

Folgen und Reihen

Vorbereitungskurs
für ÖMO-Fortgeschrittene
an der TU Graz

Birgit Vera Schmidt

14. Oktober 2009

1	Folgen	2
1.1	Einleitung	2
1.2	Arithmetische und geometrische Folgen	2
1.3	Fibonacci-Folge	3
1.4	Lösen von Rekursionsformeln	4
1.5	Mehr als eine Rekursion	6
1.6	Erraten expliziter Formeln und Beweis durch vollständige Induktion	7
1.7	Grenzwerte	7
1.8	Fixpunkte	8
2	Reihen	10
2.1	Einleitung	10
2.2	Wichtige Sätze	10
2.3	Arithmetische Reihen	10
2.4	Geometrische Reihen	11
3	Beispiele	12

Kapitel 1

Folgen

1.1 Einleitung

Eine Folge ist, wie der Name bereits nahelegt, eine Folge von Zahlen, meist mit bestimmten Eigenschaften. Je nachdem, aus welchem Bereich die Zahlen kommen, spricht man beispielsweise von einer Folge in \mathbb{N} , in \mathbb{Z} , in \mathbb{Q} oder in \mathbb{R} .

Die bekannteste Folge lernt man übrigens schon in der Volksschule: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... (Das ist übrigens eine Folge in \mathbb{N} , also eine Folge natürlicher Zahlen.)

Üblich ist folgende Schreibweise:

$\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet die Folge,
 a_n das n -te Element der Folge

Hinweis. Oft wird einfach nur $\langle a_n \rangle$ statt $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ geschrieben.

Die obige Folge würde man damit so beschreiben: "Sei $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $a_n = n$."

1.2 Arithmetische und geometrische Folgen

Besondere Bedeutung haben zwei spezielle Arten von Folgen. Eine arithmetische Folge ist eine Folge, bei der der Abstand aufeinanderfolgender Folgeelemente konstant ist.

Definition. Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge von Zahlen aus A . Diese nennt man eine arithmetische Folge dann und nur dann, wenn für ein fixes $c \in A$ gilt:

$$a_{n+1} = a_n + c \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

Hinweis. A kann dabei eine beliebige Grundmenge, also \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , oder auch ganz eine andere sein.

Satz 1.1. Sei $\langle a_n \rangle$ eine arithmetische Folge mit $a_{n+1} = a_n + c$, $c \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + c \\ &= a_{n-2} + 2c \\ &\quad \vdots \\ &= a_{n-k} + k \cdot c \\ &\quad \vdots \\ &= a_0 + n \cdot c \end{aligned}$$

Die zweite besondere Folge ist die geometrische Folge. Bei dieser ist der Quotient aufeinanderfolgender Elemente konstant.

Definition. Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge von Zahlen aus A . Diese nennt man eine geometrische Folge dann und nur dann, wenn für ein fixes $q \in A$ gilt:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

Satz 1.2. Sei $\langle a_n \rangle$ eine geometrische Folge mit $a_{n+1} = a_n \cdot q, q \in A, \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} \cdot q \\ &= a_{n-2} \cdot q^2 \\ &\vdots \\ &= a_{n-k} \cdot q^k \\ &\vdots \\ &= a_0 \cdot q^n \end{aligned}$$

1.3 Fibonacci-Folge

Berühmteste Folge (abgesehen von den gerade erklärten mathematischen Grundlagen natürlich) ist die nach Leonardo Fibonacci (1180(?) - 1241) benannte Folge, die folgendermaßen definiert ist:

Definition. Die Fibonacci-Folge ist definiert durch das rekursive Bildungsgesetz

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2 \quad (1.3)$$

mit den Anfangswerten

$$F_1 = F_2 = 1 \quad (1.4)$$

Hinweis. Oft werden auch die Anfangswerte $F_0 = 0, F_1 = 1$ angegeben. Das Resultat ist dasselbe.

Die ersten Folgeelemente lauten damit:

$$(0,)1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

Man beachte: Bereits das 26. Folgeelement ist größer als 100.000, das 31. größer als 1.000.000 und das 36. beträgt fast 15 Millionen.

Das klassische Beispiel für Fibonacci hat mit Kaninchen und deren Vermehrung zu tun. Fibonacci definierte das Problem folgendermaßen:

1. Zu Beginn gibt es ein Paar geschlechtsreifer Kaninchen.
2. Jedes neugeborene Paar wird im zweiten Lebensmonat geschlechtsreif.
3. Jedes geschlechtsreife Paar wirft pro Monat ein weiteres Paar.

Weiters wird angenommen, dass die Kaninchen unsterblich sind und sich in einem abgeschlossenen Raum befinden.

Im Gegensatz zu arithmetischen und geometrischen Folgen fällt uns auf, dass es wesentlich schwieriger ist, ein Bildungsgesetz für das n -te Folgeelement der Fibonacci-Folge aufzustellen. Um das 139. Element einer arithmetischen Folge zu berechnen, berechnen wir einfach $a_0 + 139 \cdot c$, wobei a_0 und c natürlich bekannt sind. Ebenso kann man das 139. Element einer geometrischen Folge berechnen als $a_0 \cdot q^{139}$, wiederum sind a_0 und q bekannt. Bei den Fibonacci kennen wir momentan keine andere Methode, als die 139 ersten Elemente alle zu berechnen. Höchste Zeit, das zu ändern.

