48. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene – Lösungen

24./25. Mai 2017

Aufgabe 1. *Es sei eine reelle Zahl α gegeben.*

Man bestimme in Abhängigkeit von α alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(f(x+y)f(x-y)) = x^2 + \alpha y f(y)$$

für alle x, $y \in \mathbb{R}$.

(Walther Janous)

Lösung 1. Wir zeigen: Für $\alpha = -1$ ist $f(x) = x$ die einzige Lösung; sonst gibt es keine Lösung.

Beweis. Mit $x = y = 0$ erhalten wir $f(f(0)^2) = 0$. Mit $x = 0$ und $y = f(0)^2$ erhalten wir $f(0) = 0$. Mit $y = x$ erhalten wir $f(0) = x^2 + \alpha x f(x)$. Für $\alpha = 0$ ergibt das einen Widerspruch, wir nehmen daher an, dass $\alpha \neq 0$. Wir dividieren für $x \neq 0$ durch αx und erhalten $f(x) = -x/\alpha$, für $x = 0$ stimmt das aber wegen $f(0) = 0$ auch. Die Probe ergibt $(x^2 - y^2)/(-\alpha)^3 = x^2 - y^2$, also muss $-\alpha^3 = 1$ und damit $\alpha = -1$ gelten.

(Theresia Eisenkölbl, Clemens Heuberger) □

Lösung 2. Setzt man $x = y = 0$, so sieht man, dass es ein $r \in \mathbb{R}$ mit $f(r) = 0$ gibt. Wir setzen nun $x = y + r$ und erhalten

$$f(0) = (y + r)^2 + \alpha y f(y).$$

Setzt man $y = 0$, so folgt $f(0) = r^2$ und damit $0 = y^2 + 2yr + \alpha y f(y)$. Für $y \neq 0$ dürfen wir durch y dividieren und sehen, dass es sich bei f (mit möglicher Ausnahme bei 0) um eine affin lineare Funktion handelt, d.h. eine Funktion der Form $f(x) = ax + b$ mit noch zu bestimmenden Konstanten a und b. Durch Ansatz und Einsetzen in die Funktionalgleichung erhält man $\alpha = -1$ und $f(x) = x$ für $x \neq 0$. Wäre nun $r \neq 0$, so wäre $f(r) = r \neq 0$, ein Widerspruch. Damit ist $f(x) = x$ und $\alpha = -1$ die einzige Möglichkeit und offensichtlich auch wirklich eine Lösung.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 3. Wir ersetzen x und y wie folgt.

- $x = y = 0$ zeigt $f(f(0)^2) = 0$, d.h. mit $C = f(0)$ haben wir $f(C^2) = 0$.
- $x - y = C^2$ ergibt
$$f(0) = (y + C^2)^2 + \alpha y f(y). \tag{1}$$
- $x + y = C^2$ ergibt
$$f(0) = (C^2 - y)^2 + \alpha y f(y). \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) implizieren $(y + C^2)^2 = (y - C^2)^2$, also $C^2 y = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Deshalb muss $C = 0$ sein.

Mit (1) oder (2) folgt $0 = y^2 + \alpha y f(y)$.

1. $\alpha = 0$ ergibt den Widerspruch $y^2 = 0$ für alle reellen y.

2. $\alpha \neq 0$ führt auf $f(y) = -\frac{y}{\alpha}$, wenn $y \neq 0$.

   Wegen $C = f(0) = 0$ gilt sogar $f(x) = -\frac{x}{\alpha}$ für $x \in \mathbb{R}$. Die Verifikationsprobe ergibt

$$f\Big(\Big(-\frac{x+y}{\alpha}\Big)\cdot\Big(-\frac{x-y}{\alpha}\Big)\Big) = x^2 + \alpha y \cdot \Big(-\frac{y}{\alpha}\Big),$$

   d.h.

$$-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{x^2-y^2}{\alpha^2} = x^2 - y^2$$

   für alle x, $y \in \mathbb{R}$. Deshalb erhalten wir $\alpha^3 = -1$, also $\alpha = -1$.

Damit haben wir gezeigt, dass es genau für $\alpha = -1$ eine Lösung der Funktionalgleichung gibt, nämlich $f(x) = x$.

(Walther Janous) □

Aufgabe 2. *Auf einer Kette sind 2016 Perlen im Kreis angeordnet, von denen jede eine der Farben schwarz, blau oder grün hat. In jedem Schritt wird gleichzeitig jede Perle durch eine neue Perle ersetzt, wobei sich die Farbe der neuen Perle wie folgt bestimmt: Falls die beiden ursprünglichen Nachbarn dieselbe Farbe hatten, hat die neue Perle deren Farbe. Falls die Nachbarn zwei verschiedene Farben hatten, hat die neue Perle die dritte Farbe.*

(a) Gibt es eine solche Kette, auf der die Hälfte der Perlen schwarz und die andere Hälfte grün ist, aus der man mit solchen Schritten eine Kette aus lauter blauen Perlen erhalten kann?

(b) Gibt es eine solche Kette, auf der tausend Perlen schwarz und die übrigen grün sind, aus der man mit solchen Schritten eine Kette aus lauter blauen Perlen erhalten kann?

(c) Ist es möglich, von einer Kette, die genau zwei benachbarte schwarze und sonst nur blaue Perlen enthält, mit solchen Schritten zu einer Kette zu kommen, die genau eine grüne und sonst nur blaue Perlen enthält?

(Theresia Eisenkölbl)

Lösung 1. (a) Da 2016 durch 4 teilbar ist, kann man abwechselnd zwei schwarze und zwei grüne Perlen nehmen. Im ersten Schritt werden dann bereits alle durch blaue Perlen ersetzt.

(b) Wenn wir der Farbe Blau die Zahl 0 zuordnen, der Farbe Grün die Zahl 1 und der Farbe Schwarz die Zahl 2, gilt in jedem Schritt, dass die neue Farbe einer Perle modulo 3 gleich der negativen Summe ihrer beiden alten Nachbarn ist. Die neue Gesamtsumme aller Perlenfarben modulo 3 kann man also berechnen, indem man die alte Gesamtsumme aller Perlenfarben mit zwei multipliziert (da jede alte Perle zu zwei neuen beiträgt) und das Vorzeichen umkehrt. Modulo 3 ist eine Multiplikation mit -2 aber gleich einer Multiplikation mit 1, also bleibt die Gesamtsumme modulo 3 immer gleich.

   Für lauter blaue Perlen ist die Gesamtsumme 0. Für 1000 schwarze und 1016 grüne Perlen ist sie aber $2000 + 1016 \equiv 1 \pmod 3$. Es ist daher für keine Anordnung von 1000 schwarzen und 1016 grünen Perlen möglich, sie mit solchen Schritten in eine Kette aus lauter blauen Perlen zu verwandeln.

(c) Mit der obigen Zuordnung von Resten modulo 3 wird in jedem Schritt die Summe modulo 3 aller Perlenfarben in ungerader Position zur Summe modulo 3 der Perlenfarben in gerader Position und umgekehrt. Wenn zu Beginn diese beiden Summen gleich A und B sind, haben wir daher modulo 3 am Ende immer noch dieselben beiden Summen, möglicherweise mit vertauschten Plätzen.

