung $b_{n+1} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2}$. Wir setzen dies in die zweite Gleichung ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2} &= a_{n+1} + \frac{a_{n+1} - a_n}{2} && \Big/ \cdot 2 \\ a_{n+2} - a_{n+1} &= 2a_{n+1} + a_{n+1} - a_n \\ a_{n+2} &= 4a_{n+1} - a_n && \Big/ (n+1) \rightsquigarrow n \\ a_{n+1} &= 4a_n - a_{n-1} \end{aligned}$$

Diese Rekursion hat die charakteristische Gleichung $q^2 = 4q - 1$ mit den Lösungen $q_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Wir machen den unbestimmten Ansatz $a_n = A(2 + \sqrt{3})^n + B(2 - \sqrt{3})^n$. Mit $a_0 = A + B = 1$ und $a_1 = A(2 + \sqrt{3}) + B(2 - \sqrt{3}) = 3$ erhalten wir als Lösung dieses linearen Gleichungssystems $A = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ und $B = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$, also

$$a_n = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2 + \sqrt{3})^n + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2 - \sqrt{3})^n \ .$$

□

1.4 Konvergenz

Nähert sich eine Folge einem Wert einzelnen Wert immer mehr an, so spricht man von Konvergenz. Wir werden nun dieses „Annähern“ mathematisch definieren und einen wichtigen Satz über Konvergenz kennenlernen.

1.4.1 Definition

Definition 1.43. *Ein* HÄUFUNGSPUNKT *einer Folge ist ein Punkt, der unendlich viele Folgenelemente „in seiner Nähe“ hat.*

Konkreter: Ein Wert x heißt Häufungspunkt einer Folge $\langle a_n \rangle$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ unendlich viele Folgenelemente a_i existieren mit $|a_i - x| < \epsilon$. (Unendlich viele solche Folgenglieder existieren dann und nur dann, wenn für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $m > N$ und $|a_m - x| < \epsilon$.)

Beispiel 1.44. Man bestimme alle Häufungspunkte der Folge $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

Lösung.

- Der Wert 1 ist Häufungspunkt der Folge: Gegeben sei ein $\epsilon > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$. Für $m' = \max\left(N, \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil\right)$ und $m = 2m'$ gilt $m > m' \geq N$ und

$$\begin{aligned} |b_m - 1| &= |b_{2m'} - 1| \\ &= |(-1)^{2m'} + \frac{1}{2m'} - 1| \\ &= |1 + \frac{1}{2m'} - 1| \\ &= \frac{1}{2m'} \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \epsilon \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

- Der Wert -1 ist Häufungspunkt der Folge: Gegeben sei ein $\epsilon > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$. Für $m' = \max\left(N, \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil\right)$ und $m = 2m' + 1$ gilt $m > m' \geq N$ und (ähnlich wie vorher) $|b_m + 1| < \epsilon$.
- Kein anderer Wert ist Häufungspunkt der Folge: Sei x ein Wert außer -1 und 1, und sei $d(x)$ der kleinste Abstand zu einem dieser beiden Häufungspunkte, also $d(x) = \min(|x - 1|, |x + 1|)$. Für $\epsilon = \frac{d(x)}{2}$ und $N \geq \frac{1}{\epsilon}$ sind alle Folgenglieder a_m mit $m > N$ höchstens ϵ von 1 oder -1 entfernt. Da x aber mindestens 2ϵ von diesen Punkten entfernt ist, kann auf Grund der Dreiecksungleichung kein weiteres Folgenglied mehr näher als ϵ bei x liegen.

□

Zusätzlich kann man auch ∞ und $-\infty$ als Häufungspunkte definieren, benötigt hier aber eine etwas andere Definition (da der in Definition 1.43 verwendete Abstand eines Punktes zum Häufungspunkt für ∞ nicht definiert ist):

Definition 1.45. *Man bezeichnet ∞ als (unendlichen) Häufungspunkt einer Folge, wenn die Folge nicht nach oben beschränkt ist, also beliebig große Elemente enthält. Formal: ∞ ist ein Häufungspunkt dann und nur dann, wenn für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_m > N$.*

Ebenso bezeichnet man $-\infty$ als (unendlichen) Häufungspunkt einer Folge, wenn die Folge nicht nach unten beschränkt ist, also beliebig kleine Elemente enthält. Formal: $-\infty$ ist ein Häufungspunkt dann und nur dann, wenn für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_m < -N$.

Im Allgemeinen haben wir folgende Fälle:

- Die Folge hat keinen endlichen Häufungspunkt. In diesem Fall sagen wir, dass die Folge DIVERGIERT.
- Die Folge hat ∞ als einzigen Häufungspunkt. Wir sagen, dass die Folge DIVERGIERT bzw. dass die Folge gegen ∞ geht.

- Die Folge hat $-\infty$ als einzigen Häufungspunkt. Wir sagen, dass die Folge DIVERGIERT bzw. dass die Folge gegen $-\infty$ geht.
- Die Folge hat genau einen Häufungspunkt, und dieser ist endlich. Wir sagen, dass die Folge gegen diesen Wert KONVERGIERT bzw. gegen diesen Wert „geht", und nennen diesen Wert den GRENZWERT (LIMES) der Folge.
- Die Folge hat zwei oder mehr Häufungspunkte. Auch in diesem Fall sagen wir, dass die Folge DIVERGIERT.

Einige Beispiele für alle fünf Fälle:

Beispiel 1.46.

- Die Folge hat keinen endlichen Häufungspunkt, divergiert also.
  - Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = n$ hat ∞ als Häufungspunkt. Dieser ist nicht endlich, also divergiert die Folge.
  - Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = (-1)^n \cdot n$ hat ∞ und $-\infty$ als Häufungspunkte. Keiner davon ist endlich, also divergiert die Folge.
- Die Folge hat nur ∞ als Häufungspunkt, divergiert also, bzw. geht gegen ∞.
  - Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = n$ hat nur ∞ als Häufungspunkt.
  - Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = 2^n$ hat nur ∞ als Häufungspunkt.
  - Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$ hat nur ∞ als Häufungspunkt.
- Die Folge hat nur $-\infty$ als Häufungspunkt, divergiert also, bzw. geht gegen $-\infty$.
  - Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = -n$ hat nur $-\infty$ als Häufungspunkt.
  - Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = -1.7^n$ hat nur $-\infty$ als Häufungspunkt.
  - Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{n}$ hat nur $-\infty$ als Häufungspunkt.
- Die Folge hat genau einen Häufungspunkt, und dieser ist endlich. Sie konvergiert also gegen diesen Wert.
  - Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0.
  - Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ konvergiert gegen 2.
  - Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \frac{5n^2-3n+2}{7n^2+732}$ konvergiert gegen $\frac{5}{7}$.
- Die Folge hat zwei oder mehr Häufungspunkte, divergiert also.
  - Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = (-1)^n$ hat Häufungspunkte bei 1 und -1.
  - Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat Häufungspunkte bei 1 und -1.
  - Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = n \mod 3$ hat Häufungspunkte bei 0, 1 und 2.
  - Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = 2^n + (-2)^n$ hat Häufungspunkte bei 0 und ∞.
  - Die Folge $\langle a_n \rangle = 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, \ldots$ hat Häufungspunkte bei jedem $a \in \mathbb{Z}^+$ und bei ∞.
  - Die Folge $\langle a_n \rangle = \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots$ hat Häufungspunkte bei $\frac{1}{a}$ für jedes $a \in \mathbb{Z}^+$ und bei 0.
  - Die Folge $\langle a_n \rangle = \sin(n)$ hat Häufungspunkte in allen $x \in [-1, 1]$.

Eine alternative (gleichwertige) Definition von Konvergenz lautet wie folgt:

Definition 1.47. *Man sagt, dass eine Folge gegen einen Wert x konvergiert, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n > N$ gilt, dass $|a_n - x| < \epsilon$.*

Hinweis. Es gibt viele gleichwertige Arten, Konvergenz und Häufungspunkte zu definieren. Aus Definition 1.47 kann beispielsweise leicht hergeleitet werden, dass x dann ein Häufungspunkt der Folge ist, und dass es keine weiteren Häufungspunkte geben kann.

Definition 1.48. *Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge mit Grenzwert a, dann schreibt man*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ .$$

Hinweis. Ganz korrekt müsste man bei Folgen immer vom Konvergenzverhalten *wenn n gegen ∞ geht* sprechen. Bei Folgen ergibt es sich meist aus dem Zusammenhang, dass man diesen Fall betrachtet. In anderen Zusammenhängen kann aber auch das Verhalten betrachtet werden, wenn sich eine Variable einem gewissen Wert annähert. Was beispielsweise passiert mit dem Wert von $\frac{\sin(x)}{x}$, wenn x sehr sehr klein wird? Hier würde man beispielsweise herausfinden, dass $\frac{\sin(x)}{x}$ gegen 1 konvergiert, wenn x gegen 0 geht, und schreibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \ .$$

Zuletzt betrachten wir noch den Zusammenhang zwischen Häufungspunkten und Konvergenz von Teilfolgen:

Satz 1.49. *Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge. Ein Wert x ist dann und nur dann Häufungspunkt der Folge, wenn eine Teilfolge von $\langle a_n \rangle$ existiert, die gegen x konvergiert.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei $\langle a_{n_k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\langle a_n \rangle$, die gegen x konvergiert. Dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > N$ gilt, dass $|a_n - x| < \epsilon$. Folglich liegen für jedes $\epsilon > 0$ unendlich viele Folgenelemente näher als ϵ bei x, daher ist x ein Häufungspunkt.

