# 48. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene, Teil 1 – Lösungen

30. April 2017

---

**Aufgabe 1.** *Man bestimme alle Polynome $P(x)$, die reelle Koeffizienten haben und die folgenden zwei Bedingungen erfüllen:*

*(a)* $P(2017) = 2016$ *und*

*(b)* $(P(x)+1)^2 = P(x^2+1)$ *für alle reellen Zahlen* $x$.

(Walther Janous)

*Lösung 1.* Mit $Q(x) := P(x) + 1$ erhalten wir $Q(2017) = 2017$ und $(Q(x))^2 = Q(x^2+1) - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, was sich zu $Q(x^2+1) = Q(x)^2 + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ umformen lässt.

Wir definieren die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ rekursiv durch $x_0 = 2017$ und $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ für alle $n \geq 0$. Mit vollständiger Induktion zeigt man, dass $Q(x_n) = x_n$ für alle $n \geq 0$ gilt, da $Q(x_{n+1}) = Q(x_n^2+1) = Q(x_n)^2 + 1 = x_n^2 + 1 = x_{n+1}$.

Wegen $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ stimmt das Polynom $Q(x)$ an unendlich vielen Stellen mit dem Polynom $\mathrm{id}(x) = x$ überein. Deshalb ist $Q(x) = x$ und damit muss $P(x) = x - 1$ sein. Da $x - 1$ offensichtlich die beiden Bedingungen erfüllt, ist das die einzige Lösung.

*(Walther Janous)* □

*Lösung 1a.* Wie in der vorigen Lösung definieren wir die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ rekursiv durch $x_0 = 2017$ und $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ für alle $n \geq 0$.

Mit vollständiger Induktion zeigen wir diesmal direkt, dass $P(x_n) = x_n - 1$ für alle $x_n$ gilt. Die Basis $P(x_0) = P(2017) = 2016 = x_0 - 1$ folgt bereits aus der Angabe. Induktionsschritt:

$$P(x_{n+1}) = P(x_n^2+1) = (P(x_n)+1)^2 = (x_n - 1 + 1)^2 = x_n^2 = x_n^2 + 1 - 1 = x_{n+1} - 1.$$

Wegen $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ stimmt das Polynom $P(x)$ an unendlich vielen Stellen mit dem Polynom $R(x) = x - 1$ überein, und ist daher mit diesem identisch. Da dieses die beiden Bedinungen erfüllt, ist es die einzige Lösung.

*(Birgit Vera Schmidt)* □

*Lösung 2.* Wir werden im Folgenden die allgemeine Lösung der in $(b)$ angegebenen Funktionalgleichung bestimmen.

Mit der Substitution $Q(x) := P(x) + 1$ wird die in $(b)$ angegebene Funktionalgleichung zu

$$Q(x^2+1) = Q(x)^2 + 1, \qquad x \in \mathbb{R},$$

die wir mit (FG) bezeichnen. Ab nun werden wir ausschließlich (FG) betrachten.

Rechnungen mit Ansätzen der Art $Q(x) = a + bx + cx^2 + \cdots$ und Koeffizientenvergleich zeigen für kleine Gradzahlen von $Q$, dass sich die jeweils einzigen Polynome

| | |
|---|---|
| $Q_0(x) = x$ | für $\deg(Q) = 1$, |
| $Q_1(x) = x^2 + 1$ | für $\deg(Q) = 2$, |
| $Q_2(x) = x^4 + 2x^2 + 2$ | für $\deg(Q) = 4$ und |
| $Q_3(x) = x^8 + 4x^6 + 8x^4 + 8x^2 + 5$ | für $\deg(Q) = 8$ |

als Lösungen der Funktionalgleichung (FG) ergeben. Es gibt keine Lösungen $Q$ mit $\deg(Q) \in \{0,3,5,6,7\}$. Zudem erkennt man, dass diese Polynome die Rekursion $Q_{n+1}(x) = Q_n(x)^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$, erfüllen (für $n \in \{0,1,2\}$).

Umgekehrt ist jedes Polynom $Q_n(x)$, das diese Rekursion mit $Q_0(x) = x$ erfüllt, eine Lösung von (FG).

Für $Q_0(x)$ ist dies evident. Es sei $Q_n(x)$ eine Lösung von (FG). Dann gilt insbesondere $Q_n(x^2+1) = Q_n(x)^2+1$, also auch $Q_n(x^2+1)^2+1 = (Q_n(x)^2+1)^2+1$, d.h. aber $Q_{n+1}(x^2+1) = Q_{n+1}(x)^2+1$. Damit ist auch $Q_{n+1}(x)$ eine Lösung von (FG).