Zu Beginn haben wir aber die Summen 2 und 2 modulo 3 – sowohl unter den geraden als auch den ungeraden Plätzen befindet sich genau eine schwarze Perle mit Wert 2, und sonst nur blaue Perlen mit Wert 0. Am Ende dagegen sollen wir Summen 1 und 0 haben – eine der beiden Summen ergibt sich aus lauter blauen Perlen mit Wert 0, die andere ergibt sich aus einer grünen Perle mit Wert 1 und sonst nur blauen mit Wert 0. Es ist daher nicht möglich.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 1a. Teil (a) siehe Lösung 1.

Für Teil (b) und (c) legen wir die Perlenketten zweier aufeinanderfolgender Schritte nebeneinander. Als „Dreiergruppe“ bezeichnen wir eine Menge bestehend aus einer Perle der neuen Kette, und ihren beiden Nachbarn in der alten Kette. So eine Dreiergruppe enthält also gemäß Angabe entweder drei gleichfarbige Perlen, oder drei verschiedenfarbige Perlen. Es gibt 2016 solcher Dreiergruppen.

Nun „summieren“ wir alle solche Dreiergruppen und zählen, welche Farbe in der Summe wie oft vorkommt (wobei Perlen, die in mehreren Dreiergruppen enthalten sind, mehrfach gezählt werden), also

$$\begin{aligned} S &:= \sum_{D\in\text{Dreiergruppen}} \text{AnzahlSchwarz}(D), \\ G &:= \sum_{D\in\text{Dreiergruppen}} \text{AnzahlGruen}(D), \\ B &:= \sum_{D\in\text{Dreiergruppen}} \text{AnzahlBlau}(D). \end{aligned}$$

Für jede einzelne Dreiergruppe D gilt wie oben beschrieben

$$\text{AnzahlSchwarz}(D) \equiv \text{AnzahlGruen}(D) \equiv \text{AnzahlBlau}(D) \pmod 3,$$

also muss auch für deren Summe $S \equiv G \equiv B \pmod 3$ gelten.

Umgekehrt sehen wir, dass in S, G und B jede Perle der alten Kette doppelt, jede der neuen Kette ein Mal gezählt wurde. Seien s_n, g_n und b_n die Anzahlen schwarzer, grüner und blauer Perlen in der neuen Kette nach dem n-ten Schritt. Dann gilt nach dem n-ten Schritt:

$$\begin{aligned} S &= 2s_{n-1} + s_n, \\ G &= 2g_{n-1} + g_n, \\ B &= 2b_{n-1} + b_n. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in $S \equiv G \equiv B \pmod 3$ erhalten wir daher

$$2s_{n-1} + s_n \equiv 2g_{n-1} + g_n \equiv 2b_{n-1} + b_n \pmod 3.$$

In Teil (b) soll am Ende, also nach N Schritten, gelten, dass $s_N = 0$, $g_N = 0$ und $b_N = 2016 \equiv 0 \pmod 3$, also $s_N \equiv g_N \equiv b_N \pmod 3$. Einsetzen ergibt

$$2s_{N-1} + s_N \equiv 2g_{N-1} + g_N \equiv 2b_{N-1} + b_N \pmod 3,$$

und folglich nach Subtraktion von s_N und Multiplikation mit 2 die äquivalente Bedingung

$$s_{N-1} \equiv g_{N-1} \equiv b_{N-1} \pmod 3.$$

Daher haben wir dieselben Voraussetzungen wie zuvor und können das analog fortsetzen auf Schritt $N-2$, $N-3$, und so weiter, bis wir $s_0 \equiv g_0 \equiv b_0 \pmod 3$ erhalten. Dies ist ein Widerspruch zu $s_0 = 1000 \equiv 1 \pmod 3$, $g_0 = 1016 \equiv 2 \pmod 3$ und $b_0 = 0$.

Für Teil (c) betrachten wir immer nur die Hälfte der Perlen. In jedem Schritt hängt die neue Farbe der Perlen an geraden Positionen nur von der alten Farbe der Perlen an den ungeraden Positionen ab, und umgekehrt. Wenn wir zu Beginn alle Perlen an geraden Positionen durch transparente Perlen ersetzen (und zwei transparente Nachbarn in jedem Schritt wieder eine transparente Perle ergeben), dann stimmen alle Betrachtungen über Summen und Dreiergruppen oben weiterhin.

Nun betrachten wir jene Hälfte der Perlen, die am Ende alle blau sein sollen. (D.h. nehmen wir an, es gibt eine Anordnung, bei der nach N Schritten genau eine grüne Perle übrig und der Rest blau ist. Sei diese grüne Perle o. B. d. A. an einer geraden Position. Wenn N gerade ist, ersetzen wir zu Beginn alle Perlen an geraden Positionen durch transparente, wenn N ungerade ist, alle Perlen an ungeraden Positionen. Dadurch haben wir nun eine Anordnung, in der zu Beginn eine Perle schwarz und der Rest blau oder transparent ist, und am Ende alle blau oder transparent.)

Für diese Schrittfolge können wir nun dasselbe Gegenargument wie in Teil (b) verwenden: Am Ende ist $s_N \equiv g_N \equiv b_N \equiv 0 \pmod 3$ gefordert, also müsste auch am Anfang $s_0 \equiv g_0 \equiv b_0 \pmod 3$ gelten. Es gilt aber $s_0 = 1$, $g_0 = 0$ und $b_0 = 1007$ (mit zusätzlich $t_0 = 1008$ transparenten Perlen).

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 2. Alternative Lösung nur von Teil (c):

Die Farben nach jedem Schritt hängen eindeutig von den Farben davor ab. Zu Beginn ist die Kette, wenn wir sie als regelmäßiges 2016-Eck auflegen, symmetrisch bezüglich jener Symmetrieachse, die zwischen den beiden schwarzen Perlen hindurch führt und die Kette in zwei gleich lange Teile zu je 1008 Perlen teilt. In jedem Schritt bleibt diese Symmetrie erhalten.

Das heißt, dass auch am Ende die Kette immer noch symmetrisch bezüglich derselben Achse sein muss. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass die Kette am Ende eine einzelne grüne Perle enthalten soll, da diese einzelne Perle entweder links oder rechts der Symmetrieachse liegt und ihr Gegenüber sicher blau ist.

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 3. Alternative Lösung nur von Teil (c):

Nehmen wir an, wir haben eine Kette, die aus 1008 einfarbigen 2er-Blöcken besteht. Dann hat auch die nach dem nächsten Schritt erhaltene Kette wieder diese Form.