„$\Longleftarrow$“: Sei x ein Häufungspunkt von $\langle a_n \rangle$. Wir definieren eine Teilfolge $\langle a_{n_k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ wie folgt: Da x ein Häufungspunkt ist, existieren unendlich viele Folgenelemente mit $|a_n - x| < 1$. Sei n_1 die kleinste natürliche Zahl, sodass $|a_{n_1} - x| < 1$ gilt.

Für alle weiteren $k \in \mathbb{N}$ gilt wieder, dass unendlich viele Folgenelemente mit $|a_n - x| < \frac{1}{k}$ existieren. Insbesondere existieren auch für $n > n_{k-1}$ noch unendlich viele weitere solche Folgenelemente. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei n_k daher die kleinste natürliche Zahl mit $|a_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$ und $n_k > n_{k-1}$.

Die Teilfolge $\langle a_{n_k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, da für jedes $\epsilon > 0$ gilt, dass für alle $k > \frac{1}{\epsilon}$ der Abstand $|a_{n_k} - x| < \epsilon$ ist. □

1.4.2 Rechenregeln für Konvergenzen

Satz 1.50. *Seien $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ zwei Folgen. Die Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiere gegen a und die Folge $\langle b_n \rangle$ konvergiere gegen b.*

Dann konvergieren auch

- *$\langle a_n + b_n \rangle$ gegen $a + b$,*
- *$\langle a_n - b_n \rangle$ gegen $a - b$,*
- *$\langle a_n \cdot b_n \rangle$ gegen $a \cdot b$, und*
- *falls $b \neq 0$ gilt, dann konvergiert $\langle \frac{a_n}{b_n} \rangle$ gegen $\frac{a}{b}$.*

Insbesondere gilt mit der konstanten Folge $a_n = 0$, dass $\langle -b_n \rangle = \langle 0 - b_n \rangle$ gegen $-b$ konvergiert, und mit der konstanten Folge $a_n = 1$, dass $\langle \frac{1}{b_n} \rangle$ für $b \neq 0$ gegen $\frac{1}{b}$ konvergiert.

Sei weiters $\langle c_n \rangle$ eine divergent Folge, dann gilt für Operationen zwischen einer konvergenten und einer divergenten Folge:

- $\langle a_n + c_n \rangle$ *divergiert.*
- $\langle a_n - c_n \rangle$ *divergiert.*
- *Falls $a \neq 0$, dann divergiert $\langle \frac{c_n}{a_n} \rangle$.*
- *Für $\langle a_n \cdot c_n \rangle$ sowie $\langle \frac{a_n}{c_n} \rangle$ und $\langle \frac{c_n}{a_n} \rangle$ ist keine generelle Aussage möglich.*

Seien $\langle c_n \rangle$ und $\langle d_n \rangle$ schließlich zwei divergente Folgen, dann ist über keine der Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) eine generelle Aussage möglich.

Einige Beispiele:

Beispiel 1.51.

- Sei $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$ und $b_n = 5 + \frac{1}{n}$. Die Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiert gegen 2 und die Folge $\langle b_n \rangle$ gegen 5. Daher konvergiert
  - $\langle -\frac{2n+1}{n+3} \rangle$ gegen -2,
  - $\langle \frac{2n+1}{n+3} + 5 + \frac{1}{n} \rangle$ gegen 7,
  - $\langle \frac{2n+1}{n+3} - 5 - \frac{1}{n} \rangle$ gegen -3,
  - $\langle \frac{2n+1}{n+3} \cdot \left(5 + \frac{1}{n}\right) \rangle$ gegen 10, und
  - $\langle \frac{2n+1}{n+3} \cdot \frac{1}{5+\frac{1}{n}} \rangle = \langle \frac{2n+1}{5n+15+1+\frac{3}{n}} \rangle = \langle \frac{2n^2+n}{5n^2+16n+3} \rangle$ gegen $\frac{2}{5}$.
- Sei $a_n = 13 + \frac{1}{n}$ und $c_n = (-1)^n$. Die Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiert also gegen 13, während die Folge $\langle c_n \rangle$ zwei Häufungspunkte bei -1 und 1 hat.
  - $\langle 13 + \frac{1}{n} + (-1)^n \rangle$ hat zwei Häufungspunkte bei 12 und 14, divergiert also.
  - $\langle 13 + \frac{1}{n} - (-1)^n \rangle$ hat zwei Häufungspunkte bei 12 und 14, divergiert also.
  - $\langle \left(13 + \frac{1}{n}\right) \cdot (-1)^n \rangle$ hat zwei Häufungspunkte bei 13 und -13, divergiert also.
  - $\langle \frac{13+\frac{1}{n}}{(-1)^n} \rangle$ hat zwei Häufungspunkte bei 13 und -13, divergiert also.
  - $\langle \frac{(-1)^n}{13+\frac{1}{n}} \rangle$ hat zwei Häufungspunkte bei $\frac{1}{13}$ und $-\frac{1}{13}$, divergiert also.
- Zum Vergleich: Sei $a_n = \frac{1}{n}$ und wieder $c_n = (-1)^n$. Die Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiert also gegen 0, während die Folge $\langle c_n \rangle$ zwei Häufungspunkte bei -1 und 1 hat.
  - $\langle \frac{1}{n} + (-1)^n \rangle$ hat zwei Häufungspunkte bei -1 und 1, divergiert also.
  - $\langle \frac{1}{n} - (-1)^n \rangle$ hat zwei Häufungspunkte bei -1 und 1, divergiert also.
  - $\langle \frac{1}{n} \cdot (-1)^n \rangle$ hat einen Häufungspunkte bei 0, also *konvergiert* sie.
  - $\langle \frac{\frac{1}{n}}{(-1)^n} \rangle$ hat einen Häufungspunkte bei 0, also *konvergiert* sie.
  - $\langle \frac{(-1)^n}{\frac{1}{n}} \rangle$ geht gegen ∞, divergiert also.
- Sei $c_n = (-1)^n$ und $d_n = n$. Beide folgen divergieren also; Die Folge $\langle c_n \rangle$ hat zwei Häufungspunkte bei -1 und 1, während $\langle d_n \rangle$ gegen ∞ geht.
  - $\langle (-1)^n + n \rangle$ geht gegen ∞.
  - $\langle (-1)^n - n \rangle$ geht gegen $-\infty$.
  - $\langle (-1)^n \cdot n \rangle$ hat zwei Häufungspunkte bei ∞ und $-\infty$.
  - $\langle \frac{(-1)^n}{n} \rangle$ *konvergiert* gegen 0.

- $\langle \frac{n}{(-1)^n} \rangle$ hat zwei Häufungspunkte bei ∞ und $-\infty$.

- Sei $c_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ und $d_n = 5 - (-1)^n$. Beide folgen divergieren also; Die Folge $\langle c_n \rangle$ hat zwei Häufungspunkte bei -1 und 1, und die Folge $\langle d_n \rangle$ hat zwei Häufungspunkte bei 4 und 6.
  - $\langle (-1)^n + \frac{1}{n} + 5 - (-1)^n \rangle$ *konvergiert* gegen 5.
  - $\langle (-1)^n + \frac{1}{n} - 5 + (-1)^n \rangle$ hat Häufungspunkte bei 3 und 7, divergiert also.
  - $\langle \big((-1)^n + \frac{1}{n}\big) \cdot (5 - (-1)^n) \rangle$ hat Häufungspunkte bei 4 und -6, divergiert also.
  - $\langle \frac{(-1)^n + \frac{1}{n}}{5-(-1)^n} \rangle$ hat Häufungspunkte bei $\frac{1}{4}$ und $-\frac{1}{6}$, divergiert also.
  - $\langle \frac{5-(-1)^n}{(-1)^n + \frac{1}{n}} \rangle$ hat Häufungspunkte bei 4 und -6, divergiert also.

- Sei $c_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ und $d_n = -(-1)^n$. Beide folgen divergieren also, da sie jeweils zwei Häufungspunkte bei -1 und 1 haben.
  - $\langle (-1)^n - (-1)^n \rangle$ *konvergiert* gegen 0.
  - $\langle (-1)^n + (-1)^n \rangle$ hat Häufungspunkte bei -2 und 2, divergiert also.
  - $\langle (-1)^n \cdot (-(-1)^n) \rangle$ *konvergiert* gegen -1.
  - $\langle \frac{(-1)^n}{-(-1)^n} \rangle$ *konvergiert* gegen -1.
  - $\langle \frac{-(-1)^n}{(-1)^n} \rangle$ *konvergiert* gegen -1.

Satz 1.52. *Sei a_n ein Polynom vom Grad k, und sei p_k der Koeffizient der höchsten vorkommenden Potenz. Falls a_n ein konstantes Polynom ist (also $k = 0$), konvergiert die Folge $\langle a_n \rangle$ gegen diese Konstante. Andernfalls gilt: Falls $p_k > 0$ ist, so geht die Folge gegen ∞, falls $p_k < 0$ ist, so geht sie gegen $-\infty$. (Der Fall $p_k = 0$ kann nicht auftreten, da p_k per definitionem ja der Koeffizient der höchsten* vorkommenden *Potenz ist.)*

Beweis. Dass ein konstantes Polynom gegen diese Konstante konvergiert, ist offensichtlich. Andernfalls heben wir die höchste Potenz n^k heraus und erhalten:

$$\begin{aligned} a_n &= p_k n^k + p_{k-1} n^{k-1} + p_{k-2} n^{k-2} + \cdots + p_2 n^2 + p_1 n + p_0 \\ &= n^k \cdot \left(p_k + \frac{p_{k-1}}{n} + \frac{p_{k-2}}{n^2} + \cdots + \frac{p_2}{n^{k-2}} + \frac{p_1}{n^{k-1}} + \frac{p_2}{n^k} \right) \end{aligned}$$

Da im rechten Term alle Summanden der Form $\frac{p_x}{n^y}$ gegen 0 gehen wenn n gegen ∞ geht, geht der gesamte Term gegen p_k.