3.

$$q^2 - q - 1 = 0$$
$$q_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

4. $F_n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

5.

$$F_0 = A + B = 0 \implies B = -A$$
$$F_1 = A \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + B \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$
$$= A \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} - A \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$
$$= A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$
$$= A \cdot \sqrt{5} = 1$$
$$\implies A = \frac{1}{\sqrt{5}} = -B$$
$$\implies F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

6. Wir berechnen zur Probe mit dieser Formel F_4 :

$$F_4 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4 \right)$$
$$= 3 \quad \text{OK}$$

Inhomogene lineare Rekursionsgleichungen sind in erster Linie lästig und kommen zudem selten und erst in schwierigeren Wettbewerben vor. Zu Risiken und Nebenwirkungen fragen Sie Ihren Arzt oder Apotheker.

Eine spezielle Form von inhomogenen Rekursionsgleichungen wollen wir dennoch kurz betrachten, nämlich die, bei der der inhomogene Term die Form hat:

$$s(n) = (s_0 + s_1 \cdot n + s_2 \cdot n^2 + \dots + s_r \cdot n^r) \cdot \alpha^n \quad s_i \text{ konstant } \forall i \quad (1.6)$$

Methode 1.5.

0. Sei eine inhomogene lineare Rekursionsformel mit konstanten Koeffizienten gegeben, deren Störterm die oben angegebene Form hat.

1. Man löse die Rekursion für die Gleichung ohne den Störterm mit Schritten 1-3 der obigen Methode.

2. Man bestimme eine sogenannte partikuläre Lösung, das heißt eine Folge, die die Rekursionsgleichung erfüllt, aber nicht notwendigerweise die richtigen Startwerte hat. Dazu verwende man folgenden Ansatz:

$$y_n = (t_0 + t_1 \cdot n + t_2 \cdot n^2 + \dots + t_r \cdot n^r) \cdot n^v \cdot \alpha^n \quad (1.7)$$

wobei v die Vielfachheit von α als Nullstelle der gerade gelösten homogenen Gleichung ist. Diesen Ansatz setzt man in die Rekursionsgleichung ein und berechnet die Werte t_0, t_1, \dots, t_r .

3. Die Lösung der Rekursion erhält man nun als Addition von partikulärer Lösung und Ansatz der homogenen Lösung (wie in Schritt 4 der vorigen Methode).
4. Man bestimme die noch ausständigen Koeffizienten wie zuvor.
5. Probe!

Beispiel 1.6. 1. $a_{n+1} = 2 \cdot a_n + a_{n-1} + n$

2. Erhalte Lösungen $q_1 = q_2 = 1$
3. $s(n) = n = (1 \cdot n + 0 \cdot 1) \cdot 1^n \implies \alpha = 1$ ist doppelte Nullstelle der homogenen Lösung. Verwende daher Ansatz: $y_n = (A \cdot n + B) \cdot n^2 \cdot 1^n$
Einsetzen in Rekursionsgleichung ergibt: $(A \cdot (n+1) + B)(n+1)^2 = 2 \cdot (A \cdot n + B) \cdot n^2 - (A \cdot (n-1) + B) \cdot (n-1)^2 + n$
Durch Koeffizientenvergleich erhält man $A = \frac{1}{6}, B = 0$
Partikuläre Lösung: $y_n = \frac{1}{6} \cdot n^3$
4. Ansatz für allgemeine Lösung: $a_n = C + D \cdot n + \frac{1}{6} \cdot n^3$.
5. Einsetzen der Startwerte ergibt $C = 2, D = \frac{5}{6}$. Die explizite Form der Rekursionsgleichung lautet daher: $a_n = 2 + \frac{5}{6} \cdot n + \frac{1}{6} \cdot n^3$
6. Probe!! (Kann gar nicht genug Rufzeichen haben.)

Hinweis. Bei mehr als einem Störterm kann man diese auch getrennt betrachten und dann alle partikulären Lösungen zur homogenen Lösung addieren.

1.5 Mehr als eine Rekursion

Manchmal passiert es, dass wir zwei oder sogar mehr Rekursionen gleichzeitig betrachten müssen. In diesem Fall hilft meist nur eines: Mit allen Tricks so lange vereinfachen, bis eine der beiden Folgen nicht mehr von der anderen abhängig ist.

Beispiel 1.7. Seien $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ zwei Folgen, die den folgenden Rekursionsgleichungen genügen:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2 \cdot a_n + b_n \\ b_{n+1} &= a_n + b_n \end{aligned}$$

Seien die Startwerte $a_1 = b_1 = 1$. Man berechne a_n in Abhängigkeit von n .

Lösung. Die zweite der beiden Rekursionsgleichungen lässt sich umformen zu

$$a_n = b_{n+1} - b_n$$

Da dies für jedes n gilt, gilt natürlich auch

$$a_{n+1} = b_{n+2} - b_{n+1}$$

(Diese Vorgehensweise wird als "Indexverschiebung" bezeichnet.)