Für die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung (FG) benötigen wir die folgenden drei Lemmata.

*Lemma.* Es seien $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom mit $P(0) = 0$ und $f$ eine auf $\mathbb{R}$ definierte reellwertige Funktion mit $f(x) > x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Dann gilt: Die Funktionalgleichung $P(f(x)) = f(P(x))$, $x \in \mathbb{R}$, hat das Polynom $P(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, als einzige Lösung.

*Beweis.* Wir definieren die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ rekursiv durch $x_0 = 0$ und $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$.

Wir zeigen mit einer Induktion, dass $P(x_n) = x_n$, $n \geq 0$, gilt.

Nach Voraussetzung haben wir $P(0) = 0$, d.h. $P(x_0) = x_0$.

Es soll $P(x_k) = x_k$ für ein $k \geq 0$ gelten. Dann folgt aber $P(x_{k+1}) = P(f(x_k)) = f(P(x_k)) = f(x_k) = x_{k+1}$.

Außerdem ist $x_{k+1} = f(x_k) > x_k$, $k \geq 0$. Damit haben wir eine Folge $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ konstruiert, für die das Polynom $P(x)$ an unendlich vielen Stellen mit dem Polynom $\mathrm{id}(x) = x$ übereinstimmt. Wie behauptet ist damit $P(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, das einzige Polynom, das die Funktionalgleichung erfüllt. ∎

*Lemma.* Alle Polynome $Q$, die die Funktionalgleichung (FG) erfüllen, sind entweder gerade oder ungerade.

*Beweis.* Wegen $Q(-x)^2 = Q((-x)^2+1) - 1 = Q(x^2+1) - 1 = Q(x)^2$, $x \in \mathbb{R}$, haben wir für jedes einzelne $x \in \mathbb{R}$, dass $Q(-x) = Q(x)$ oder $Q(-x) = -Q(x)$ gilt. D.h. zumindest eine dieser zwei Beziehungen ist für unendlich viele $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Weil $Q$ ein Polynom ist, muss daher entweder $Q(x) = -Q(x)$, $x \in \mathbb{R}$, oder $Q(-x) = Q(x)$, $x \in \mathbb{R}$, gelten. Das Polynom $Q$ ist also entweder ungerade oder gerade. ∎

*Lemma.* Wenn ein Polynom $Q$ mit $Q(0) \neq 0$ Lösung der Funktionalgleichung (FG) ist, so gibt es ein Polynom $S$ mit $\deg(S) = \frac{1}{2}\deg(Q)$, das auch (FG) erfüllt, wobei $Q(x) = S(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$, gilt.

*Beweis.* Das zweite Lemma und $Q(0) \neq 0$ ergeben, dass $Q$ gerade sein muss, d.h. $Q(x) = R(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, mit $R \in \mathbb{R}[x]$. Deshalb lässt sich die Funktionalgleichung (FG) in der Form $R((x^2+1)^2) = R(x^2)^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$, darstellen.

Die Variablensubstitution $\xi := x^2 + 1$ liefert $R(\xi^2) = R(\xi-1)^2 + 1$, d.h. $R((\xi^2+1)-1) = R(\xi-1)^2+1$ für alle $\xi \in [1;\infty)$. Weil $R$ ein Polynom ist, gilt diese Beziehung sogar für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

Deshalb erhalten wir mit der Funktionssubstitution $S(z) := R(z-1)$, $z \in \mathbb{R}$, dass $S(\xi^2+1) = S(\xi)^2 + 1$ für $\xi \in \mathbb{R}$, es ist also $S$ auch eine Lösung von (FG). ∎

Nun zur Lösung der Funktionalgleichung (FG). Wir zeigen durch Induktion, dass es für $n \geq 0$ genau ein Polynom $Q$ mit $2^n \leq \deg(Q) < 2^{n+1}$ gibt, das eine Lösung von (FG) ist, nämlich $Q_n$.

Für $n = 0$, also $\deg(Q) = 1$, bestätigt man die Behauptung mit dem Ansatz $Q(x) = ax + b$ und Koeffizientenvergleich.

Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \geq 0$ zutrifft, und zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ zutrifft.

Es sei $Q$ ein Polynom mit $2^{n+1} \leq \deg(Q) < 2^{n+2}$, das eine Lösung von (FG) ist.