Sei p_k positiv. Für ausreichend große n ist der rechte Term mindestens $\frac{p_k}{2}$, und das Produkt somit mindestens $n \cdot \frac{p_k}{2}$. Somit geht das Produkt gegen ∞.

Für negatives p_k ist der rechte Term für ausreichend große n kleiner als $\frac{p_k}{2} = -|\frac{p_k}{2}|$, und das Produkt geht gegen $-\infty$. □

Satz 1.53. *Sei a_n eine rationale Funktion, d.h.*

$$a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

wobei $P(n)$ und $Q(n)$ Polynome sind. Der Grad eines Polynoms P ist die höchste vorkommende Potenz und wird manchmal als $Grad(P)$ angeschrieben. Seien p_0 und q_0 die Koeffizienten der jeweils höchsten vorkommenden Potenz in P und Q. Es gilt:

- *Wenn $Grad(P) > Grad(Q)$, dann divergiert die Folge.*
- *Wenn $Grad(P) < Grad(Q)$, dann konvergiert die Folge gegen 0.*
- *Wenn $Grad(P) = Grad(Q)$, dann konvergiert die Folge gegen $\frac{p_0}{q_0}$.*

Beweis. Sei $m = Grad(P)$ und $k = Grad(Q)$. Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{P(n)}{Q(n)} \\ &= \frac{p_0 n^m + p_1 n^{m-1} + p_2 n^{m-2} + \cdots + p_{m-2} n^2 + p_{m-1} n + p_m}{q_0 n^k + q_1 n^{k-1} + q_2 n^{k-2} + \cdots + q_{k-2} n^2 + q_{k-1} n + q_k} \\ &= \frac{p_0 n^{m-k} + p_1 n^{m-k-1} + p_2 n^{m-k-2} + \cdots + p_{m-2} n^{2-k} + p_{m-1} n^{1-k} + p_m n^{-k}}{q_0 + q_1 n^{-1} + q_2 n^{-2} + \cdots + q_{k-2} n^{2-k} + q_{k-1} n^{1-k} + q_k n^{-k}} \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Nenner und Zähler durch n^k dividiert haben.

Zunächst beobachten wir, dass $\frac{c}{n^d}$ für jede Konstante c und jede positive ganze Zahl d gegen 0 geht.

Für den neuen Nenner N gilt daher:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} N &= \lim_{n\to\infty} \left(q_0 + q_1 n^{-1} + q_2 n^{-2} + \cdots + q_{k-2} n^{2-k} + q_{k-1} n^{1-k} + q_k n^{-k}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(q_0 + \frac{q_1}{n} + \frac{q_2}{n^2} + \cdots + \frac{q_{k-2}}{n^{k-2}} + \frac{q_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{q_k}{n^k}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} (q_0) + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{q_1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{q_2}{n^2}\right) + \cdots + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{q_{k-2}}{n^{k-2}}\right) + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{q_{k-1}}{n^{k-1}}\right) + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{q_k}{n^k}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} (q_0) + 0 + 0 + \cdots + 0 + 0 + 0 \\ &= q_0 \end{aligned}$$

Der Zähler konvergiert also gegen q_0.

Für den neuen Zähler Z mit der Form

$$Z = p_0 n^{m-k} + p_1 n^{m-k-1} + p_2 n^{m-k-2} + \cdots + p_{m-2} n^{2-k} + p_{m-1} n^{1-k} + p_m n^{-k}$$

haben wir drei Fälle zu unterscheiden:

- Falls $m < k$, dann haben alle Potenzen von n negative Hochzahlen, also konvergieren alle Summanden gegen 0. Der Nenner geht daher gegen 0, und der Quotient daher ebenfalls gegen 0.
- Falls $m = k$, dann haben alle Potenzen von n negative Hochzahlen bis auf $p_0 n^{m-k} = p_0 n^{m-m} = p_0 n^0 = p_0$. Dieser eine Summand konvergiert daher gegen p_0, alle anderen gegen 0. Der Nenner geht daher gegen p_0, und der Quotient daher gegen $\frac{p_0}{q_0}$.
- Falls $m > k$, dann haben einige Potenzen von n positive Hochzahlen, der Rest hat 0 als Hochzahl oder negative Hochzahlen. Der Teil mit negativen Hochzahlen konvergiert gegen 0, und ein eventuell vorhandener Summand mit 0 als Hochzahl ist eine Konstante und somit konvergent. Das verbleibende Polynom (bestehend aus den Potenzen mit positiven Hochzahlen) geht gemäß Satz 1.52 gegen ∞ oder $-\infty$. Daher divergiert der Zähler, und damit auch der Quotient.

□

Zur Demonstration an Hand einiger Beispiele:

Beispiel 1.54.

- Für $a_n = \frac{5n^2-3n+2}{7n^2+732}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-3n+2}{7n^2+732} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{7+\frac{732}{n^2}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(7+\frac{732}{n^2}\right)} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}5-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}7+\lim_{n\to\infty}\frac{732}{n^2}} \\
&= \frac{5-0+0}{7+0} \\
&= \frac{5}{7}
\end{aligned}$$

- Für $a_n = \frac{5n^2-3n+2}{7n^3+732}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-3n+2}{7n^3+732} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{7+\frac{732}{n^3}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(7+\frac{732}{n^3}\right)} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}}{\lim_{n\to\infty}7+\lim_{n\to\infty}\frac{732}{n^3}} \\
&= \frac{0-0+0}{7+0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

- Für $a_n = \frac{5n^2-3n+2}{7n+732}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-3n+2}{7n+732} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5n-3+\frac{2}{n}}{7+\frac{732}{n}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(5n-3+\frac{2}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(7+\frac{732}{n}\right)} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}5n-\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{\lim_{n\to\infty}7+\lim_{n\to\infty}\frac{732}{n}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}5n-3+0}{7+0} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Satz 1.55. *Habe a_n die Form $a_n = q^n, q \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

- *Ist $|q| > 1$, divergiert die Folge.*
- *Ist $|q| < 1$, dann konvergiert die Folge gegen 0.*
- *Ist $q = 1$, dann konvergiert die Folge gegen 1.*
- *Ist $q = -1$, dann divergiert die Folge.*

Beweis. Für $q > 1$ werden die Werte q^n beliebig groß, die Folge geht daher gegen ∞.

Für $q = 1$ ist die Folge konstant 1.

Für $-1 < q < 1$ geht die Folge gegen 0, da q^n für ausreichend große Werte von q beliebig klein wird.

Für $q = -1$ hat die Folge zwei Häufungspunkte bei -1 und 1, divergiert also.

Für $q < -1$ werden die Werte q^n für gerade n beliebig groß und für ungerade n beliebig klein. Die Folge hat daher zwei Häufungspunkte bei ∞ und $-\infty$. □

1.4.3 Monotonie und Beschränktheit $\Longrightarrow$ Konvergenz

Kennen wir von einer Folge die explizite Darstellung, so lässt sich das Konvergenzverhalten meist aus dieser ableiten. Ist hingegen nur die Rekursionsgleichung bekannt, gestaltet sich die Sache schon etwas schwieriger. Wir wollen nun eine Methode betrachten, die bei manchen dieser Gleichungen zielführend sein kann: Liegt eine (nicht notwendigerweise lineare) Rekursion erster Ordnung vor (d.h. $a_{n+1} = r(a_n)$ für eine beliebige *stetigen* Funktion $r(x)$), so kann man versuchen, zunächst zu beweisen, dass die Folge überhaupt konvergiert. Danach suchen wir sogenannte Fixpunkte (also Punkte, in denen $r(x) = x$ gilt), da bekannt ist, dass die Folge gegen einen dieser Fixpunkte streben muss. Schließlich bleibt noch zu bestimmen, welcher der Fixpunkte der Grenzwert ist.

Zunächst benötigen wir die Definitionen von Monotonie und Beschränktheit:

Definition 1.56. *Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt* monoton steigend*, wenn aus $n > m$ folgt, dass $a_n \geq a_m$. Ist die Ungleichung strikt, d.h. $a_n > a_m$, so sagt man, dass die Folge* streng monoton steigend *ist.*

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt monoton fallend*, wenn aus $n > m$ folgt, dass $a_n \leq a_m$. Ist die Ungleichung strikt, d.h. $a_n < a_m$, so sagt man, dass die Folge* streng monoton fallend *ist.*

Definition 1.57. *Eine Folge heißt* nach oben beschränkt*, wenn eine obere Schranke existiert, die von keinem Folgenelement überschritten wird, i.e., wenn eine Schranke $s \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $a_n \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Eine Folge heißt nach unten beschränkt*, wenn eine untere Schranke existiert, die von keinem Folgenelement unterschritten wird, i.e., wenn eine Schranke $s \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $a_n \geq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Eine Folge heißt beschränkt*, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.*

Wir können einige wichtige Beobachtungen über die Zusammenhänge zwischen Konvergenz und Beschränktheit machen:

Satz 1.58. *Sei $\langle a_n \rangle$ eine konvergente Folge reeller Zahlen, dann ist $\langle a_n \rangle$ beschränkt.*

Beweis. Sei a der Grenzwert der Folge. Wir wählen $\epsilon = 1$. Nach der Definition von Konvergenz existiert ein N, sodass für alle $n > N$ gilt, dass $|a_n - a| < 1$. Für $n > N$ gilt daher $a_n < a + 1$. Für die endlich vielen kleineren Werte berechnen wir $M = \max(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N)$. Da jeder dieser Werte endlich ist und das Maximum endlich vieler Werte betrachtet wird, ist auch M eine reelle Zahl. Somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $a_n \leq \max(M, a + 1)$.