Wir setzen dies in die erste Rekursionsgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} (b_{n+2} - b_{n+1}) &= 2 \cdot (b_{n+1} - b_n) + b_n \\ b_{n+2} &= 3b_{n+1} - b_n \end{aligned}$$

Ab hier kommen wir wieder mit dem bekannten Verfahren ans Ziel. □

1.6 Erraten expliziter Formeln und Beweis durch vollständige Induktion

Nebst all diesen Verfahren ist es manchmal nach wie vor am einfachsten, die explizite Darstellung mit Hilfe der ersten berechneten Werte zu erraten und durch vollständige Induktion zu beweisen. Praktischerweise können wir für den Induktionsschritt einfach die Rekursionsformel verwenden.

Beispiel 1.8. Man finde eine explizite Form für die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_{n+1} = a_n + n$, $a_1 = 0$. Die ersten Folgeelemente lauten: 0, 1, 3, 6, 10, 15. Wir vermuten: $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Lösung. Die Induktionsbasis ist bereits vorhanden, es fehlt nur noch der Induktionsschritt, den wir durch einfaches Nachrechnen der Rekursionsgleichung durchführen:

$$a_{n+1} = a_n + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 - n}{2} + \frac{2n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

□

1.7 Grenzwerte

Manchmal interessiert es uns, was mit einer Folge passiert, wenn n sehr groß wird. Nähert sich die Folge einem Wert immer mehr an, so sagt man, sie konvergiert gegen diesen Wert, den man als Grenzwert bezeichnet. Strebt die Folge gegen unendlich oder schwankt sie zwischen mehreren Werten, ohne sich einem einzelnen anzunähern, so sagt man, dass die Folge divergiert.

Obwohl man über Konvergenz allein ein ganzes Semester lang reden könnte, wollen wir uns aus Zeitgründen auf die fundamentalsten Grundlagen beschränken.

Definition. Der Wert, gegen den eine Folge konvergiert, wird als Grenzwert oder Limes bezeichnet. Die Schreibweise dafür ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \tag{1.8}$$

In der expliziten Darstellung ist es meist etwas leichter als in der rekursiven, Grenzwerte zu bestimmen.

Satz 1.9. Seien $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ zwei Folgen. Dann gilt: Wenn $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ konvergieren, dann konvergieren auch $\langle a_n + b_n \rangle$, $\langle a_n - b_n \rangle$, $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ und, falls $\langle b_n \rangle$ nicht gegen 0 konvergiert, $\langle \frac{a_n}{b_n} \rangle$. Der Grenzwert entspricht Summe/Differenz/Produkt/Quotient der Grenzwerte von $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$.

Wenn $\langle a_n \rangle$ konvergiert und $\langle b_n \rangle$ divergiert (oder umgekehrt), dann divergiert die Summe der beiden.

Wenn $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ divergieren, ist über die Summe keine generelle Aussage möglich.

Satz 1.10. Sei a_n eine rationale Funktion, d.h.

$$a_n = \frac{P(n)}{Q(n)} \tag{1.9}$$

wobei $P(n)$ und $Q(n)$ Polynome sind. Der Grad eines Polynoms P ist die höchste vorkommende Potenz und wird manchmal als $\text{Grad}(P)$ angeschrieben. Seien p_1 und q_1 die Koeffizienten der jeweils höchsten vorkommenden Potenz in P und Q . Es gilt:

- Wenn $\text{Grad}(P) > \text{Grad}(Q)$, dann divergiert die Folge.
- Wenn $\text{Grad}(P) < \text{Grad}(Q)$, dann konvergiert die Folge gegen 0.
- Wenn $\text{Grad}(P) = \text{Grad}(Q)$, dann konvergiert die Folge gegen $\frac{p_1}{q_1}$.

Satz 1.11. Habe a_n die Form $a_n = q^n, q \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- Ist $|q| > 1$, divergiert die Folge.
- Ist $|q| < 1$, dann konvergiert die Folge gegen 0.
- Ist $q = 1$, dann konvergiert die Folge gegen 1.
- Ist $q = -1$, dann divergiert die Folge.

1.8 Fixpunkte

Wollen wir die Grenzwerte einer Folge bestimmen, von der wir nur die Rekursionsgleichung kennen, wird die Sache etwas schwieriger. Liegt eine (nicht notwendigerweise lineare) Rekursion erster Ordnung vor (d.h. $a_{n+1} = r(a_n)$), so kann man folgendes versuchen: Zunächst müssen wir beweisen, **dass** die Folge überhaupt konvergiert. Danach suchen wir sogenannte Fixpunkte, da bekannt ist, dass die Folge gegen einen dieser Fixpunkte streben muss. Schließlich bleibt noch zu bestimmen, welcher der Fixpunkte der Grenzwert ist.

Definition. Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt *monoton steigend* (fallend), wenn aus $n > m$ folgt, dass $a_n \geq a_m$ ($a_n \leq a_m$). Ist die Ungleichung strikt, d.h. $a_n > a_m$ ($a_n < a_m$), so sagt man, dass die Folge *streng monoton steigend* (fallend) ist.

Satz 1.12. Sei die Folge $\langle a_n \rangle$ monoton steigend (fallend) und nach oben (unten) beschränkt. Dann konvergiert die Folge.

Achtung. Die Umkehrung stimmt nicht. Eine Folge kann konvergent sein, ohne monoton zu sein. (Allerdings ist jede konvergente Folge beschränkt.)

Definition. Ein Fixpunkt ist ein Wert a , für den gilt, dass $a = r(a)$.