Beweis: Wir betrachten zwei benachbarte Zweierblöcke, o. B. d. A. seien das die Perlen 1, 2, 3 und 4 (wobei 1 und 2 dieselbe Farbe haben, und 3 und 4 dieselbe Farbe haben). Die neue Farbe von Perle 2 berechnet sich aus den alten Farben von Perlen 1 und 3. Diese sind aber identisch zu den Farben von 2 und 4, aus denen sich die neue Farbe der Perle 3 berechnet. Daher haben nach diesem Schritt Perlen 2 und 3 dieselbe Farbe.

Analog hat auch Perle 4 dieselbe Farbe wie Perle 5, Perle 6 dieselbe Farbe wie Perle 7, und so weiter, womit die Behauptung bewiesen ist.

Zu Beginn haben wir eine solche Situation (mit einem schwarzen und 1007 blauen Zweierblöcken), daher ist es nicht möglich, zur gewünschten Endsituation zu kommen, in der eine einzelne grüne Perle existieren soll.

(Florian Hübler, Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 4. Zunächst beachten wir, dass alle Perlen an geradzahligen Positionen nur die Perlen an ungeradzahligen Positionen im nächsten Schritt beeinflussen und umgekehrt; man kann das Problem also dadurch zerlegen, dass man nur 1008 Perlen im Kreis betrachtet, wo sich die neue Farbe der i-ten Perle aus der i-ten und $i+1$-ten nach der Anleitung ergibt.

Wir geben Färbungen durch Wörter $w_1 \dots w_{1008}$ über dem Alphabet $\{b, g, s\}$ an, wobei b, g und s den Farben blau, grün und schwarz entsprechen.

Wir ordnen jeder Farbe f jene Transposition τ_f von b, g, s zu, die die ursprüngliche Farbe nicht ändert und die anderen beiden vertauscht, also beispielsweise $\tau_b(b) = b$, $\tau_b(g) = s$ und $\tau_b(s) = g$. Einem Wort $f_1 \dots f_L$ ordnen wir die Permutation $\tau_{f_1 \dots f_L} = \tau_{f_L} \circ \cdots \circ \tau_{f_1}$ zu, also jene Permutation, die man erhält, wenn man die den einzelnen Buchstaben zugeordneten Transpositionen nacheinander anwendet.

Sei nun eine Färbung der Kette $w_1 \dots w_{1008}$ gegeben. Wir stellen die Frage, aus welchen Färbungen diese Kette entstanden sein kann, also welche Kette $v_1 \dots v_{1008}$ im vorigen Schritt vorgelegen haben könnte. Dazu setzen wir einmal die Farbe v_1 an Position 1 fest. Dann sind durch $v_{j+1} = \tau_{w_j}(v_j)$ für $1 \le j < 1008$ bereits alle übrigen Farben gegeben (da sich aus der alten Farbe v_j an Position j und der daraus entstandenen neuen Farbe w_j die alte Farbe der zweiten Nachbarperle v_{j+1} eindeutig berechnen lässt). Falls nun $v_1 = \tau_{w_{1008}}(v_{1008})$ gilt, war v_1 eine zulässige Wahl, sonst nicht.

Weiters definieren wir für eine Farbe w die "inverse Farbe" $\overline{w}$ durch $\overline{b} = b$, $\overline{g} = s$ und $\overline{s} = g$, also durch Anwendung der Transposition, die s und g vertauscht. Das setzen wir auf Wörter fort: $\overline{w_1 \dots w_L} = \overline{w_1} \dots \overline{w_L}$.

Lemma. Sei $v_1 \dots v_{1008}$ eine Färbung, aus der in endlich vielen Schritten die Färbung b^{1008} entsteht, also ein Wort aus 1008 Buchstaben b. Dann hat $v_1 \dots v_{1008}$ die Gestalt

$$(a_1 \dots a_9 \overline{a_1 \dots a_9})^{56}.$$

Beweis. Wir beweisen dies durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Schritte.

Wir nehmen nun an, dass $v_1 \dots v_{1008}$ in einem Schritt in $w_1 \dots w_{1008}$ übergeht und dass $w_1 \dots w_{1008} = (A\overline{A})^{56}$ für passendes $A = a_1 \dots a_9$. Falls $v_1 \dots v_{1008}$ nur aus blauen Perlen besteht, hat es sicher die geforderte Form und wir sind fertig. Andernfalls überprüfen wir, ob in $v_1 \dots v_{1008}$ mindestens eine schwarze Perle vorkommt. Wenn nicht, so vertauschen wir im folgenden Argument überall schwarz und grün, da man leicht zeigen kann, dass alle weiteren Überlegungen auch nach Vertauschung dieser Farben noch analog gelten. Damit und nach geeigneter Rotation können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $v_1 = s$.

Die Permutation τ_A ist als Produkt von 9 Transpositionen selbst eine ungerade Permutation. Da die einzigen ungeraden Permutationen einer dreielementigen Menge Transpositionen sind, muss τ_A eine Transposition sein.

Da in $\overline{A}$ gegenüber A die Farben s und g vertauscht sind, kann man auch aus τ_A leicht $\tau_{\overline{A}}$ berechnen, indem man s durch g ersetzt und umgekehrt.

Für jede der drei möglichen Transpositionen $\tau_A = \tau_g = (bs)$, $\tau_A = \tau_s = (bg)$ und $\tau_A = \tau_b = (sg)$ untersuchen wir den Wert von v_{18m+1} für $m \ge 0$. Durch Induktion nach m erhalten wir wegen $v_{k+18} = \tau_{A\overline{A}}(v_k)$ die Tabelle

τ_A	$\tau_{\overline{A}}$	$\tau_{A\overline{A}}$	v_{54m+1}	v_{54m+19}	v_{54m+37}
(bs)	(bg)	$(bg)(bs) = (bsg)$	s	g	b
(bg)	(bs)	$(bs)(bg) = (bgs)$	s	b	g
(sg)	(sg)	id	s	s	$s.$

Da $v_1 = v_{1009} = v_{54\cdot 18+37}$, folgt $\tau_A = (sg)$. Damit gilt also $v_{10} = \tau_A(v_1) = g = \overline{v_1}$, und alles weitere folgt durch Periodizität. ∎

Aus dem Lemma ersieht man sofort, dass die Anzahl der schwarzen Perlen in jedem Schritt stets gleich der Anzahl der grünen Perlen ist.

Somit sind (b) und (c) unmöglich.

(Clemens Heuberger) □

Aufgabe 3. *Es sei $(a_n)_{n\ge 0}$ die Folge rationaler Zahlen mit $a_0 = 2016$ und*

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{a_n}$$

für alle $n \ge 0$.

Man zeige, dass diese Folge kein Quadrat einer rationalen Zahl enthält.

(Theresia Eisenkölbl)

Lösung 1. Wir können eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$, deren Nenner nicht durch 5 teilbar ist, modulo 5 betrachten, indem wir den Rest von ab^{-1} modulo 5 betrachten, wobei b^{-1} das Inverse von b modulo 5 ist. Dieser Rest hängt von der Darstellung der rationalen Zahl nicht ab und erfüllt auch die üblichen Rechenregeln. Insbesondere gilt, dass ein Quadrat einer rationalen Zahl, deren Nenner nicht durch 5 teilbar ist, als Rest einen quadratischen Rest modulo 5 haben muss.