Analog können wir mit $M' = \min(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N)$ zeigen, dass $a_n \geq \min(M', a - 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. □

Satz 1.59 (Satz von Bolzano-Weierstraß)**.** *Sei die Folge $\langle a_n \rangle$ beschränkt, dann hat die Folge mindestens einen Häufungspunkt, und alle Häufungspunkte der Folge sind endlich.*

Beweis. Dass $-\infty$ und ∞ nicht Häufungspunkte der Folge sein können, folgt sofort aus der Beschränktheit und der Definition unendlicher Häufungspunkte.

Sei A die untere und B die obere Grenze der Folge $\langle a_n \rangle$, d.h. alle Folgenelemente sind im Intervall $[A, B]$ enthalten.

Wir setzen $A_0 = A$ und $B_0 = B$. Sei $C_0 = \frac{A_0+B_0}{2}$ der Mittelpunkt des Intervalls. Da $[A_0, B_0]$ unendlich viele Folgenelemente enthält, muss mindestens eines der beiden Intervalle $[A_0, C_0]$ und $[C_0, B_0]$ ebenfalls unendlich viele Folgenelemente enthalten. Falls $[A_0, C_0]$ unendlich viele Punkte enthält, setzen wir $A_1 = A_0$ und $B_1 = C_0$, andernfalls $A_1 = C_0$ und $B_1 = B_0$. Somit enthält das Intervall $[A_1, B_1]$ wieder unendlich viele Folgenelemente.

Wir setzen dies auf die gleiche Weise iterativ fort: Das Intervall $[A_n, B_n]$ enthalte unendlich viele Folgenelemente. Sei $C_n = \frac{A_n+B_n}{2}$ der Mittelpunkt des Intervalls. Da $[A_n, B_n]$ unendlich viele Folgenelemente enthält, muss mindestens eines der beiden Intervalle $[A_n, C_n]$ und $[C_n, B_n]$ ebenfalls unendlich viele Folgenelemente enthalten. Falls $[A_n, C_n]$ unendlich viele Punkte enthält, setzen wir $A_{n+1} = A_n$ und $B_{n+1} = C_n$, andernfalls $A_{n+1} = C_n$ und $B_{n+1} = B_n$. Somit enthält das Intervall $[A_{n+1}, B_{n+1}]$ wieder unendlich viele Folgenelemente.

Somit erhalten wir eine unendliche Folge von ineinander verschachtelten Intervallen $[A_i, B_i]$, von denen jedes halb so lang ist wie das vorhergehende. Da die Länge der Intervalle gegen 0 geht, existiert daher genau eine reelle Zahl, die in allen Intervallen enthalten ist; Dies folgt aus einer der möglichen Konstruktionen der reellen Zahlen, auf die hier nicht näher eingegangen wird. Sei also x diejenige reelle Zahl, sodass $x \in [A_i, B_i]$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.

Dann ist x Häufungspunkt der Folge, da für jedes ϵ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass das Intervall $[A_N, B_N]$ kürzer als ϵ ist. Somit liegen im Intervall $[A_N, B_N]$ unendlich viele Folgenelemente, die alle höchstens ϵ von x entfernt sind (da sich ja auch x innerhalb dieses Intervalls befindet). □

Satz 1.60. *Sei die Folge $\langle a_n \rangle$ monoton steigend (fallend) und nach oben (unten) beschränkt. Dann konvergiert die Folge.*

Beweis. Sei $\langle a_n \rangle$ nach oben beschränkt und monoton steigend. Wegen $a_n \geq a_{n-1} \geq a_{n-2} \geq \cdots \geq a_2 \geq a_1 \geq a_0$, also $a_n \geq a_0$ für alle n, ist die Folge auch nach unten beschränkt. Somit besitzt sie nach Satz 1.59 mindestens einen Häufungspunkt.

Nehmen wir an, die Folge würde zwei (oder mehr) Häufungspunkte besitzen; Seien x und y zwei verschiedene Häufungspunkte, und sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $y > x$. Wir wollen zeigen, dass die Folgenelemente auf Grund der Monotonie für ausreichend kleine ϵ nicht mehr zwischen den beiden Häufungspunkten „hin- und herspringen“ können. Sei daher weiters $\epsilon = \frac{y-x}{4}$.

Sei a_N ein Folgenelement mit $|a_N - y| < \epsilon$. Da auch x ein Häufungspunkt ist, muss ein $N' > N$ existieren mit $|a_{N'} - x| < \epsilon$.

Nun gilt aber

$$a_{N'} - a_N < (x + \epsilon) - (y - \epsilon) = x - y + 2\epsilon = x - y + 2 \cdot \frac{y-x}{4} = \frac{x-y}{2} < 0 \ ,$$

ein Widerspruch zur vorausgesetzten Monotonie. □

Achtung. Die Umkehrung stimmt nicht. Eine Folge kann konvergent sein, ohne monoton zu sein. Die Folge $a_n = (-0.5)^n$ beispielsweise springt hin und her zwischen positiven und negativen Werten, konvergiert aber trotzdem gegen 0.

Definition 1.61. *Ein* Fixpunkt *einer Funktion $r(x)$ ist ein Wert a, für den gilt, dass $a = r(a)$.*

Bevor wir uns dem zentralen Satz dieses Abschnittes zuwenden, zur Wiederholung noch einmal die Definition von Stetigkeit:

Definition 1.62. *Eine Funktion $f(x)$ heißt* stetig *in a, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle b mit $|b - a| < \delta$ folgt, dass $|f(b) - f(a)| < \epsilon$.*

Eine Funktion heißt stetig*, wenn sie in jedem Punkt stetig ist.*

Eine äquivalente Definition lautet wie folgt:

Definition 1.63. *Eine Funktion $f(x)$ heißt* stetig *in a, wenn für jede Folge $\langle x_n \rangle$, die gegen x konvergiert, auch $\langle f(x_n) \rangle$ gegen $f(x)$ konvergiert.*

Eine Funktion heißt stetig*, wenn sie in jedem Punkt stetig ist.*

Hinweis. Informell kann man sagen, dass eine Funktion stetig ist, wenn man sie als durchgehende Linie zeichnen kann, bzw. wenn sie keine Sprungstellen hat.

Satz 1.64. *Sei $r(x)$ eine* stetige *Funktion, und sei $\langle a_n \rangle$ mit $a_{n+1} = r(a_n)$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Dann ist dieser Grenzwert a ein Fixpunkt von $r(x)$.*

Beweis. Da $\langle a_n \rangle$ gegen a konvergiert und die Funktion $r(x)$ stetig ist, muss auch $\langle f(a_n) \rangle$ gegen $f(a)$ konvergieren. Nehmen wir an, a wäre kein Fixpunkt, d.h. $r(a) = a+d$ mit $d \neq 0$. Sei $\delta = |d|$. Wegen der Konvergenz von $\langle a_n \rangle$ muss ab einem N' gelten, dass $|a_n - a| < \frac{\delta}{4}$ für alle $n \geq N'$, und wegen der Konvergenz von $\langle f(a_n) \rangle$ gilt ab einem N'', dass $abs f(a_n) - f(a) < \frac{\delta}{4}$ für alle $n \geq N''$.

Für $N = \max(N', N'')$ gelten daher beide Abstandsbedingungen für alle $n \geq N$. Insbesondere gilt dann $|a_{N+1} - a| < \frac{\delta}{4}$. Umgekehrt gilt aber auch $|f(a_N) - f(a)| = |a_{N+1} - (a+d)| = |a_{N+1} - a - d| < \frac{\delta}{4}$. Damit würde wegen der Dreiecksungleichung aber gelten $\delta = |d| = |d + a - a_{N+1} - a + a_{N+1}| \leq |d + a - a_{N+1}| + |a_{N+1} - a| < frac\delta 4 + \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2}$, was für $\delta > 0$ nicht erfüllt sein kann. □

Daraus ergibt sich die folgende Methode:

Methode 1.65.

0. *Die Rekursionsformel genügt der Form $a_{n+1} = r(a_n)$ mit einer stetigen Funktion $r(x)$.*
1. *Man beweise, dass die Folge für den gegebenen Startwert monoton steigend (fallend) und nach oben (unten) beschränkt ist.*
2. *Man bestimme die Fixpunkte, indem man für a_{n+1} und jedes a_n eine noch zu bestimmende Konstante c einsetzt, und löse die entstehende Gleichung nach c.*
3. *Man bestimme, welcher der Fixpunkte der Grenzwert der Folge ist.*

Beispiel 1.66. Man bestimme den Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n}$ und $a_1 = 1$.

Lösung. Wir zeigen zunächst **Beschränktheit:**
Vermutung: $n \leq 4$. Wir beweisen dies durch vollständige Induktion:

- Basis: $a_1 = 1 \leq 4$
- Annahme: Es gilt $a_k \leq 4$ für $k = 1, \ldots, n$.
- Schritt: Wir wollen zeigen, dass auch $a_{n+1} \leq 4$ gelten muss, was mit $a_{N+1} = \sqrt{12 + a_N} \leq \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$ leicht gezeigt ist.

Nun zeigen wir **Monotonie:**
Vermutung: Die Folge ist monoton steigend. Beweis der Vermutung:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\overset{!}{\geq} a_n \\ \sqrt{12 + a_n} &\overset{!}{\geq} a_n \qquad /^2 \qquad \text{(Äquivalenzumformung da } a_n \geq 0) \\ 12 + a_n &\overset{!}{\geq} a_n^2 \\ -a_n^2 + a_n + 12 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $a_n \in [-3, 4]$. Dies gilt für alle Folgenglieder, da die obere Schranke von 4 bereits bewiesen wurde, und aus der Definition sofort ersichtlich ist, dass alle Folgenelemente positiv sind.