Methode 1.13.

0. Die Rekursionsformel genügt der Form $a_{n+1} = r(a_n)$.
1. Man beweise, dass die Folge für den gegebenen Startwert monoton steigend (fallend) und nach oben (unten) beschränkt ist.
2. Man bestimme die Fixpunkte, indem man für a_{n+1} und jedes a_n eine noch zu bestimmende Konstante a einsetzt, und löse die entstehende Gleichung in a .
3. Man bestimme, welcher der Fixpunkte der Grenzwert der Folge ist.

Beispiel 1.14. Man bestimme den Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n}$ und $a_1 = 1$.

Lösung. Wir zeigen zunächst **Beschränktheit**:

Vermutung: $n \leq 4$. Beweisen dies durch Vollständige Induktion:

Basis: $a_1 = 1 \leq 4$ ok.

Annahme: $a_n \leq 4, n = 1, \dots, N$.

Schritt: $a_{N+1} = \sqrt{12 + a_N} \leq \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$ q.e.d.

Analog dazu zeigen wir auch, dass $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Monotonie: Vermutung: Folge ist monoton steigend.

Beweis:

$$\begin{array}{r} a_{n+1} \stackrel{!}{\geq} a_n \\ \sqrt{12 + a_n} \stackrel{!}{\geq} a_n \quad \Big/ \quad \text{(ÄU da } a_n \geq 0) \\ 12 + a_n \stackrel{!}{\geq} a_n^2 \\ -a_n^2 + a_n + 12 \geq 0 \end{array}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $a_n \in [-3, 4]$. Auf Grund der zuvor bewiesenen Beschränktheit ist das der Fall.

Nun gilt es nur noch, den Grenzwert zu finden. Dazu bestimmen wir zunächst alle Fixpunkte, indem wir in der Rekursionsgleichung Folgeelemente durch ein konstantes c ersetzen:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{12 + c} & /^2 \\ c^2 &= 12 + c \end{aligned}$$

Lösen dieser quadratischen Gleichung ergibt:

$$c_1 = 4, c_2 = -3$$

Da wir wissen, dass $a_n \geq 0$, können wir den zweiten Fixpunkt als Grenzwert ausschließen. Die Folge konvergiert daher gegen 4. \square

Eine Frage ist noch offen: Woher kam die anfängliche Vermutung, $a_n \leq 4$? Einerseits kann man einfach die ersten Werte berechnen und dann raten. Für diese Folge sind die ersten fünf Werte (abgerundet) 1, 3.6, 3.95, 3.99, 3.99. Der Schluss liegt nahe.

Oft kann es aber wesentlich einfacher sein, **zuerst** die Fixpunkte zu bestimmen und daraus Rückschlüsse über die Folge zu ziehen. Achtung: Sowas ist höchstens auf dem Konzeptpapier erlaubt, aber nicht in der Reinschrift. Außerdem gilt: Nicht alles, was Fixpunkt ist, kann auch Grenzwert sein.

Beispiel 1.15 (Abschreckendes Beispiel).

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 3, a_1 = 1$$

Wir bestimmen die Fixpunkte:

$$\begin{aligned} c &= 2 \cdot c + 3 \\ c &= -3 \end{aligned}$$

Dass die Folge monoton steigend ist, ist offensichtlich, und das mit der Beschränktheit "wird schon passen", also ist -3 der Grenzwert. Irrtum, die Folge divergiert.

Weiterer wertvoller Hinweis: Eine Folge muss nicht notwendigerweise gegen den "nächsten" Fixpunkt konvergieren, d.h. eine monoton steigende Folge mit Startwert 1 und Fixpunkten 5 und 10 kann durchaus gegen 10 konvergieren.

Kapitel 2

Reihen

2.1 Einleitung

Nach all diesen Diskussionen über Folgen gibt es noch einen weiteren interessanten Punkt, den wir bislang ignoriert haben: Was passiert, wenn man die Folgeelemente addiert?

Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge. Dann nennt man

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (2.1)$$

die dazugehörige Reihe. Deren Wert ist folgendermaßen definiert:

Definition. Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge, und bezeichne

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (2.2)$$

die Summe der ersten n Folgeelemente. Der Wert der Reihe wird berechnet als

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad (2.3)$$

Definition. Falls $\langle S_n \rangle$ divergiert, so sagt man, die Reihe divergiert. Falls $\langle S_n \rangle$ konvergiert, spricht man von einer konvergenten Reihe.

2.2 Wichtige Sätze

Satz 2.1. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, dann konvergiert $\langle a_n \rangle$ gegen 0.

Korollar 2.2. Konvergiert $\langle a_n \rangle$ gegen $c \neq 0$, dann divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Satz 2.3. Für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ gilt:

- Falls $\alpha > 1$ konvergiert die Reihe.
- Falls $\alpha \leq 1$ divergiert die Reihe.

2.3 Arithmetische Reihen

Satz 2.4.