Fall 1: $Q(0) = 0$. Dann ergäbe das erste Lemma mit der Funktion $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ – sie erfüllt $f(x) > x$, $x \in \mathbb{R}$ –, dass $Q(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, zu sein hätte. Dies ist aber wegen $\deg(Q) \geq 2$ nicht möglich.

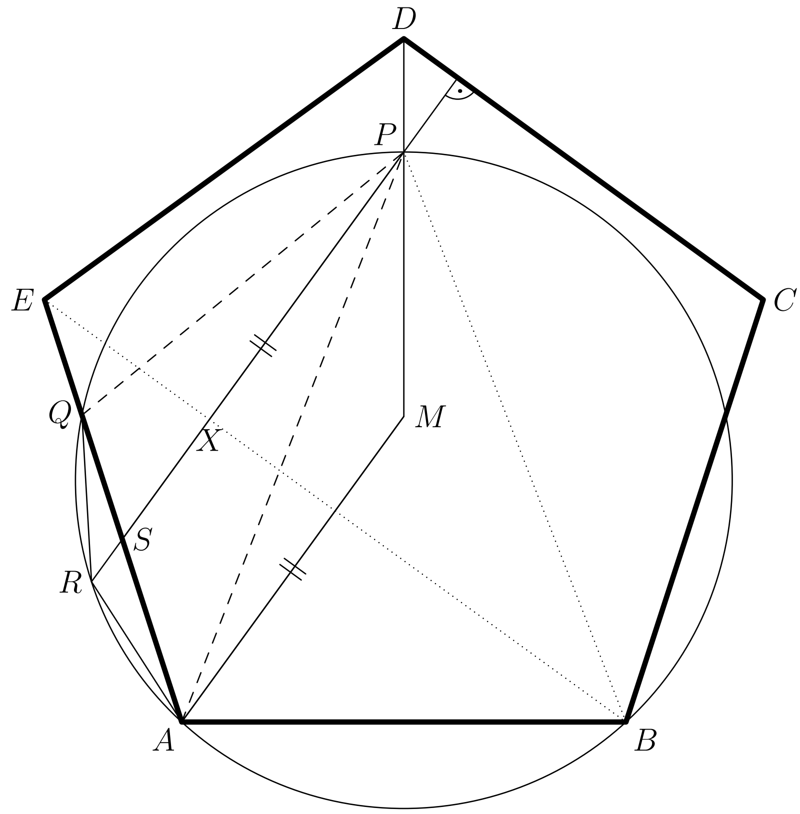


Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösungen 1–2

Fall 2: $Q(0) \neq 0$. Wegen des zweiten Lemmas muss $Q$ gerade sein. Wegen des dritten Lemmas haben wir $Q(x) = S(x^2 + 1)$, wobei $S$ die Funktionalgleichung (FG) erfüllt, und wegen $\deg(S) = \frac{1}{2}\deg(Q)$ die Bedingung $2^n \leq \deg(S) < 2^{n+1}$ gilt. Laut Induktionsannahme gilt deshalb $S = Q_n$ und damit $Q = Q_{n+1}$.

Die allgemeinen Lösungen der in Teil $(b)$ der Aufgabenstellung betrachteten Funktionalgleichung sind demnach $P_n(x) = Q_n(x) - 1$, $n \geq 0$. Mit $Q_0(2017) = 2017$ erhält man wegen $Q_{n+1}(x) = Q_n(x)^2 + 1 > Q_n(x)^2$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$, unmittelbar, dass $Q_n(2017) > 2017$ für alle $n \geq 1$ ist.

Deshalb ist $P(x) = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, das einzige Polynom, das die zwei Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt.

Bemerkung: Man vergleiche im Zusammenhang mit dieser Aufgabe den OEIS-Eintrag `http://oeis.org/A158985`.

*(Walther Janous)* □

**Aufgabe 2.** *Es sei $ABCDE$ ein regelmäßiges Fünfeck. Auf der Strecke zwischen dem Mittelpunkt $M$ des Fünfecks und dem Punkt $D$ wird ein Punkt $P \neq M$ gewählt. Der Umkreis von $ABP$ schneidet die Seite $AE$ in den Punkten $A$ und $Q$ und die Normale auf $CD$ durch $P$ in den Punkten $P$ und $R$.*

*Man zeige, dass $AR$ und $QR$ gleich lang sind.*

(Stephan Wagner)

*Lösung 1.* Es sei $S$ der Schnittpunkt von $RP$ und $AE$, vgl. Abbildung 1. Die Winkel im Dreieck $ABE$ sind bekannt als $\sphericalangle BAE = 108^\circ$ und $\sphericalangle EBA = \sphericalangle AEB = 36^\circ$. Da $BE$ und $CD$ parallel sind, steht $RP$ auch auf $BE$ normal, und wir bezeichnen deren Schnittpunkt als $X$. Daher gilt wegen der Winkelsumme im Viereck $ABXS$, dass $\sphericalangle ASP = 360^\circ - 108^\circ - 36^\circ - 90^\circ = 126^\circ$ und $\sphericalangle PSQ = \sphericalangle RSA = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$.