Da die Folge monoton steigend und nach oben beschränkt ist, konvergiert sie. Nun gilt es nur noch, den Grenzwert zu finden. Dazu bestimmen wir zunächst alle Fixpunkte, indem wir in der Rekursionsgleichung Folgenelemente durch ein konstantes c ersetzen:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{12+c} \qquad \Big/^2 \\ c^2 &= 12+c \end{aligned}$$

Lösen dieser quadratischen Gleichung ergibt:

$$c_1 = 4, c_2 = -3$$

Nur 4 ist tatsächlich ein Fixpunkt von $f(x) = \sqrt{12+x}$. Die Folge konvergiert daher gegen 4. □

Eine Frage ist noch offen: Woher kam die anfängliche Vermutung, $a_n \leq 4$? Einerseits kann man einfach die ersten Werte berechnen und dann raten. Für diese Folge sind die ersten fünf Werte (gerundet) $1, 3.6, 3.95, 3.994, 3.999$. Der Schluss liegt nahe.

Oft kann es aber wesentlich einfacher sein, **zuerst** die Fixpunkte zu bestimmen und daraus Rückschlüsse über die Folge zu ziehen. Achtung: Sowas ist zur Untersuchung der Folge auf dem Konzeptpapier erlaubt, aber kein mathematischer Beweis.

Weiters ist zu beachten, dass nicht jeder Fixpunkt automatisch Grenzwert ist:

Beispiel 1.67. Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge mit $a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 3$ und $a_1 = 1$. Wir bestimmen die Fixpunkte:

$$\begin{aligned} c &= 2 \cdot c + 3 \\ c &= -3 \end{aligned}$$

Obwohl die Folge monoton ist und die Rekursionsformel einen Fixpunkt besitzt, ist die Folge aber divergent!

Allerdings können wir uns Satz 1.64 hier auf andere Weise zu Nutze machen: Nehmen wir an, die Folge würde konvergieren, dann müsste sie gegen einen Fixpunkt konvergieren, also gegen -3, da dies der einzige Fixpunkt ist. Allerdings sehen wir sofort, dass alle Folgenelemente positiv sein müssen. Somit ist sofort gezeigt, dass die Folge divergent ist.

Hinweis. Eine Folge muss nicht notwendigerweise gegen den „nächsten“ Fixpunkt konvergieren, d.h. eine monoton steigende Folge mit Startwert 1 und mit Fixpunkten 5 und 10 kann durchaus gegen 10 konvergieren.

Um Konvergenz zu zeigen, können wir im Falle eines Falles auch auf ein weiteres Konvergenzkriterium zurückgreifen:

Satz 1.68. *Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge und gelte ab einem gewissen Index N, dass $|a_{n+1} - a| \leq C \cdot |a_n - a|$ mit einer Konstanten $0 < C < 1$, so konvergiert die Folge gegen a. Man spricht hier auch von* LINEARER KONVERGENZ.

Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge und gelte ab einem gewissen Index N, dass $|a_{n+1} - a| \leq C \cdot |a_n - a|^p$ mit $p > 1$ und einer beliebigen Konstanten C, so konvergiert die Folge ebenfalls gegen a. Für $p = 2$ beispielsweise nennt man dies QUADRATISCHE KONVERGENZ, *allgemein spricht man von* KONVERGENZ p-TER ORDNUNG.

Beispiel 1.69. Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge mit $a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n}$. Man betrachte das Verhalten der Folge für die Startwerte 10, 1, -0.5, -1, -2 und -3, und bestimme allgemein das Konvergenzverhalten für Startwerte $a_1 > 0$.

Zunächst berechnen wir die Fixpunkte von $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$:

$$\begin{aligned} x &\overset{!}{=} f(x) \\ x &\overset{!}{=} 1 + \frac{2}{x} && \Big/ \cdot x \\ x^2 &\overset{!}{=} x + 2 && \Big/ - x - 2 \\ x^2 - x - 2 &\overset{!}{=} 0 \\ (x+1)(x-2) &\overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Die beiden Fixpunkte sind daher -1 und 2. Sollte es einen Grenzwert geben, kommt somit nur -1 oder 2 dafür in Frage.

Wir sehen durch Ausrechnen der ersten Elemente schnell, dass die Folge nicht monoton ist. Eventuell können wir für Folgenglieder in einem gewissen Bereich aber zeigen, dass der Abstand zu dem vermuteten Grenzwert 2 immer kleiner wird:

$$\begin{aligned} & |f(x) - 2| \leq C \cdot |x - 2| \\ \iff\quad & |1 + \frac{2}{x} - 2| \leq C \cdot |x - 2| \\ \iff\quad & |\frac{2}{x} - 1| \leq C \cdot |x - 2| \end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst das Konvergenzverhalten für den Fall $x \geq 2$:

$$\begin{aligned} & |\frac{2}{x} - 1| \leq C \cdot |x - 2| \\ \iff\quad & 1 - \frac{2}{x} \leq C \cdot x - 2C && \Big/ \cdot x > 0 \\ \iff\quad & x - 2 \leq C \cdot x^2 - 2C \cdot x \\ \iff\quad & 0 \leq C \cdot x^2 - (2C + 1) \cdot x + 2 \\ x_{1,2} &= \frac{2C + 1 \pm \sqrt{4C^2 + 4C + 1 - 8C}}{2C} \\ &= \frac{2C + 1 \pm \sqrt{(2C - 1)^2}}{2C} \\ &= \frac{2C + 1 \pm (2C - 1)}{2C} \\ &= \{2, \frac{1}{C}\} \end{aligned}$$

Die Ungleichung gilt somit für alle x außerhalb des Bereiches $\left(\frac{1}{C}, 2\right)$, also insbesondere für alle x im Bereich $[2, \infty)$. Für $C = \frac{100}{101}$ beispielsweise gilt somit im Bereich $[2, \infty)$, dass $|a_{n+1} - a| < \frac{100}{101} \cdot |a_n - a|$.

Betrachten wir weiters den Fall $0 < x < 2$:

$$\begin{aligned} & |\frac{2}{x} - 1| \leq C \cdot |x - 2| \\ \iff\quad & \frac{2}{x} - 1 \leq 2C - C \cdot x && \Big/ \cdot x > 0 \\ \iff\quad & 2 - x \leq 2C \cdot x - C \cdot x^2 \\ \iff\quad & 0 \leq -C \cdot x^2 + (2C + 1) \cdot x - 2 \\ x_{1,2} &= \{2, \frac{1}{C}\} \end{aligned}$$

Für $C = \frac{100}{101}$ gilt im Bereich $\left[\frac{101}{100}, 2\right] = [1.01, 2]$, dass $|a_{n+1} - a| < \frac{100}{101} \cdot |a_n - a|$.

Insgesamt ist also für alle $x \in [1.01, \infty]$ das nächste Folgenelement näher bei 2 als das vorhergehende. Sobald wir also beispielsweise ein $a_i \in [1.01, 2.99]$ finden, nähert sich die Folge in jedem weiteren Schritt mehr an 2 an, da sie nach jedem Schritt sicher immer noch innerhalb des Bereiches $[1.01, 2.99]$ befindet.

Betrachten wir nun die ersten Folgenelemente für jeden Startwert:

- Mit $a_1 = 10$ erhalten wir $a_2 = 1.2$, also $a_2 \in [1.01, 2.99]$. Ab dort konvergiert die Folge also gegen 2.
- Mit $a_1 = 1$ ist der Startwert bereits im Intervall $[1.01, 2.99]$, also konvergiert die Folge ebenfalls gegen 2.
- Mit $a_1 = -0.5$ erhalten wir $a_2 = -3$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = 7$ und $a_5 = \frac{9}{7}$. Wiederum konvergiert die Folge ab dort gegen 2.
- Mit $a_1 = -1$ erhalten wir $a_2 = -1$ und somit natürlich weiters $a_n = -1$ für alle n. Die Folge konvergiert daher gegen -1.
- Mit $a_1 = -2$ erhalten wir $a_2 = 0$, also ist a_3 als Division durch 0 nicht eindeutig definiert.
- Mit $a_1 = -3$ ist bereits in der Folge mit dem Startwert -0.5 aufgetreten und verhält sich ab dort natürlich gleich, konvergiert also ebenfalls gegen 2.

Für einen beliebigen Startwert $a_1 > 0$ haben wir folgende Fälle zu betrachten:

- $1 < a_1 < 1.01$. Wir stellen fest, dass unser C rein willkürlich gewählt war; Hätten wir beispielsweise $C = \frac{1000000}{1000001}$ gewählt, könnten wir damit zeigen, dass die Folge für alle Startwerte im Bereich $[1.000001, 2.999999]$ gegen 2 konvergiert. Wir finden daher sicher einen Wert C, mit dem $a_1 \geq \frac{1}{C}$ gilt, und die Konvergenz somit bewiesen ist.
- $1.01 \leq a_1 \leq 2.99$. Dann folgt die Konvergenz gegen 2 wie oben gezeigt.
- $2.99 < a_1$. Dann gilt $a_2 = 1 + \frac{1}{a_1} < 2$ und $a_2 = 1 + \frac{1}{a_1} > 1$. Somit ist die Konvergenz mit dem zweiten Element als neuem Startwert bereits in den beiden vorigen Fällen gezeigt.
- $0 < a_1 \leq 1$. Dann ist $a_2 \geq 3$, also folgt die Konvergenz gegen 2 aus einem bereits gezeigten Fall.

Kapitel 2

Reihen

2.1 Einleitung

Als Reihe bezeichnet man die Folge, die entsteht, wenn man jeweils die ersten Elemente einer anderen Folge addiert:

Definition 2.1. *Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge. Dann nennt man die Folge $\langle S_n \rangle$ mit*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

die dazugehörige Reihe.