Wir betrachten daher nun die Folgenglieder modulo 5, solange diese Reste ungleich 0 bleiben und der nächste Rest somit definiert ist, und erhalten die Folge der Reste

$$\begin{aligned}
&a_0 \equiv 1 \pmod 5,\\
&a_1 \equiv 1 + 2 \equiv 3 \pmod 5,\\
&a_2 \equiv 3 + 2 \cdot 3^{-1} \equiv 3 + 2 \cdot 2 \equiv 2 \pmod 5,\\
&a_3 \equiv 3 \pmod 5,\\
&a_4 \equiv 2 \pmod 5,\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Die Folge der Reste nimmt also nach dem Anfangswert nur die Werte 2 und 3 an. Das sind aber keine quadratischen Reste modulo 5. Da auch $a_0 = 2016$ keine Quadratzahl ist, gibt es somit kein Quadrat einer rationalen Zahl in der Folge.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. Wir berechnen $a_1 = 2016 + 2/2016 = \frac{1008 \cdot 2016 + 1}{1008}$.

Wir setzen $a_n = \frac{b_n}{c_n}$ mit b_n und c_n in $\mathbb{Z}$.

Dann gilt

$$\frac{b_{n+1}}{c_{n+1}} = \frac{b_n}{c_n} + \frac{2c_n}{b_n} = \frac{b_n^2 + 2c_n^2}{b_n c_n}.$$

Wenn wir also $b_{n+1} = b_n^2 + 2c_n^2$ und $c_{n+1} = b_n c_n$ mit $b_1 = 1008 \cdot 2016 + 1$ und $c_1 = 1008$ definieren, dann gilt $a_n = b_n/c_n$ für $n \geq 1$. Wenn b_{n+1} und c_{n+1} einen gemeinsamen Primfaktor p haben, dann gibt es zwei Möglichkeiten: Falls er c_n teilt, dann muss er im Zähler b_{n+1} auch b_n^2 und damit b_n teilen und war schon in b_n/c_n ein gemeinsamer Primfaktor. Falls er b_n teilt, dann muss er im Zähler auch $2c_n^2$ teilen und war damit entweder schon in b_n/c_n ein gemeinsamer Primfaktor oder $p = 2$.

Da a_1 in gekürzter Form vorliegt, ist also die einzige Möglichkeit $p = 2$. Es gilt aber, dass b_{n+1} genau dann gerade ist, wenn schon b_n gerade war. Da b_1 ungerade ist, kann dieser Fall also auch nicht auftreten und die Brüche liegen alle in gekürzter Form vor.

Damit nun für $n \geq 1$ der Bruch $\frac{b_{n+1}}{c_{n+1}}$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist, muss $b_n c_n$ eine Quadratzahl sein und es müssen wegen der Teilerfremdheit von b_n und c_n auch b_n und c_n Quadratzahlen sein und damit $\frac{b_n}{c_n}$ schon das Quadrat einer rationalen Zahl gewesen sein.

Da aber weder a_0 noch a_1 Quadrate einer rationalen Zahl sind, gibt es kein Quadrat in der gegebenen Folge.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2a. Wie in Lösung 2 definieren wir b_n und c_n und sehen, dass $\operatorname{ggT}(b_n, c_n) = 1$ für alle n gilt. Damit $\frac{b_n}{c_n}$ das Quadrat einer rationalen Zahl sein kann, müssen daher sowohl b_n als auch c_n Quadrate ganzer Zahlen sein. Wir zeigen nun, dass dies bereits für c_n nie erfüllt werden kann.

Es gilt $c_1 \equiv 0 \pmod 7$, und daher wegen $c_{n+1} = b_n c_n$ auch $c_n \equiv 0 \pmod 7$ für alle $n \geq 1$. Wegen $\operatorname{ggT}(b_n, c_n) = 1$ folgt daraus sofort $b_n \not\equiv 0 \pmod 7$ für alle $n \geq 1$.

Damit c_n eine Quadratzahl sein kann, muss jeder Primfaktor gerade oft vorliegen. Zählen wir aber die Vielfachheit von 7, so erhalten wir $v_7(c_1) = 1$ und $v_7(c_{n+1}) = v_7(b_n) + v_7(c_n) = 0 + v_7(c_n)$, also $v_7(c_n) = 1$ für alle n.

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 2b. Wir wählen Folgen $(b_n)_{n\geq 0}$ und $(c_n)_{n\geq 0}$ so, dass $a_n = b_n/c_n$ für $n \geq 0$ gilt. Dazu setzen wir $b_0 = 2016$ und $c_0 = 1$. Wenn $a_n = b_n/c_n$ für ein $n \geq 0$ gilt, so gilt

$$a_{n+1} = \frac{b_n}{c_n} + \frac{2c_n}{b_n} = \frac{b_n^2 + 2c_n^2}{b_n c_n}.$$

Wir wählen daher

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n^2 + 2c_n^2, \\ c_{n+1} &= b_n c_n \end{aligned}$$

für $n \geq 0$. Insbesondere ergibt sich $b_1 = 2016^2 + 2$ und $c_1 = 2016$.

Wir behaupten nun, dass für $n \geq 1$ stets $v_7(b_n) = 0$ und $v_7(c_n) = 1$ gilt. Wir beweisen das durch vollständige Induktion nach $n \geq 1$. Für $n = 1$ stimmt das offensichtlich. Aus den Rekursionen erhalten wir $b_{n+1} \equiv b_n^2 \pmod 7$, weil $7 \mid c_n$, und damit ist auch b_{n+1} nicht durch 7 teilbar. Außerdem erhalten wir $v_7(c_{n+1}) = v_7(b_n c_n) = v_7(b_n) + v_7(c_n) = 0 + 1 = 1$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Damit gilt $v_7(a_n) = v_7(b_n) - v_7(c_n) = 0 - 1 = -1$ für $n \geq 1$, somit ist a_n für $n \geq 1$ kein Quadrat einer ganzen Zahl. Außerdem ist $a_1 = 2016$ keine Quadratzahl, womit der Beweis vollständig ist.

(Clemens Heuberger, Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 3. Angenommen, die Folge enthielte eine rationale Quadratzahl für $n \geq 1$. Dann gilt $a_n + \frac{2}{a_n} = \left(\frac{r}{s}\right)^2$, wobei r und s positive ganze Zahlen mit $\operatorname{ggT}(r,s) = 1$ sind. Also hat $a_n^2 - \left(\frac{r}{s}\right)^2 a_n + 2 = 0$ zu gelten. Die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung ist $\Delta = \frac{1}{s^4}(r^4 - 8s^4)$. Da a_n nach Annahme rational ist, gilt dann

$$r^4 - 8s^4 = w^2, \qquad \operatorname{ggT}(r,s) = 1, \qquad r,s,w \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Wir zeigen nun, dass diese Gleichung nur Lösungen mit $s = 0$ besitzt.

Sei (r,s,w) eine Lösung von (3) mit minimalem $s > 0$.