Zunächst zeigen wir die Gleichheit $\sphericalangle SPA = \sphericalangle QPS$ in mehreren Umformungsschritten:

- Wegen der Winkelsumme im Dreieck $SAP$ gilt $\sphericalangle SPA = 180^\circ - \sphericalangle ASP - \sphericalangle PAS = 180^\circ - 126^\circ - \sphericalangle PAS = 54^\circ - \sphericalangle PAS$.

- Wegen $\sphericalangle BAP + \sphericalangle PAS = \sphericalangle BAS = 108°$ folgt weiter $54° - \sphericalangle PAS = 54° - (108° - \sphericalangle BAP) = \sphericalangle BAP - 54°$.

- Nun nutzen wir die Symmetrie des Dreiecks $ABP$ um zu schließen, dass $\sphericalangle BAP = \sphericalangle PBA$, also auch $\sphericalangle BAP - 54° = \sphericalangle PBA - 54°$.

- Da $ABPQ$ ein Sehnenviereck ist, gilt $\sphericalangle PBA = 180° - \sphericalangle AQP$. Setzen wir dies in die vorige Darstellung ein, erhalten wir also weiter $\sphericalangle PBA - 54° = 180° - \sphericalangle AQP - 54° = 126° - \sphericalangle AQP = 126° - \sphericalangle SQP$.

- Zuletzt nutzen wir die Winkelsumme im Dreieck $SQP$ und erhalten $\sphericalangle QPS = 180° - \sphericalangle PSQ - \sphericalangle SQP = 180° - 54° - \sphericalangle SQP$, was genau der im vorigen Schritt erhaltenen Darstellung entspricht.

Fasst man alle diese Teile zusammen, so folgt

$$\sphericalangle SPA = 54° - \sphericalangle PAS = \sphericalangle BAP - 54° = \sphericalangle PBA - 54° = 126° - \sphericalangle SQP = \sphericalangle QPS.$$

Somit sind die Peripheriewinkel $\sphericalangle RPA = \sphericalangle SPA$ und $\sphericalangle QPR = \sphericalangle QPS$ über den Sehnen $QR$ und $RA$ gleich groß, und daher laut Peripheriewinkelsatz diese Sehnen gleich lang.

*(Birgit Vera Schmidt, Stephan Wagner)* □

*Lösung 2.* Wir wollen zeigen, dass das Dreieck $QRA$ gleichschenkelig ist, also dass $\sphericalangle RAQ = \sphericalangle RQA$ gilt.

Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes im Umkreis von $ABP$ ist dies gleichwertig mit $\sphericalangle RPQ = \sphericalangle RPA$ oder $\sphericalangle QPA = 2\sphericalangle RPA$. Da $MA$ parallel zu $PR$ ist, ist dies aber gleichwertig mit $\sphericalangle QPA = 2\sphericalangle MAP$.

Nun gilt aber im Dreieck $PQA$ sicher $\sphericalangle QPA = 180° - \sphericalangle PQA - \sphericalangle QAP$, und da $ABPQ$ ein Sehnenviereck ist, ist dieser Ausdruck wiederum gleich $\sphericalangle PBA - \sphericalangle EAP$. Zu zeigen bleibt also $\sphericalangle PBA - \sphericalangle EAP = 2\sphericalangle MAP$, was gleichwertig ist mit $\sphericalangle EAP + \sphericalangle MAP = \sphericalangle PBA - \sphericalangle MAP$. Dies ist aber wiederum gleichwertig mit $\sphericalangle EAM = \sphericalangle PAB - \sphericalangle MAP = \sphericalangle BAM$, was im regelmäßigen Fünfeck sicher richtig ist.

*(Theresia Eisenkölbl)* □

*Lösung 3.* Sei $X$ der Südpol des Dreiecks $APQ$, vgl. Abbildung 2. Dann gilt nach Definition $AX = XQ$. Zu zeigen ist dann, dass $X = R$. Dafür reicht es zu zeigen, dass die Gerade $XP$ auf die Seite $DC$ normal steht. Den Schnittpunkt von $XP$ mit $DC$ bezeichnen wir mit $Y$.