Meist interessiert uns der Grenzwert dieser Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Definition 2.2. *Falls $\langle S_n \rangle$ divergiert, so sagt man, dass die* Reihe divergiert*. Falls $\langle S_n \rangle$ konvergiert, spricht man von einer* konvergenten Reihe*.*

2.2 Wichtige Sätze

Satz 2.3. *Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, dann konvergiert $\langle a_n \rangle$ gegen 0.*

Beweis. Nehmen wir an, $\langle a_n \rangle$ würde gegen ein $a \neq 0$ konvergieren. Sei $a > 0$, dann gilt ab einem $N \in \mathbb{N}$, dass $|a_n - a| < \frac{a}{2}$, und somit $a_n > \frac{a}{2}$ für alle $n \geq N$. Für die Folge $\langle S_n \rangle$ und $n > N$ gilt daher

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k \\ &= \sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} a_k \\ &\geq \sum_{k=0}^{N} a_k + (n - N - 1) \cdot \frac{a}{2} \\ &= \sum_{k=0}^{N} a_k - (N+1) \cdot \frac{a}{2} + n \cdot \frac{a}{2} \\ &= C + n \cdot \frac{a}{2} \end{aligned}$$

mit einer Konstante C. Somit wird S_n beliebig groß, geht also gegen ∞. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\langle S_n \rangle$ konvergiert.

Auf ähnliche Weise kann gezeigt werden, dass $\langle S_n \rangle$ für $a < 0$ gegen $-\infty$ gehen würde. □

Korollar 2.4. *Konvergiert $\langle a_n \rangle$ gegen $c \neq 0$, dann divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Satz 2.5. *Für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ gilt:*

- *Falls $\alpha > 1$ konvergiert die Reihe.*
- *Falls $\alpha \leq 1$ divergiert die Reihe.*

Satz 2.6 (Majoranten- und Minorantenkriterium)**.** *Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge, und sei $\langle b_n \rangle$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $b_n \geq |a_n|$ für alle n. Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$.*

Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge, und sei $\langle c_n \rangle$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $c_n \leq a_n$ für alle n. Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} c_n$ divergiert, dann divergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$.

Satz 2.7 (Quotientenkriterium)**.** *Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle n. Gibt es einen Index N und ein $q < 1$, sodass für alle $n > N$ gilt, dass $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$.*

Gibt es dagegen einen Index N, sodass für alle $n > N$ gilt, dass $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$, so ist die Reihe divergent.

Sollte keiner der beiden Fälle eintreten, so kann keine Aussage getroffen werden.

Satz 2.8 (Wurzelkriterium)**.** *Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle n. Gibt es einen Index N und ein $C < 1$, sodass für alle $n > N$ gilt, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq C$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$.*

Ist hingegen $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, so ist die Reihe divergent.

Sollte keiner der beiden Fälle eintreten, so kann keine Aussage getroffen werden.

Hinweis. Im Fall der Konvergenz muss q von n unabhängig und echt kleiner als 1 sein, andernfalls liefert das Quotientenkriterium keine Aussage über die Konvergenz oder die Divergenz.

Satz 2.9 (Leibniz-Kriterium)**.** *Sei $\langle a_n \rangle$ eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$.*

Satz 2.10 (Cauchysches Verdichtungskriterium)**.** *Sei $\langle a_n \rangle$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen, dann hat die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ das gleiche Konvergenzverhalten wie die „verdichtete“ Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.*

2.3 Arithmetische Reihen

Definition 2.11. *Die zu einer arithmetischen Folge gehörende Reihe bezeichnet man als* ARITHMETISCHE REIHE.

Für die arithmetische Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = n$ berechnet sich die Summe der ersten n Elemente bekanntlich wie folgt:

Satz 2.12.

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N \cdot (N+1)}{2}$$

Beweis. Wir zeigen dies durch vollständige Induktion:

- Basis: $\sum_{n=1}^{1} n = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.
- Annahme: Es gilt $\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N \cdot (N+1)}{2}$ für ein $N \in \mathbb{N}$.
- Schritt: Wir wollen zeigen, dass auch $\sum_{n=1}^{N+1} n = \frac{(N+1) \cdot (N+2)}{2}$ gelten muss:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N+1} n &= \sum_{n=1}^{N} n + (N+1) \\
&\overset{\text{I.A.}}{=} \frac{N \cdot (N+1)}{2} + (N+1) \\
&= \frac{N \cdot (N+1) + 2 \cdot (N+1)}{2} \\
&= \frac{(N+1)(N+2)}{2}
\end{aligned}$$

□

Für die Summe der Folgenelemente einer allgemeinen arithmetischen Reihe gilt entsprechend:

Satz 2.13. *Sei $\langle a_n \rangle$ eine arithmetische Folge mit $a_n = a_0 + n \cdot d$.*

- *Für die Summe endlich vieler Folgenelemente gilt:*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_n &= a_0 + a_0 + d + a_0 + 2 \cdot d + \cdots + a_0 + N \cdot d \\ &= (N+1) \cdot a_0 + d \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + N) \\ &= (N+1) \cdot a_0 + d \cdot \frac{N \cdot (N+1)}{2}\end{aligned}$$

- *Der Grenzwert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert dann und nur dann, wenn $a_0 = d = 0$.*

2.4 Geometrische Reihen

Definition 2.14. *Die zu einer geometrischen Folge gehörende Reihe bezeichnet man als* GEOMETRISCHE REIHE.

Für die geometrische Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = q^n$ berechnet sich die Summe der ersten n Elemente bekanntlich wie folgt:

Satz 2.15.

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \qquad \text{für } q \neq 1$$

Beweis. Wir zeigen dies durch vollständige Induktion:

- Basis: $\sum_{n=0}^{0} q^n = q^0 = 1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$.
- Annahme: Es gilt $\sum n = 0^N q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ für ein $N \in \mathbb{N}$.
- Schritt: Wir wollen zeigen, dass auch $\sum n = 0^{N+1} q^n = \frac{1-q^{N+2}}{1-q}$ gelten muss:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N+1} q^n &= \sum n = 0^N q^n + q^{N+1} \\ &\overset{\text{I.A.}}{=} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} + q^{N+1} \\ &= \frac{1 - q^{N+1} + q^{N+1} - q^{N+2}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{N+2}}{1 - q}\end{aligned}$$

□

Für die Summe der Folgenelemente einer allgemeinen geometrischen Reihe gilt entsprechend:

Satz 2.16. *Sei $\langle a_n \rangle$ eine geometrische Folge mit $a_n = a_0 \cdot q^n$ und $q \neq 1$. Dann gilt:*

- *Für die Summe endlich vieler Folgenelemente gilt:*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_n &= a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + \cdots + a0 \cdot q^N \\ &= a_0 \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^N) \\ &= a_0 \cdot \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \qquad \textit{für } q \neq 1\end{aligned}$$

- *Der Grenzwert erfüllt* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 \cdot \frac{1}{1-q}$ *für* $|q| < 1$*, andernfalls ist die Reihe divergent.*

2.5 Harmonische Reihe

Definition 2.17. *Die zu einer harmonischen Folge gehörende Reihe bezeichnet man als* HARMONISCHE REIHE.

Die wichtigsteBeobachtung zu harmonischen Reihen:

Satz 2.18. *Die harmonische Reihe zur Folge* $\langle a_n \rangle$ *mit* $a_n = \frac{1}{n}$ *divergiert.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}S_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2^k} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + \cdots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot k\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit werden die Folgenelemente von $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ beliebig groß, daher divergiert die Reihe. ☐

Kapitel 3

Aufgaben

3.1 Arithmetische, geometrische und harmonische Folgen

1. Man bestimme alle ganzzahligen a) arithmetischen sowie b) geometrischen Folgen mit $a_0 = 503$, die 2012 enthalten.
2. Man zeige, dass $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ nicht gleichzeitig Elemente einer arithmetischen Folge sein können.
3. Man zeige, dass $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ nicht gleichzeitig Elemente einer geometrischen Folge sein können.
4. Man zeige, dass $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ nicht gleichzeitig Elemente einer harmonischen Folge sein können.
5. Man zeige: Enthält eine unendliche arithmetische Folge ($a_n = a_0 + nd$) positiver reeller Zahlen zwei verschiedene Potenzen einer ganzen Zahl $a > 1$, so enthält sie eine unendliche geometrische Folge ($b_n = b_0 q^n$) reeller Zahlen. (GWF 2005)
6. Es sei $\langle h_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ eine harmonische Folge positiver rationaler Zahlen.

   Man zeige: Enthält die Folge ein Glied h_j, das das Quadrat einer rationalen Zahl ist, so enthält sie unendlich viele Glieder h_k, die Quadrate rationaler Zahlen sind. (GWF 2006)
7. Gegeben sei die für alle positiven reellen Zahlen definierte Funktion
$$f(x) = \lfloor x^2 \rfloor + \{x\}\ .$$
   Man zeige: Es gibt eine arithmetische Folge verschiedener positiver rationaler Zahlen, die alle in gekürztem Zustand den Nenner 3 haben und nicht im Wertebereich der Funktion f liegen. (BZWF 2006)

3.2 Fibonacci-Folge und Lucas-Folgen

8. Man zeige oder widerlege: Jede natürliche Zahl kann als Summe von verschiedenen Fibonacci-Zahlen geschrieben werden.
9. Sei F_n die Fibonacci-Folge. Man zeige: $F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ für alle n.
10. Sei F_n die Fibonacci-Folge. Man zeige: $F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$ für alle n.
11. Wieviele Fibonacci-Zahlen aus der Menge $F_1, F_2, \ldots, F_{2012}$ sind gerade?
12. Sei $\langle F_n \rangle$ die Fibonacci-Folge und $\langle L_n \rangle = \langle V_n(1,-1) \rangle$ die Folge der Lucas-Zahlen. Man zeige: $5F_n = L_{n+1} + L_{n-1}$ für alle $n \geq 1$.
13. Sei $\langle F_n \rangle$ die Fibonacci-Folge und $\langle L_n \rangle = \langle V_n(1,-1) \rangle$ die Folge der Lucas-Zahlen. Man zeige: $F_{2n} = F_n L_n$ für alle $n \geq 1$.