Offensichtlich sind r und w von gleicher Parität. Sei $g := \operatorname{ggT}(r,w)$. Dann folgt aus (3), dass $g^2 \mid 8s^4$ und wegen $\operatorname{ggT}(r,s) = 1$ folgt daraus $g^2 \mid 8$, also $g \in \{1,2\}$.

Wir schließen zunächst den Fall $g = 2$ aus: In diesem Fall könnten wir $r = 2r'$, $w = 2w'$ mit $\operatorname{ggT}(r',w') = 1$ schreiben; außerdem wäre s wegen $\operatorname{ggT}(r,s) = 1$ ungerade. Wir erhalten $4r'^4 - 2s^4 = w'^2$. Damit muss w' gerade sein, die rechte Seite damit durch 4 teilbar sein, woraus $2 \mid s$ folgt, ein Widerspruch.

Daher ist nur mehr der Fall $\operatorname{ggT}(r,w) = 1$ zu behandeln. Wir faktorisieren (3) in der Form

$$(r^2 - w)(r^2 + w) = 8s^4. \tag{4}$$

Wegen $r \equiv w \pmod 2$ und $\operatorname{ggT}(r,w) = 1$ folgt, dass

$$\operatorname{ggT}(r^2 - w, r^2 + w) = \operatorname{ggT}(r^2 - w, 2w) = \operatorname{ggT}(r^2 - w, 2) = 2. \tag{5}$$

Es gibt daher teilerfremde positive ganze Zahlen a und b mit ungeradem a und

$$\begin{aligned} r^2 - w &= 2a^4, \\ r^2 + w &= 4b^4 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} r^2 - w &= 4b^4, \\ r^2 + w &= 2a^4, \end{aligned}$$

woraus durch Summation der beiden Gleichungen und Halbierung in beiden Fällen

$$r^2 = a^4 + 2b^4, \qquad \operatorname{ggT}(a,b) = 1, \qquad a \equiv 1 \pmod 2 \tag{6}$$

folgt. Wir halten fest, dass $ab = s$.

Aus (6) folgt sofort, dass $r \equiv a \equiv 1 \pmod 2$ und damit $r^2 \equiv a^4 \equiv 1 \pmod 4$ gelten, weshalb b gerade sein muss. Da damit $\mathrm{ggT}(a, 2b^4) = 1$, folgt $\mathrm{ggT}(a, r) = 1$. Wir faktorisieren (6) in der Form

$$(r - a^2)(r + a^2) = 2b^4.$$

Es gilt $\mathrm{ggT}(r - a^2, r + a^2) = \mathrm{ggT}(r - a^2, 2r) = 2$, also wegen $2 \mid b$ für passende teilerfremde positive ganze Zahlen x und y mit ungeradem x auch

$$\begin{aligned} r - a^2 &= 2x^4, \\ r + a^2 &= (2y)^4 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} r - a^2 &= (2y)^4, \\ r + a^2 &= 2x^4. \end{aligned}$$

Als halbierte Differenz ergibt sich

$$\pm a^2 = x^4 - 8y^4, \qquad \mathrm{ggT}(x, y) = 1, \qquad x \equiv 1 \pmod 2 \tag{7}$$

mit $b = 2xy$.

Da x ungerade ist, muss auch a ungerade sein. Betrachtet man (7) modulo 4 sieht man, dass nur das positive Vorzeichen möglich ist, also

$$a^2 = x^4 - 8y^4, \qquad \mathrm{ggT}(x, y) = 1, \qquad x \equiv 1 \pmod 2. \tag{8}$$

Aus $s = ab$ und $b = 2xy$ folgt $s = 2axy$, wir haben damit eine weitere Lösung der ursprünglichen Gleichung (3) erhalten, wobei jedoch $0 < y < s$, ein Widerspruch zur Minimalität der ursprünglichen Lösung.

Da $a_0 = 2016$ keine Quadratzahl ist, gibt es also keine Quadrate von rationalen Zahlen in der Folge.

(Clemens Heuberger, Walther Janous) □

Aufgabe 4. *(a) Man bestimme den größtmöglichen Wert M, den $x + y + z$ annehmen kann, wenn x, y und z positive reelle Zahlen mit*

$$16xyz = (x + y)^2(x + z)^2$$

sind.

(b) Man zeige, dass es unendlich viele Tripel (x, y, z) positiver rationaler Zahlen gibt, für die

$$16xyz = (x + y)^2(x + z)^2 \textit{ und } x + y + z = M$$

gelten.

(Karl Czakler)

Lösung 1. (a) Aufgrund der Nebenbedingung und der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung gilt

$$4\sqrt{xyz} = (x + y)(x + z) = x(x + y + z) + yz \geq 2\sqrt{xyz(x + y + z)}.$$

Also gilt $2 \geq \sqrt{x + y + z}$ und damit $4 \geq x + y + z$. Da wir im zweiten Teil unendlich viele solche Tripel angeben, für die $x + y + z = 4$ gilt, ist $M = 4$ das gesuchte Maximum.

(b) Im Gleichheitsfall muss in der Abschätzung des ersten Teils Gleichheit in der Mittelungleichung gelten, also $x(x+y+z)=yz$, und natürlich außerdem $x+y+z=4$. Wählen wir $y=t$, mit t rational, erhalten wir $4x=t(4-x-t)$ und damit $x=\frac{4t-t^2}{4+t}$ und $z=4-x-y=\frac{16-4t}{4+t}$. Wenn nun noch $0<t<4$ gilt, dann sind diese Ausdrücke alle positiv und rational und auch die Nebenbedingung ist erfüllt.

Die Tripel $\left(\frac{4t-t^2}{4+t}, t, \frac{16-4t}{4+t}\right)$ mit $0<t<4$ rational sind also unendlich viele Gleichheitsfälle.

(Karl Czakler) □

Lösung 1a. Wie in Lösung 1 zeigen wir, dass für das gesuchte Maximum $M\le 4$ gilt, und die Gleichheit $M=x+y+z=4$ für $yz=4x$ auftritt. Es gelten also $y+z=4-x$ und $yz=4x$. Deshalb sind y und z Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\xi^2-(4-x)\xi+4x=0.$$

Wir zeigen nun, dass diese Gleichung für unendlich viele rationale Werte von x mit $0<x<4$ zwei positive rationale Lösungen besitzt. Die Lösungen sind aber $\xi_{1,2}=\frac{1}{2}(4-x\pm\sqrt{(4-x)^2-16x})$.

Wir müssen also unendlich viele rationale x mit $0<x<4$ finden, für die $x^2-24x+16=w^2$ mit $w\in\mathbb{Q}$, also $(x-12)^2-w^2=128$, d.h. $(x-12-w)(x-12+w)=128$ gilt.

Mit Hilfe von $x-12-w=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, erhalten wir $x-12+w=\frac{128}{\alpha}$ und daraus durch Addition bzw. Subtraktion $x=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{128}{\alpha}\right)+12=\frac{\alpha^2+24\alpha+128}{2\alpha}=\frac{(\alpha+8)(\alpha+16)}{2\alpha}$ bzw. $w=\frac{1}{2}\left(\frac{128}{\alpha}-\alpha\right)$.