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{N \cdot (N + 1)}{2} \quad (2.4)$$

Satz 2.5. Sei $\langle a_n \rangle$ eine arithmetische Folge mit $a_n = a_0 + n \cdot c$. Dann gilt:

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert dann und nur dann, wenn $a_0 = c = 0$
-

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n &= a_0 + a_0 + c + a_0 + 2 \cdot c + \cdots + a_0 + N \cdot c \\ &= (N+1) \cdot a_0 + c \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + N) \\ &= (N+1) \cdot a_0 + c \cdot \frac{N \cdot (N+1)}{2} \end{aligned}$$

2.4 Geometrische Reihen

Satz 2.6.

$$\sum_{n=1}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \quad \text{für } q \neq 1 \quad (2.5)$$

(und $= (n+1)$ für $q = 1$)

Satz 2.7. Sei $\langle a_n \rangle$ eine geometrische Folge mit $a_n = a_0 \cdot q^n$, $q \neq 1$. Dann gilt:

-

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n &= a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + \cdots + a_0 \cdot q^N \\ &= a_0 \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^N) \\ &= a_0 \cdot \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \quad \text{für } q \neq 1 \end{aligned}$$

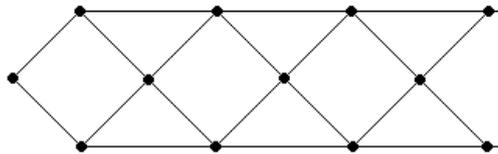
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 \cdot \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$, sonst divergent

Kapitel 3

Beispiele

1. Man bestimme die Anzahl der Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$, die keine aufeinanderfolgenden Zahlen beinhalten.
2. Mischa hat rote und schwarze Plastikperlen und möchte daraus eine Halskette mit n Perlen basteln, wobei keine zwei roten Perlen direkt nebeneinander aufgefädelt sein sollen. Wieviele Möglichkeiten gibt es?
3. Sam möchte einen Streifen der Größe $2 \times n$ mit 1×2 großen Dominosteinen überdecken. Wieviele Möglichkeiten gibt es dafür?
4. Alex zeichnet ein Muster aus rechtwinkligen Dreiecken. Er beginnt mit einer 200mm langen Grundlinie. Genau in der Mitte davon zeichnet er im rechten Winkel dazu eine 2 mm lange Linie und verbindet deren Endpunkt mit einem zufälligen der beiden Endpunkte der Grundlinie. Die so entstehende Linie verwendet er als neue Grundlinie und wiederholt den Vorgang. Das zweite Dreieck ist viel kleiner als das erste, das dritte kleiner als das zweite. Alex fragt sich, wie die Dreiecke wohl aussehen würden, wenn er unendlich lange so weitermachen würde. Außerdem möchte er wissen, wie lange die 2008-te Grundlinie ist.
5. Michi zeichnet ein Muster aus Kreisen. In die Ecke eines Blattes Papier zeichnet sie einen großen Kreis mit Radius 1 dm, sodass dieser beide Ränder des Blattes berührt. Dann zeichnet sie in das Eck zwischen erstem Kreis und Papierrand den größtmöglichen Kreis ein, der Platz hat. Im Eck darunter wieder, und so weiter. Wie groß ist die Summe der Radien, Umfänge und Flächen?
6. Josef hat auf einem Konto 100 Euro. Jedes Jahr bekommt er 4% Guthabenszinsen und zahlt 3 Euro Kontoverwaltungsgebühr. Wieviel Geld besitzt er nach 10 Jahren?
7. Das Gasthaus Möller aktualisiert und erweitert seine Speisekarte am Anfang jedes Monats nach folgendem Prinzip: Zuerst werden gleich viele neue Gerichte erfunden, wie bereits auf der Karte stehen. Dann werden alle gestrichen, die bereits seit 2 Monaten auf der Karte waren. Im September 2008 gab es nur 5 verschiedene Gerichte, im Oktober 7. Wieviele wird es im Juli 2009 geben?
8. Man zeige: $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ (wobei $\langle F_n \rangle$ die Folge der Fibonacci-Zahlen ist).
9. Ein nicht namentlich genannter Student kocht jeden Tag mit folgenden Zutaten: 60% frische Zutaten, 30% Reste des Essens vom Vortag, 10% Reste von vorgestern. Nach einiger Zeit möchte er wissen, wie alt sein Essen im Durchschnitt ist, und gegen welches Durchschnittsalter es konvergieren wird, wenn er die Methode für den Rest seines Lebens fortsetzt. (Heute bedeutet 0 Tage alt, und an den ersten beiden Tagen seines Studentenlebens hat er nur frische Zutaten verwendet.)