3.3 Erraten expliziter Formeln und Beweis durch vollständige Induktion

14. Es sei $A_0 = \{1, 2\}$ und für $n > 0$ entsteht A_n aus A_{n-1} indem man zu A_{n-1} die natürlichen Zahlen hinzunimmt, die sich als Summe von zwei verschiedenen Zahlen aus A_{n-1} darstellen lassen. Es sei $a_n = |A_n|$ die Anzahl der Zahlen in A_n. Man bestimme a_n als Funktion von n. (GFW, 2001)

15. Man finde eine explizite Form für die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$.

16. Es ist die Folge $\langle x_n \rangle$ definiert durch $x_{n+1} = \left(\frac{n}{2004} + \frac{1}{n}\right) x_n^2 - \frac{n^3}{2004} + 1$ für $n > 0$.

    Es sei x_1 eine natürliche Zahl kleiner als 204 so gewählt, dass alle Folgenglieder natürliche Zahlen sind.

    Man zeige, dass dann unendlich viele Primzahlen in der Folge vorkommen. (GWF 2004)

3.4 Lineare homogene Rekursionen

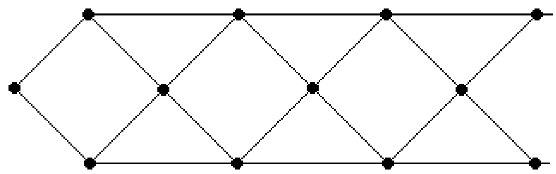
17. Man bestimme die Anzahl der Teilmengen von $\{1, ..., n\}$, die keine aufeinanderfolgenden Zahlen beinhalten.

18. Mischa hat rote und schwarze Plastikperlen und möchte daraus eine Halskette mit n Perlen basteln, wobei keine zwei roten Perlen direkt nebeneinander aufgefädelt sein sollen. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

19. Das Gasthaus Möller aktualisiert und erweitert seine Speisekarte am Anfang jedes Monats nach folgendem Prinzip: Zuerst werden gleich viele neue Gerichte erfunden, wie bereits auf der Karte stehen. Dann werden alle gestrichen, die bereits seit 2 Monaten auf der Karte waren. Im September 2001 gab es nur 5 verschiedene Gerichte, im Oktober 7. Wieviele wird es im Juli 2012 geben?

20. Max und Moritz stehlen einander mit Begeisterung das Taschengeld. Jede Nacht stiehlt Max ein Drittel von Moritz' Besitz, während Moritz gleichzeitig die Hälfte aus Max' Sparschwein plündert. Zu Beginn hat jeder 100€. Wieviel Geld hat jeder nach n Tagen?

21. In einem Straßennetz, dessen Anfang dargestellt ist, sind die Punkte in der mittleren Horizontalen der Reihe nach mit 1, 4, 7, ... bezeichnet, die oberen Punkte der Reihe nach mit 2, 5, 8, ... und die unteren der Reihe nach mit 3, 6, 9, ... Wie viele Wege von „1" nach „3n+1" gibt es, die Punkte nur in monoton wachsender Reihenfolge besuchen? (Ähnlich zu BWF, 2002, aber anderes Straßennetz)



22. Burak hat rote und schwarze Plastikperlen und möchte daraus eine Halskette mit n Perlen basteln, sodass immer eine ungerade Anzahl von Perlen einer Farbe nebeneinander ist. Wieviele Möglichkeiten gibt es dafür?

23. Ein Smart ist halb so lang wie ein normales Auto. Auf einem Parkstreifen hätten n Smarts hintereinander Platz. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, den Parkstreifen lückenlos zu verparken?

24. Eine Firma versucht, die Wirtschaftskrise auf folgende Weise zu bekämpfen: In jedem Quartal kündigt sie die Hälfte ihrer Mitarbeiter. Dann stellt sie aus Marketinggründen alle wieder ein, die sie im vorigen Quartal gekündigt hatte. Im dritten Quartal 2011 hatte die Firma 8000 Mitarbeiter, im vierten Quartal 5000 Mitarbeiter. Wie viele Mitarbeiter hat die Firma im vierten Quartal 2012? Zusatz: Konvergiert die Folge?

25. Es sei w_0 ein Wort, das aus a Nullen und b Einsern besteht. Man bildet rekursiv eine Folge $\langle w_n \rangle$ von Wörtern, in der w_{n+1} aus w_n dadurch entsteht, dass 1 durch 0 und 0 durch 11 ersetzt wird. (Beispiel: $w_0 = 10 \longrightarrow w_1 = 011 \longrightarrow w_2 = 1100 \longrightarrow w_3 = 001111 \longrightarrow w_4 = 11110000 \longrightarrow \ldots$)

    Wieviele Nullen bzw. Einser enthält das Wort w_n?

26. Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_0 = 4$ und $a_1 = 1$ erfüllt für $n \geq 1$ die Rekursion $a_{n+1} = a_n + 6a_{n-1}$ und definiert die Folge

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \ .$$

Man bestimme die Koeffizienten α und β so, dass b_n die Rekursion

$$b_{n+1} = \alpha b_n + \beta b_{n-1}$$

erfüllt.

Man bestimme auch den expliziten Term für b_n. (BWF 2000)

27. Zur Verfügung stehen genügend viele Steine: Rechtecke der Größe 2×1 und Quadrate der Größe 1×1.

Sei $n > 3$ eine natürliche Zahl.

Wie viele Möglichkeiten gibt es mit diesen Steinen ein $3 \times n$ Rechteck auszulegen, wobei die verwendeten 2×1 Rechtecke mit der längeren Seite parallel zur Seite mit der Länge 3 liegen müssen und einander nicht berühren dürfen? (BWF 2003)

3.5 Lineare inhomogene Rekursionen

28. Josef hat auf einem Konto 100 Euro. Jedes Jahr bekommt er 4% Guthabenszinsen und zahlt 3 Euro Kontoverwaltungsgebühr. Wieviel Geld besitzt er nach 10 Jahren?

29. Ein nicht namentlich genannter Student kocht jeden Tag mit folgenden Zutaten: 60% frische Zutaten, 30% Reste des Essens vom Vortag, 10% Reste von vorgestern. Nach einiger Zeit möchte er wissen, wie alt sein Essen im Durchschnitt ist, und gegen welches Durchschnittsalter es konvergieren wird, wenn er die Methode für den Rest seines Lebens fortsetzt. (Heute bedeutet 0 Tage alt, und an den ersten beiden Tagen seines Studentenlebens hat er nur frische Zutaten verwendet.)

30. Sein Wohnungskollege plant eine ähnliche Kochmethode: Er möchte jeden Tag mit $c\%$ frischen Zutaten kochen und den Rest mit Resten vom Vortag auffüllen. Er fragt sich, wie hoch er c wählen muss, damit sein Essen im Durchschnitt nie älter als a) 3, b) t Tage wird.

31. Philippe hat Schulden in der Höhe von 10000 Euro. Jedes Jahr zahlt er 6% Sollzinsen und zahlt 700 Euro zurück. Wie hoch sind die Schulden nach 13 Jahren?

32. Mr. Monk ordnet die Gläser in seinem Küchenschrank neu an. In einem (schmalen) Regal stehen genau zwei Gläser, die gleichmäßig verteilt werden sollen. Das Regal ist 20 cm breit, am Anfang ist der Mittelpunkt des linken Glases 5 cm vom linken Rand entfernt, der des rechten Glases 10 cm. Mr. Monk nimmt zuerst das rechte Glas und platziert es genau zwischen rechtem Rand und linken Glas. Nun nimmt er das linke Glas, und platziert es genau zwischen linkem Rand und rechtem Glas. Er sieht, dass nun die Position des rechten Glases wieder nicht stimmt, und platziert es wieder genau zwischen linkem Glas und rechtem Rand. Nun passt aber wieder das linke Glas nicht...

Wo werden die Gläser nach 20 Minuten stehen, wenn Monk für das Umstellen eines Glases eine Minute braucht? Wie lange wird er für die Gläser brauchen, wenn er eine Abweichung von einem halben Millimeter nicht mehr mit freiem Auge erkennen kann?

3.6 Grenzwerte

33. Man bestimme den Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_0 = 0, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$.

34. Man bestimme den Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_0 = 0, a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n}$.

35. Sei

$$x_n = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots + \sqrt{6}}}}$$

mit n Wurzelzeichen. Man berechne den Grenzwert dieser Folge, oder zeige, dass sie divergiert.

36. Sei

$$x_n = \sqrt{2 + 3\sqrt{2 + 3\sqrt{2 + \cdots + 3\sqrt{2}}}}$$

mit n Wurzelzeichen. Man berechne den Grenzwert dieser Folge, oder zeige, dass sie divergiert.

37. Sei

$$x_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots + \frac{1}{1}}}}$$

mit n Bruchstrichen. Man berechne den Grenzwert dieser Folge, oder zeige, dass sie divergiert.

38. Sei

$$x_n = \sqrt[n]{n}$$

für alle n. Man berechne den Grenzwert dieser Folge, oder zeige, dass sie divergiert.