Für rationales α mit $-16<\alpha<-8$ gilt also $x=\frac{(\alpha+8)(\alpha+16)}{2\alpha}>0$, $y=\frac{1}{2}(4-x+w)=\frac{1}{2}(-\alpha-8)>0$ und $z=\frac{1}{2}(4-x-w)=\frac{4}{\alpha}(-\alpha-16)>0$. Damit erhalten wir für diese Werte von α die unendlich vielen Tripel mit den gewünschten Eigenschaften.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Wir sollen

$$x+y+z=\frac{16xyz(x+y+z)}{(x+y)^2(x+z)^2}$$

über alle x, y, $z>0$ maximieren. Wenn die rechte Seite für ein Tripel (x,y,z) maximal ist, dann nimmt sie auch für (tx,ty,tz) diesen maximalen Wert an. Durch geeignete Wahl von t können wir dann erreichen, dass auch die Nebenbedingung erfüllt ist. Deswegen reicht es, das Maximum der rechten Seite zu bestimmen.

Wähle $y>0$ und $x>0$ beliebig. Wir betrachten

$$f(z)=\frac{16xyz(x+y+z)}{(x+y)^2(x+z)^2}$$

für $z\ge 0$. Es gilt $f(0)=0$ und $\lim_{z\to\infty}f(z)=16xy/(x+y)^2\le 4$ (nach der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung).

Differentiation nach z ergibt

$$f'(z)=\frac{16(x^2+xy+xz-yz)xy}{(x+y)^2(x+z)^3}.$$

Die einzige Möglichkeit für ein Maximum in Inneren des Intervalls $(0,\infty)$ ist also $z=x(x+y)/(y-x)$. Wegen $z\ge 0$ ist das nur für $y>x$ möglich. Es gilt aber $f(x(x+y)/(y-x))=4$. Da die Funktion also am Rand den Wert 4 nicht überschreitet und der einzige mögliche Wert für ein Maximum 4 ergibt, ist 4 das gesuchte Maximum M. Wählen wir nun positive rationale Zahlen x, y mit $x<y$, sodass y/x für jedes gewählte Tripel verschieden ist, sowie $z=x(x+y)/(y-x)$, dann wird das Maximum für diese unendlich vielen rationalen Tripel auch angenommen.

Wenn wir nun wie zu Beginn beschrieben, diese Lösungen so durch Multiplikation mit einer geeigneten rationalen Zahl t skalieren, dass sie auch die Nebenbedingung erfüllen, dann erhalten wir noch immer unendlich viele verschiedene rationale Tripel, da y/x sich nicht ändert und jeweils verschieden war.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 2a. Wir lösen die Maximierungsaufgabe mit Nebenbedingungen durch die Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Dazu zeigen wir zunächst, dass die Nebenbedingung eine beschränkte Menge definiert.

Dazu benutzen wir die Abschätzungen $(x+y)^2 \geq 4xy$ und $(x+z)^2 \geq 4xz$ (arithmetisch-geometrische Mittelungleichung) sowie $(x+y)^2 \geq y^2$ und $(x+z)^2 \geq z^2$ und erhalten damit für x, y, $z > 0$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
16xyz &= (x+y)^2(x+z)^2 \geq 16x^2yz && \Rightarrow && x \leq 1,\\
16xyz &= (x+y)^2(x+z)^2 \geq 4xy^2z && \Rightarrow && y \leq 4,\\
16xyz &= (x+y)^2(x+z)^2 \geq 4xyz^2 && \Rightarrow && z \leq 4.
\end{aligned}$$

Wenn (x, y, z) am Rand des Definitionsbereichs liegt, also eine der Variablen 0 ist, so sieht man aus der Nebenbedingung, dass mindestens $x = y = 0$ oder $x = z = 0$ gelten muss. Für die dritte Variable folgt aus obigen Abschätzungen $z \leq 4$ bzw. $y \leq 4$ und damit $x + y + z \leq 4$ am Rand.

Nach der Methode der Lagrange-Multiplikatoren verschwinden in allen möglichen Maxima die Ableitungen nach allen Variablen der Funktion

$$L(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda((x+y)^2(x+z)^2 - 16xyz).$$

Das ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
1 + \lambda(2(x+y)(x+z)^2 + 2(x+y)^2(x+z) - 16yz) &= 0, && (9)\\
1 + \lambda(2(x+y)(x+z)^2 - 16xz) &= 0, && (10)\\
1 + \lambda(2(x+y)^2(x+z) - 16xy) &= 0,\\
(x+y)^2(x+z)^2 - 16xyz &= 0. && (11)
\end{aligned}$$

Wir halten fest, dass daraus sofort $\lambda \neq 0$ folgt. Wir setzen (11) in (9) und (10) ein:

$$\begin{aligned}
1 + \lambda\Big(\frac{32xyz}{x+y} + \frac{32xyz}{x+z} - 16yz\Big) &= 0,\\
1 + \lambda\Big(\frac{32xyz}{x+y} - 16xz\Big) &= 0.
\end{aligned}$$

Subtraktion der ersten beiden Gleichungen und Division durch $\lambda \neq 0$ ergibt

$$\frac{32xyz}{x+z} = 16z(y-x).$$

Division durch $z \neq 0$ und Umformen ergibt

$$y = \frac{x(x+z)}{z-x}. \tag{12}$$

Wir setzen das in die ursprüngliche Nebenbedingung ein und erhalten nach entsprechenden Umformungen

$$x = \frac{z(4-z)}{z+4}. \tag{13}$$

Wir setzen (13) in (12) ein und erhalten

$$y = \frac{4(4-z)}{z+4}. \tag{14}$$

Der zugehörige Funktionswert ist

$$\frac{z(4-z)}{z+4} + \frac{4(4-z)}{z+4} + z = 4.$$

Somit ist das maximale M gleich 4 und wir haben unendlich viele Tupel

$$(x, y, z) = \Big(\frac{z(4-z)}{z+4}, \frac{4(4-z)}{z+4}, z\Big)$$

erhalten. Wählt man $0 < z < 4$ rational, so ist dieses Tupel rational und komponentenweise positiv.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 3. Wir lösen die zweite Frage zuerst, der Wert für M wird später bewiesen.