10. Sein Wohnungskollege plant eine ähnliche Kochmethode: Er möchte jeden Tag mit $c\%$ frischen Zutaten kochen und den Rest mit Resten vom Vortag auffüllen. Er fragt sich, wie hoch er c wählen muss, damit sein Essen im Durchschnitt nie älter als a) 3, b) t Tage wird.
11. Max und Moritz stehlen einander mit Begeisterung das Taschengeld. Jede Nacht stiehlt Max ein Drittel von Moritzs Besitz, während Moritz gleichzeitig die Hälfte aus Maxs Sparschwein plündert.
12. Zwischen den Staaten Aswan und Bedran ist ein Wettrüsten ausgebrochen. Der Verteidigungsminister von Aswan hat beschlossen, den Waffenbestand jedes Jahr um 10% zu erhöhen und zusätzlich 80% dessen zu produzieren, was dem Geheimdienst zu Folge Bedran im Vorjahr produziert hat. Der Verteidigungsminister von Bedran hat seiner Regierung vorgeschlagen, den Waffenbestand jedes Jahr um 20% zu erhöhen und zusätzlich um 10% des zuletzt bekannten Bestandes von Aswan. Zu Beginn haben beide Staaten 10 Atombomben. Sobald ein Staat mindestens 20% mehr Atombomben hat als der andere, oder mindestens 10000 Atombomben besitzt, greift er an. Wann ist der dritte Weltkrieg, welcher Staat greift zuerst an, und aus welchem der zwei möglichen Gründe?
13. Um jeden Gitterpunkt (x, y) mit nicht negativen ganzen Zahlen als Koordinaten wird ein Quadrat mit dem Gitterpunkt als Mittelpunkt und der Seitenlänge $\frac{0.9}{2^{x+5y}}$ in beliebiger Lage gelegt. Man bestimme den minimalen Flächeninhalt dieser aus unendlich vielen Quadraten bestehenden Figur. (BWF, 2003)
14. In einem Straßennetz, dessen Anfang dargestellt ist, sind die Punkte in der mittleren Horizontalen der Reihe nach mit 1, 4, 7, ... bezeichnet, die oberen Punkte der Reihe nach mit 2, 5, 8, ... und die unteren der Reihe nach mit 3, 6, 9, ... Wie viele Wege von "1" nach "3n+1" gibt es, die Punkte nur in monoton wachsender Reihenfolge besuchen? (Ähnlich zu BWF, 2002, aber anderes Straßennetz)

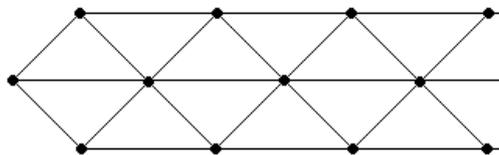


15. Für jede reelle Zahl b bestimme man alle reellen Zahlen x mit $x - b = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. (GWF, 2003)
16. Es sei $A_0 = \{1, 2\}$ und für $n > 0$ entsteht A_n aus A_{n-1} indem man zu A_{n-1} die natürlichen Zahlen hinzunimmt, die sich als Summe von zwei verschiedenen Zahlen aus A_{n-1} darstellen lassen. Es sei $a_n = |A_n|$ die Anzahl der Zahlen in A_n . Man bestimme a_n als Funktion von n . (GFW, 2001)
17. An der TU Graz werden jeden Dezember die Studentenzahlen ermittelt. Es ist bekannt, dass
 - jeden Juni 15% der Studenten ihr Studium beenden
 - jeden August 10% der verbleibenden Studenten ein Auslandsjahr beginnen
 - und entsprechend Ende August die Studenten, die gerade für ein Jahr im Ausland waren, zurück kommen
 - jeden Oktober pro 100 Studenten, die bereits im September inskribiert waren, 20 neue Studenten an die Uni kommen
 - im Dezember 2007 10000 Studenten an der TU Graz studiert haben und 750 auf Auslandsjahr waren.

Wie viele Studenten werden im Dezember 2030 an der TU Graz sein? (Hinweis: Zahlen müssen nicht ganzzahlig sein.)