39. Sei $x_1 = 1$ und

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$$

für alle n. Man berechne den Grenzwert dieser Folge, oder zeige, dass sie divergiert.

40. Sei $x_1 = 1$ und

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}$$

für alle n. Man berechne den Grenzwert dieser Folge, oder zeige, dass sie divergiert.

41. Sei $x_1 = 1$ und

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x_n}}$$

für alle n. Man berechne den Grenzwert dieser Folge, oder zeige, dass sie divergiert.

42. Sei $x_1 = \frac{9}{16}$ und

$$x_{n+1} = 1 - \sqrt{x_n + 1}$$

für alle n. Man berechne den Grenzwert dieser Folge, oder zeige, dass sie divergiert.

43. Man zeige, dass die Folge $\langle x_n \rangle$ mit $x_n = \sqrt[n]{n}$ konvergiert und berechne den Grenzwert.

44. Man zeige: Die Folge $\langle \frac{(n+1)^n n^{2-n}}{7n^2+1} \rangle_{n=0,1,2,\ldots}$ ist streng monoton wachsend. (BZWF 2006)

45. Sei $\langle p_n \rangle = \langle U(2,-1) \rangle$ die Pell-Folge und $\langle q_n \rangle = \langle V_n(2,-1) \rangle$ die Pell-Lucas-Folge. Man zeige: $\frac{q_n}{2p_n}$ konvergiert gegen $\sqrt{2}$.

3.7 Reihen

46. Michi zeichnet ein Muster aus Kreisen. In die Ecke eines Blattes Papier zeichnet sie einen großen Kreis mit Radius 1 dm, sodass dieser beide Ränder des Blattes berührt. Dann zeichnet sie in das Eck zwischen erstem Kreis und Papierrand den größtmöglichen Kreis ein, der Platz hat. Im Eck darunter wieder, und so weiter. Wie groß ist die Summe der Radien, Umfänge und Flächen?

47. Um jeden Gitterpunkt (x, y) mit nicht negativen ganzen Zahlen als Koordinaten wird ein Quadrat mit dem Gitterpunkt als Mittelpunkt und der Seitenlänge $\frac{0.9}{2^x 5^y}$ in beliebiger Lage gelegt. Man bestimme den minimalen Flächeninhalt dieser aus unendlich vielen Quadraten bestehenden Figur. (BWF, 2003)

48. Für jede reelle Zahl b bestimme man alle reellen Zahlen x mit $x - b = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. (GWF, 2003)

49. Wilma und Fred Feuerstein fahren gemeinsam Auto. Sie wechseln einander dabei ab. Wilma fährt immer genau gleich weit wie Fred gerade gefahren ist, aber Fred fährt nur 90% der Strecke, die Wilma soeben zurückgelegt hat. Am Anfang sitzt Fred am Steuer und fährt 1000m. Wie weit kommen die beiden? Wie lange brauchen sie bis ins 4 km entfernte Felsental?

50. Ankit zeichnet ein Muster aus gleichseitigen Dreiecken. Zuerst zeichnet er ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge von 100cm. Er verbindet dessen Seitenmittelpunkte, um ein zweites Dreieck zu erhalten. Von diesem verbindet er wiederum die Seitenmittelpunkte, um ein drittes Dreieck zu erhalten, und so weiter. Wie groß ist die Summe der Umfänge und Flächen aller Dreiecke?

51. Jos zeichnet ein Muster aus Vierecken. Zuerst zeichnet er ein beliebiges Viereck. Er verbindet dessen Seitenmittelpunkte, um ein zweites Viereck zu erhalten. Von diesem verbindet er wiederum die Seitenmittelpunkte, um ein drittes Viereck zu erhalten, und so weiter. Wie groß ist die Summe der Flächen aller Vierecke in Abhängigkeit von der Fläche des ersten Vierecks?

52. Leo bastelt einen 3D-Scanner. Dabei werden verschieden große Raster auf die Oberfläche des zu scannenden Objektes projiziert. Das erste Raster besteht aus Quadraten mit einer Seitenlänge von 5cm, jedes weitere Raster ist um ein Drittel enger. Wieviele verschiedene Raster werden projiziert, wenn das kleinste noch Quadrate mit mindestens 2mm Seitenlänge haben soll? Wenn jedes Raster insgesamt 1m $\times$ 1m groß ist, wieviele horizontale und vertikale Linien werden dann im Laufe des Prozesses projiziert?

53. Gegeben sei eine arithmetische Folge $\langle a_n \rangle$. Wir bezeichnen mit s_i die Summe der ersten i Glieder der Folge, mit s_j die Summe der ersten j Glieder und mit s_k die Summe der ersten k Glieder. Man zeige, dass der Wert von
$$\frac{s_i}{i}(j-k) + \frac{s_j}{j}(k-i) + \frac{s_k}{k}(i-j)$$
weder von der Wahl von i, j und k noch von der Folge selbst abhängig ist.

54. a) Man zeige: Für jede Menge $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ von Primzahlen gilt: Die Summe aller Stammbrüche (d.h. Brüche der Form $\frac{1}{n}$), deren Nenner genau die k gegebenen Primfaktoren (allerdings in beliebigen Potenzen mit Exponenten ungleich Null) enthalten, ist wieder ein Stammbruch.
   b) Wie groß ist diese Summe, wenn $\frac{1}{2004}$ unter den Summanden vorkommt?
   c) Man zeige: Für jede k-elementige Menge $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ von Primzahlen ($k > 2$) ist die gesuchte Summe kleiner als $\frac{1}{N}$ mit $N = 2 \cdot 3^{k-2}(k-2)!$.

   (BWF 2004)

3.8 Diverses

55. Man bestimme alle Primzahlen in der Folge $\langle 1, 101, 10101, 1010101, ... \rangle$.

56. Sei $\langle x_n \rangle$ eine Folge mit $x_1 = 3$, $x_2 = 9$, und $x_{n+1} = 5x_n - 4x_{n-1}$. Wieviele Quadrat- bzw. Kubikzahlen gibt es in der Folge?

57. Gegeben sei die Folge $\langle x_n \rangle$ mit $x_0 = 3$ und $x_{n+1} = x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n + 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass diese Folge keine Quadrat- und Kubikzahlen enthält.

58. Es sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge natürlicher Zahlen, sodass für alle n gilt:
$$a_n = \sqrt{\frac{a_{n-1}^2 + a_{n+1}^2}{2}}$$
Man zeige, dass die Folge konstant ist.

59. Gegeben ist die Folge $\langle y_n \rangle$ mit $y_0 = 1$ und $y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(3y_n + \sqrt{5y_n^2 - 4}\right)$. Man zeige, dass alle Glieder der Folge ganze Zahlen sind.

60. Die Folge $\langle x_n \rangle$ ist durch die Rekursion $x_{2n} = x_n$ und $x_{2n+1} = 1 - x_n$ und den Startwert $x_0 = 0$ festgelegt.

(a) Man bestimme x_{2012}.

(b) Wie viele unter den Zahlen $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2012}$ sind ungleich 0?

(c) Man bestimme die Summe $x_0 + x_1 + \ldots + x_{2012}$.

61. Gegeben sei eine Folge ganzer Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Es wird nun eine neue Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ gebildet, indem man $x_0 = 1$ und $x_1 = a_1$ setzt, und danach $x_2, x_3, \ldots$ schrittweise aus der Gleichung

$$x_{k+1} = a_k \cdot x_k + x_{k-1} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

bestimmt. Entsprechend bildet man die Folge $y_0, y_1, y_2, \ldots$, indem man $y_0 = 1$ und $y_1 = a_1 + 1$ setzt und anschließend $y_2, y_3, \ldots$ schrittweise gemäß

$$y_{k+1} = a_k \cdot y_k + y_{k-1} \qquad k = 1, 2, 3, ...$$

berechnet.

Beweisen Sie, daß für jede positive ganze Zahl k die beiden Zahlen x_k und y_k zueinander teilerfremd sind.

62. Wir betrachten die durch die Rekursion $u_{n+1} = \frac{u_n(u_n+1)}{n}$ für $n \geq 1$ definierte Folge $\langle u_n \rangle$.

a) Man bestimme die Folgenglieder für $u_1 = 1$.

b) Man zeige: Ist ein Folgenglied eine nicht ganzzahlige rationale Zahl, so sind auch alle nachfolgenden Folgenglieder nicht ganzzahlig.

c) Man zeige: Für jede natürliche Zahl K gibt es ein $u_1 > 1$, sodass die ersten K Glieder der Folge natürliche Zahlen sind.

(GWF 2000)

63. Man zeige: Es gibt eine unendliche Folge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \rangle$ positiver ganzer Zahlen, sodass für alle N die Summe $\sum_{k=1}^{N} a_k^2$ eine Quadratzahl ist.

Man gebe eine Rekursionsformel für eine solche Folge an. (BWF 2004)

64. Es sei $p > 1$ eine natürliche Zahl.

Wir betrachten die Menge $\mathbf{F}_p$ jener nicht konstanten Folgen nicht negativer ganzer Zahlen, die die Rekursion $a_{n+1} = (p+1) \cdot a_n - p \cdot a_{n-1}$ (für alle $n > 0$) erfüllen.

Man zeige: Es existiert in $\mathbf{F}_p$ eine Folge $\langle a_n \rangle$ mit der Eigenschaft, dass für jede andere Folge $\langle b_n \rangle$ in $\mathbf{F}_p$ für alle n gilt, dass $a_n \leq b_n$. (BZWF 2008)

65. Welche positiven ganzen Zahlen fehlen in der Folge $\langle a_n \rangle$?

$$\langle a_n = n + \lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor \rangle_{n \geq 1}$$

(BWF 2008)