Sei $x+y+z = M$. Um einen einfacheren Ausdruck zu erhalten, rechnen wir mit $a = M-x$, $b = M-y$ und $c = M-z$. Das ergibt

$$16(b+c-M)(M-b)(M-c) = b^2c^2.$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$b^2c^2 - 16b^2c - 16bc^2 + 16b^2M + 16c^2M + 48bcM - 32bM^2 - 32cM^2 + 16M^3 = 0.$$

Aufgrund der zweiten Fragestellung versuchen wir erst M so zu wählen, dass das ein vollständiges Quadrat ergibt. Sicher muss dieses die Form $(bc - 8b - 8c + ?)^2$ haben. Vergleichen des Koeffizienten für c^2 ergibt $16M = 64$ und damit $M = 4$. Der Vergleich des konstanten Terms ergibt $? = \pm\sqrt{16M^3} = \pm 32$. Damit erhalten wir tatsächlich das vollständige Quadrat

$$(bc - 8b - 8c + 32)^2 = 0.$$

Das entspricht $yz + 4y + 4z - 16 = 0$ und damit $(y+4)(z+4) = 32$. Wir haben also $(y+4)(z+4) = 32$ und $x+y+z = 4$. Wählen wir daher $y = t-4$ für ein rationales t nahe $\sqrt{32}$, dann erhalten wir jeweils ein positives rationales Tripel mit $y = t-4$, $z = 32/t - 4$ und $x = 4 - y - z$, das die gewünschten Eigenschaften hat, da $y + z$ nahe an $2\sqrt{32} - 8 < 4$ liegt und daher x positiv ist. Unter der Annahme, dass $M = 4$ tatsächlich der Maximalwert ist, ist die Frage (b) also gelöst.

Für die Frage (a) sei nun $x + y + z = M = 4S$ mit $S \geq 1$ (das Maximum ist ja mindestens 4). Es sei $x' = x/S$, $y' = y/S$ und $z' = z/S$, sodass $x' + y' + z' = 4$ gilt. Die Gleichung wird zu

$$\frac{1}{S} 16x'y'z' = (x'+y')^2(x'+z')^2.$$

Das ist aber auch

$$\Big(\frac{1}{S} - 1\Big) 16x'y'z' = A^2,$$

wobei $A = y'z' + 4y' + 4z' - 16$ dem Ausdruck entspricht, den wir im anderen Teil berechnet haben.

Die linke Seite wäre aber für $S > 1$ negativ, sodass $S = 1$ gelten muss und somit $M = 4$.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 4. Wir setzen $s = x + y + z$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
& & 16xyz &= (x+y)^2(x+z)^2 \\
&\iff & 4\sqrt{xyz} &= (x+y)(x+z) \\
&\iff & 4\sqrt{xyz} &= (s-z)(s-y) \\
&\iff & 4\sqrt{xyz} &= s^2 - (y+z)s + yz \\
&\iff & 4\sqrt{xyz} &= s^2 - (s-x)s + yz \\
&\iff & 4\sqrt{xyz} &= xs + yz.
\end{aligned}$$

Da $x > 0$, können wir s daraus explizit ausdrücken und erhalten

$$s = 4\sqrt{\frac{yz}{x}} - \frac{yz}{x} = 4 - \Big(4 - 4\sqrt{\frac{yz}{x}} + \frac{yz}{x}\Big) = 4 - \Big(2 - \sqrt{\frac{yz}{x}}\Big)^2.$$

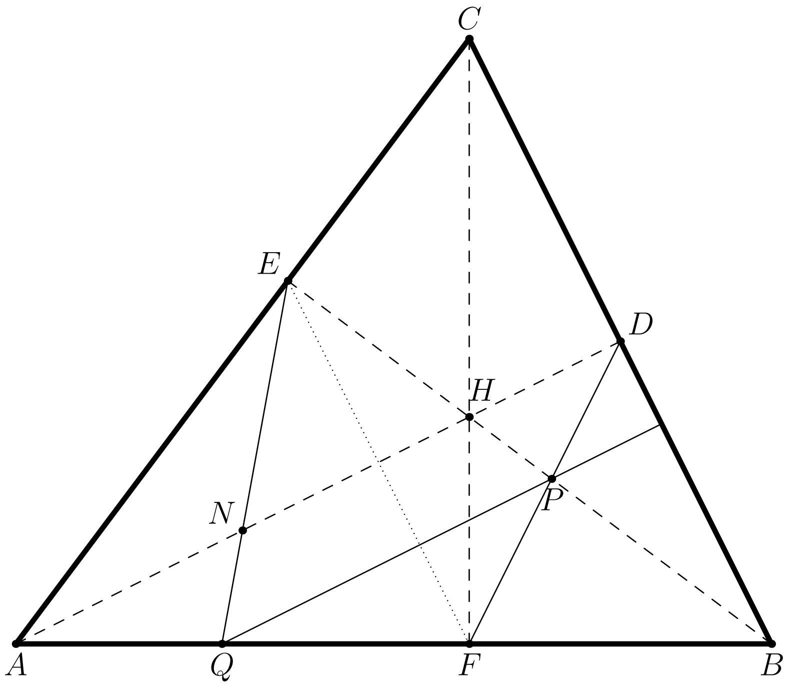

Abbildung 1: Aufgabe 5, Lösung 1

Damit ist $s \leq 4$ mit Gleichheit genau dann, wenn

$$2 = \sqrt{\frac{yz}{x}} \iff 4x = yz.$$

Die Gleichheitsfälle folgen dann daraus wie in Lösung 1.

(Heinrich Josef Gstöttner) □

Aufgabe 5. *Es seien ABC ein spitzwinkeliges Dreieck, H sein Höhenschnittpunkt und D, E und F die Fußpunkte der Höhen durch A, B bzw. C. Der Schnittpunkt von DF mit der Höhe durch B sei P. Die Normale auf BC durch P schneide die Seite AB in Q. Der Schnittpunkt von EQ mit der Höhe durch A sei N.*

Man beweise, dass N die Strecke AH halbiert.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Siehe Abbildung 1. Es seien $\beta = \sphericalangle ABC$ und $\gamma = \sphericalangle ACB$. Wegen $\sphericalangle AFH = \sphericalangle AEH = 90°$ ist $AFHE$ ein Sehnenviereck, und es folgt aus der Parallelität von DA und PQ die Beziehung $\sphericalangle FQP = \sphericalangle FAH = \sphericalangle FEH = \sphericalangle FEP$. Daher ist auch $QFPE$ ein Sehnenviereck. Wegen $\sphericalangle AFC = \sphericalangle ADC = 90°$ ist auch $AFDC$ ein Sehnenviereck und es gilt $\sphericalangle QFP = \sphericalangle AFD = 180° - \sphericalangle ACD = 180° - \gamma$. Somit folgt auch $\sphericalangle QEP = \gamma$. Daraus erhalten wir nun $\sphericalangle EAN = 90° - \gamma = \sphericalangle AEP - \sphericalangle QEP = \sphericalangle AEN$, und wir sehen, dass das Dreieck ANE gleichschenkelig ist. Somit ist N der Umkreismittelpunkt des rechtwinkeligen Dreiecks AEH, und es folgt $NA = NH$, wie behauptet.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Siehe Abbildung 2. Es sei $\gamma = \sphericalangle BCA$ wie üblich. Dann gilt im rechtwinkeligen Dreieck ADC die Beziehung $\sphericalangle DAE = \sphericalangle HAE = 90° - \gamma$. Wegen des rechtwinkeligen Dreiecks AEH folgt daraus $\sphericalangle EHA = \gamma$, und da HA und PQ parallel sind, folgt somit auch $\sphericalangle EPQ = \gamma$.