18. Antons Mutter zahlt Anton Taschengeld folgendermaßen aus: Jeden Monat bekommt er den Betrag, um den sein Vermögen seit dem letzten Monat gewachsen ist (wobei der Vermögensstand am 1. eines jeden Monats gemessen wird und die Taschengeldauszahlung danach erfolgt, also zu den Einnahmen des aktuellen Monats gerechnet werden kann). Anton beginnt völlig pleite und verdient im ersten Monat durch Gartenarbeiten 10 Euro. Er möchte wissen, wie sich sein Vermögen entwickelt, wenn er a) gar nichts tut, b) jeden Monat 1 Euro ausgibt, c) jeden Monat 1 Euro verdient, d) jeden Monat 2 Euro verdient. Außerdem möchte er wissen, um wieviel % er mit d) im n -ten Monat mehr besitzt als mit Methode c) oder b).
19. Man bestimme den Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_0 = 0, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$.
20. Wilma und Fred Feuerstein fahren gemeinsam Auto. Sie wechseln sich dabei ab. Wilma fährt immer genau gleich weit wie Fred gerade gefahren ist, aber Fred fährt nur 90% der Strecke, die Wilma soeben zurückgelegt hat. Am Anfang sitzt Fred am Steuer und fährt 1000m. Wie weit kommen die beiden? Wie lange brauchen sie bis ins 4 km entfernte Felsental?
21. Ein Rundfunkgebühreneintreiber möchte in einer Häuserreihe stichprobenartige Kontrollen durchführen. Er legt dazu vorher fest, welche der Häuser er kontrollieren wird. Da seiner Erfahrung nach Nachbarn einander warnen, möchte er keine nebeneinanderliegenden Häuser überprüfen. Wie viele mögliche Auswahlen gibt es bei einer Häuserzeile mit n Häusern?
22. Burak hat rote und schwarze Plastikperlen und möchte daraus eine Halskette mit n Perlen basteln, sodass immer eine ungerade Anzahl von Perlen einer Farbe nebeneinander ist. Wieviele Möglichkeiten gibt es dafür?
23. Ein Smart ist halb so lang wie ein normales Auto. Auf einem Parkstreifen hätten n Smarts hintereinander Platz. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, den Parkstreifen lückenlos zu verparken?
24. Ankit zeichnet ein Muster aus gleichseitigen Dreiecken. Zuerst zeichnet er ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge von 100cm. Er verbindet dessen Seitenmittelpunkte, um ein zweites Dreieck zu erhalten. Von diesem verbindet er wiederum die Seitenmittelpunkte, um ein drittes Dreieck zu erhalten, und so weiter. Wie groß ist die Summe der Radien und Flächen aller Dreiecke?
25. Eduardo zeichnet ein Muster aus gleichschenkeligen Dreiecken. Er beginnt mit einem gleichschenkeligen Dreieck mit einem Scheitelwinkel von 30° und zwei Seiten mit einer Länge von je 100mm. Die neue Basis verwendet er als Seite in einem weiteren gleichschenkeligen Dreieck, das eine zweite Seite mit derselben Länge enthält, und wieder einen Scheitelwinkel von 30° hat. Die neue Basis verwendet er wieder als eine der gleich langen Seiten im nächsten gleichschenkeligen Dreieck, und so weiter. Wie wird das 2009-te Dreieck aussehen? Wie groß ist die Summe der Radien und Flächen a) der ersten 2009 und b) aller Dreiecke?
26. Philippe hat Schulden in der Höhe von 10000 Euro. Jedes Jahr zahlt er 6% Sollzinsen und zahlt 700 Euro zurück. Wie hoch sind die Schulden nach 13 Jahren?
27. Eine Firma versucht, die Wirtschaftskrise auf folgende Weise zu bekämpfen: In jedem Quartal kündigt sie die Hälfte ihrer Mitarbeiter. Dann stellen sie aus Marketinggründen alle wieder ein, die sie im vorigen Quartal gekündigt hatten. Im dritten Quartal 2008 hatte die Firma 8000 Mitarbeiter, im vierten Quartal 5000 Mitarbeiter. Wie viele Mitarbeiter hat die Firma im vierten Quartal 2009? Zusatz: Konvergiert die Folge?
28. Max und Moritz wollen ihren Spinat nicht essen. Jedes Mal, wenn die Eltern nicht hinsehen, schiebt Max Moritz die Hälfte seiner Portion auf den Teller, während Moritz ihm gleichzeitig ein Drittel seiner Portion zuschiebt. Die Eltern sehen insgesamt n Mal weg. Wer muss am Ende wieviel Spinat essen?

29. In einem Straßennetz, dessen Anfang dargestellt ist, sind die Punkte in der mittleren Horizontalen der Reihe nach mit 1, 4, 7, ... bezeichnet, die oberen Punkte der Reihe nach mit 2, 5, 8, ... und die unteren der Reihe nach mit 3, 6, 9, ... Wie viele Wege von "1" nach "3n+1" gibt es, die Punkte nur in monoton wachsender Reihenfolge besuchen? (BWF, 2002)



30. Man bestimme den Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_0 = 0, a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n}$.
31. In Monochromien gibt es weiße und schwarze Katzen. Jede Kätzin bekommt pro Jahr 8 Junge, davon mit der Fellfarbe jedes Elternteils jeweils zwei männliche und zwei weibliche Kätzchen. Kätzinnen wählen ihre Partner folgendermaßen: Die Hälfte zieht einen Kater mit derselben Fellfarbe vor, die andere Hälfte einen mit der anderen Fellfarbe. (Jeder Kater kann von mehr als einer Kätzin ausgewählt werden, d.h. es muss keine 1-zu-1-Zuteilung gefunden werden.)
Im Jahr 1 nach der großen Sphinx leben in Monochromien 4 schwarze Katzen und 360 weiße Katzen, von denen jeweils genau die Hälfte weiblich ist. Wie viele Katzen mit weißem und wieviele mit schwarzem Fell leben dort im Jahr n ?
32. Man finde eine explizite Form für die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$.
33. Mr. Monk ordnet die Gläser in seinem Küchenschrank neu an. In einem (schmalen) Regal stehen genau zwei Gläser, die gleichmäßig verteilt werden sollen. Das Regal ist 20 cm breit, am Anfang ist der Mittelpunkt des linken Glases 5 cm vom linken Rand entfernt, der des rechten Glases 10 cm. Mr. Monk nimmt zuerst das rechte Glas und platziert es genau zwischen rechtem Rand und linkem Glas. Nun nimmt er das linke Glas, und platziert es genau zwischen linkem Rand und rechtem Glas. Er sieht, dass nun die Position des rechten Glases wieder nicht stimmt, und platziert es wieder genau zwischen linkem Glas und rechtem Rand. Nun passt aber wieder das linke Glas nicht...
Wo werden die Gläser nach 20 Minuten stehen, wenn Monk für das Umstellen eines Glases eine Minute braucht? Wie lange wird er für die Gläser brauchen, wenn er eine Abweichung von einem halben Millimeter nicht mehr mit freiem Auge erkennen kann?
34. Ein Automobilverein führt ein neues Bewertungssystem ein, mit dem Kunden selbst den Restwert ihres Autos berechnen können. Jedes Auto hat zu Beginn 0 "Abnutzungspunkte". Nach jedem Jahr addiert man den aktuellen Kilometerstand. Einige Personen mit sehr unterschiedlichem Fahrverhalten benutzen nun dieses System:
- Deborah fährt jedes Jahr 20000km.
 - Ulrika fährt ebenfalls jedes Jahr 20000km, und im k -ten Jahr wegen eines Urlaubes 5000km zusätzlich.
 - Juho fährt im ersten Jahr 4000km, und ab dann in jedem Jahr 1000km mehr als im Vorjahr.
 - Gareth fährt im ersten Jahr 2000km, und ab dann in jedem Jahr 10% mehr als im Vorjahr.
 - Großvater Kurt fährt die ersten drei Jahre je 60000km, danach aber jedes Jahr nur mehr halb so viel wie im Vorjahr.

Wie hoch sind nach n Jahren die Kilometerstände der verschiedenen Autos, und wieviele Punkte haben die Fahrzeuge? Nach wievielen Jahren hat Gareths Auto mehr Punkte als das von Großvater Kurt?

35. Jacek ist Programmierer und möchte sein Programm verbessern. In jedem Monat löscht er etwa ein Viertel des vorhandenen Codes, und ersetzt ihn durch ein besseres System. Interessanterweise stellt er fest, dass dieses neue System normalerweise etwa gleich umfangreich ist, wie vor zwei Monaten noch sein gesamtes Programm war. Im Juli hat sein Programm 3000 Zeilen, im August 4000. Wie viele Zeilen wird das Programm im Dezember haben?
36. Kasper backt Brot mit Sauerteig. Er hat zu Beginn etwa 100g Sauerteig. Zum Backen vermischt er diesen mit 900g Brotteig, legt von dieser Mischung wieder 100g zur Seite, und backt den Rest. Bis zum nächsten Backtag verwandelt sich die Teig-Sauerteig-Masse wieder zumindest teilweise in Sauerteig: Pro Einheit Sauerteig in der Mischung werden 8 Einheiten des normalen Teiges zu Sauerteig. Nach wievielen Wochen ist weniger als die Hälfte der "Sauerteig"-Masse tatsächlich noch Sauerteig? Wieviel Sauerteig wurde in der Zeit bis dahin verbacken?
37. Leo bastelt einen 3D-Scanner. Dabei werden verschiedene große Raster auf die Oberfläche des zu scannenden Objektes projiziert. Das erste Raster besteht aus Quadraten mit einer Seitenlänge von 5cm, jedes weitere Raster ist um ein Drittel enger. Wieviele verschiedene Raster werden projiziert, wenn das kleinste noch Quadrate mit mindestens 2mm Seitenlänge haben soll? Wenn jedes Raster insgesamt $1\text{m} \times 1\text{m}$ groß ist, wieviele horizontale und vertikale Linien werden dann im Laufe des Prozesses projiziert?
38. Thierry und Bruce spielen ein Eisenbahnspiel. Jede Runde besteht aus zwei Phasen: Investitionen und Einnahmen. Zuerst investieren die Spieler ihr gesamtes Barvermögen. Dann erhalten sie Einnahmen nach folgendem Schema: Alle in der vorigen Runde getätigten Investitionen bringen halb so viel ein, wie sie gekostet hatten, und alle schon vor mindestens zwei Runden getätigten Investitionen bringen jede Runde so viel, wie sie gekostet hatten. (Die in der aktuellen Runde getätigten Investitionen bringen nicht sofort Geld.) Zu Beginn hat jeder Spieler 10 Millionen Taler. Wie viel (Spiel-)Geld besitzt jeder Spieler nach 10 Runden?
In der Familienvariante existieren Zufallskarten. Durch diese besitzt Thierry bereits am Beginn des Spieles eine fertige Fabrik (Investition) im Wert von 5 Millionen (die bereits in der ersten Runde volle Einnahmen bringt). Bruce dagegen darf in der Einnahmen-Phase der 7. Runde seine Einnahmen verdoppelt. Wer hat nun nach 10 Runden mehr Geld?
39. Dan verborgt an ihre Sitznachbarn Geld. Jeden Monat verborgt sie doppelt so viel, wie im vorigen Monat verborgt war, und bekommt dafür die zwei Monate alten Schulden plus 100% Zinsen zurück. Im ersten Monat hatten ihre Kollegen zusammen 2 Euro Schulden bei ihr, im zweiten Monat 3 Euro. Wieviel Geld wird sie im n -ten Monat verliehen haben? Welche (mathematisch) interessante Folge würde sich ergeben, wenn im zweiten Monat insgesamt 4 Euro verborgt gewesen wären? Lässt sich dies verallgemeinern auf alle Fälle, in denen im zweiten Monat doppelt so viele offene Schulden existieren wie im ersten?
40. Die TU Graz bietet für die ÖMO Anfänger- und Fortgeschrittenenkurse an. Zum Anfängerkurs kamen 2006/07 etwa 30 Leute, in den darauffolgenden Jahren jedes Jahr etwa 10% weniger. Zum Fortgeschrittenenkurs kommen 40% der Teilnehmer des Anfängerkurses des Vorjahres und 60% der TeilnehmerInnen des Fortgeschrittenenkurses des Vorjahres. Am ersten Fortgeschrittenenkurs 2008/09 nahmen etwa 10 Personen teil. Falls diese Prozentwerte gleich bleiben, wieviele Teilnehmer können wir dann in den nächsten Jahren erwarten?