Da $EHFA$ ein Sehnenviereck ist, folgt $\sphericalangle EFQ = \sphericalangle EFA = \sphericalangle EHA = \gamma$. Wegen $\sphericalangle EFQ = \gamma = \sphericalangle EPQ$, ist $EPFQ$ ein Sehnenviereck. Daher gilt $\sphericalangle DFE = \sphericalangle PFE = \sphericalangle PQE = \sphericalangle DNE$, letzteres, weil DN zu PQ parallel ist. Somit ist auch $DFNE$ ein Sehnenviereck.

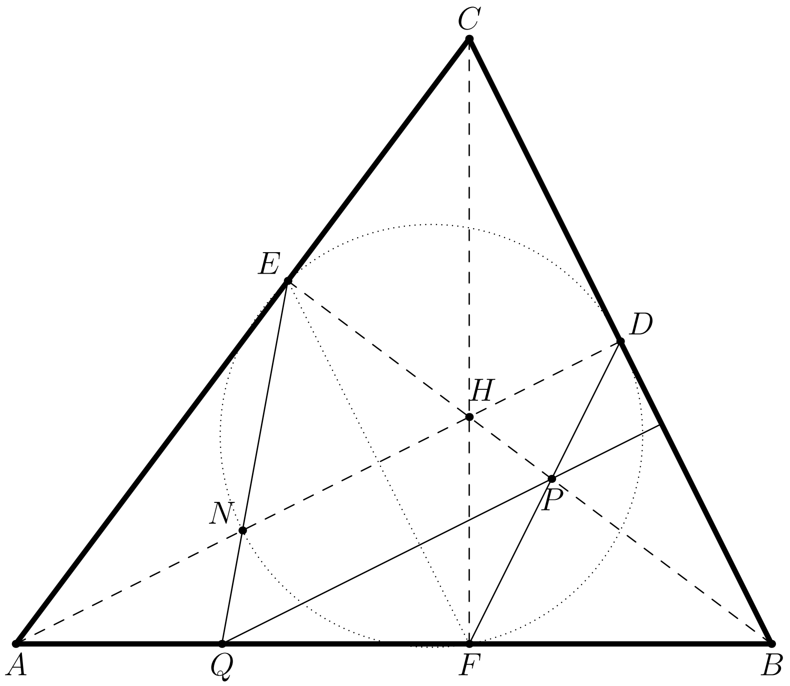

Abbildung 2: Aufgabe 5, Lösung 2

Der Umkreis von DFE ist der Feuerbachkreis von ABC und N ist damit der Schnittpunkt des Feuerbachkreises mit einer Höhe, also der Halbierungspunkt der Strecke HA, wie behauptet.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 3. Siehe Abbildung 3. Es sei O_∞ der Fernpunkt auf der Geraden AD. Um zu zeigen, dass N die Strecke AH halbiert, muss gezeigt werden, dass N und O_∞ die Strecke AH harmonisch teilen, also dass $(A, H, N, O_\infty) = -1$. Der Punkt Q ist bereits mit A, N und O_∞ verbunden (mit Letzterem über die Parallele QP zu AD).

Man kann also die vier Punkte über das Zentrum Q auf die Gerade BE projizieren, und man erhält $(A, H, N, O_\infty) = (B, H, E, P)$. Da E und P die Schnittpunkte der Diagonalen AC und DF mit der Diagonalen BH im vollständigen Vierseit FB, BD, DH, HF sind, gilt $(B, H, E, P) = -1$.

(Josef Greilhuber) □

Aufgabe 6. *Es sei* $S = \{1, 2, \ldots, 2017\}$.

Man bestimme die größtmögliche natürliche Zahl n*, für die es* n *verschiedene Teilmengen von* S *gibt, sodass für keine zwei dieser Teilmengen ihre Vereinigung gleich* S *ist.*

(Gerhard Woeginger)

Lösung 1. Antwort: $n = 2^{2016}$.

Beweis:

Es gibt 2^{2016} Teilmengen von S, die das Element 2017 nicht enthalten. Die Vereinigung von je zwei dieser Teilmengen enthält 2017 ebenfalls nicht und ist daher ungleich S. Daher ist das gesuchte n mindestens 2^{2016}.

Wenn wir jede Teilmenge von S mit ihrem Komplement zu einem Paar zusammenfassen, können wir S in 2^{2016} Paare aufteilen. Wäre nun n größer als 2^{2016}, müsste es unter den n Teilmengen mindestens ein solches Paar geben. Deren Vereinigung wäre aber ganz S, sodass das nicht möglich ist, und n also nicht größer als 2^{2016} sein kann.

Somit ist der gesuchte Wert $n = 2^{2016}$.

(Gerhard Woeginger) □

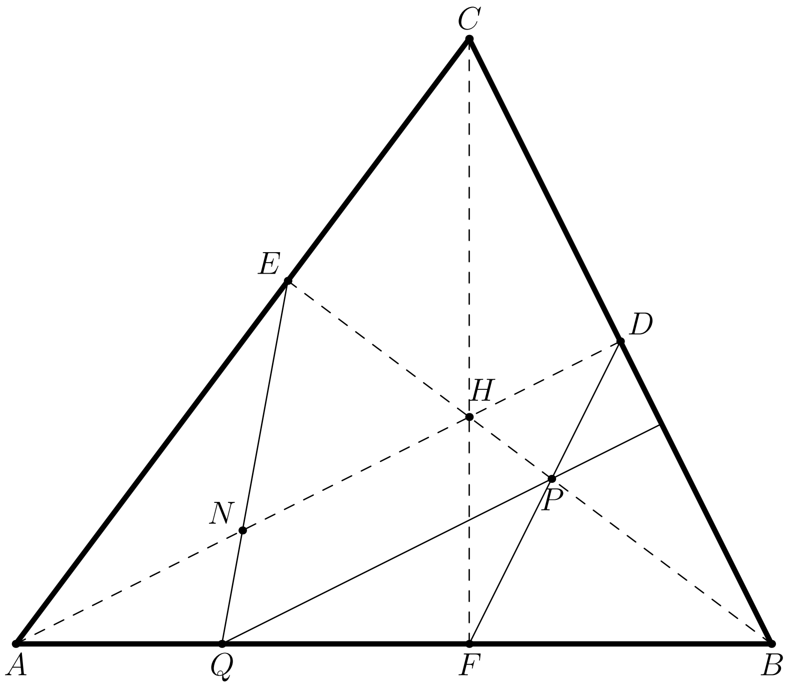

Abbildung 3: Aufgabe 5, Lösung 3

Lösung 2. Wir wählen alle Teilmengen von S, die höchstens 1008 Elemente haben. Das ist die Hälfte von allen Teilmengen, deren Anzahl ist also 2^{2016}. Die Vereinigung von zwei solchen Teilmengen kann höchstens 2016 Elemente haben und kann daher nicht S sein. Daher ist also n mindestens 2^{2016}.

Danach zeigen wir wie in Lösung 1, dass n höchstens 2^{2016} sein kann.

(Theresia Eisenkölbl) □