Da $X$ der Südpol von $APQ$ ist, gilt $\sphericalangle APX = \sphericalangle XPQ =: \varepsilon$. Da $APB$ gleichschenkelig ist, folgt $\sphericalangle BPM = \sphericalangle MPA =: \delta$. Da $AQPB$ ein Sehnenviereck ist, gilt $2\varepsilon + 2\delta = \sphericalangle BPQ = 180° - \sphericalangle QAB = 180° - 108° = 72°$. Daher gilt $\sphericalangle YPD = \sphericalangle MPX = \delta + \varepsilon = 36°$. Da $\sphericalangle MDC = 54°$, folgt aus der Winkelsumme im Dreieck $DYP$, dass $\sphericalangle PYD = 180° - \sphericalangle YDP - \sphericalangle DPY = 180° - 54° - 36° = 90°$, was zu zeigen war.

*(Clemens Heuberger, Pascal Jelinek)* □

**Aufgabe 3.** *Anna und Berta spielen ein Spiel, bei dem sie abwechselnd Murmeln vom Tisch nehmen. Anna macht den ersten Zug. Wenn zu Beginn eines Zuges $n \geq 1$ Murmeln am Tisch sind, dann nimmt die Spielerin, die am Zug ist, $k$ Murmeln weg, wobei $k \geq 1$ entweder eine gerade Zahl mit $k \leq \frac{n}{2}$ oder eine ungerade Zahl mit $\frac{n}{2} \leq k \leq n$ ist. Eine Spielerin gewinnt das Spiel, wenn sie die letzte Murmel vom Tisch nimmt.*

*Man bestimme die kleinste Zahl $N \geq 100\,000$, sodass Berta den Sieg erzwingen kann, falls anfangs genau $N$ Murmeln am Tisch liegen.*

(Gerhard Woeginger)

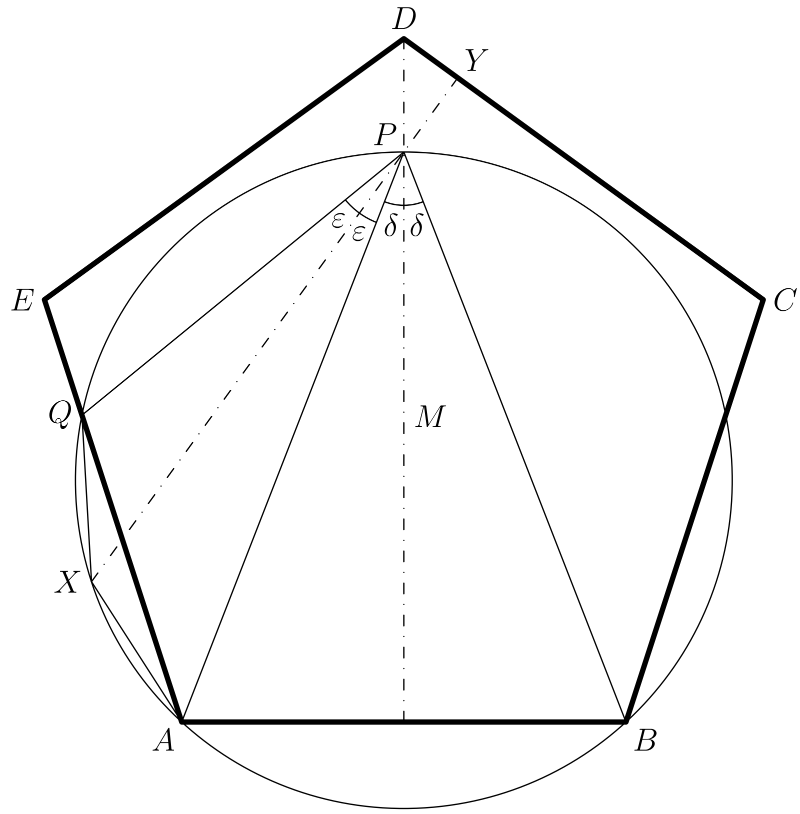


Abbildung 2: Lösung 3

*Lösung 1.* Behauptung: Die Verlustsituationen sind jene Situationen mit $n = 2^a - 2$ Murmeln am Tisch für alle ganzen Zahlen $a \geq 2$. Alle anderen Situationen sind Gewinnsituationen.

Beweis: Mit Induktion über $n \geq 1$. Für $n = 1$ gewinnt man, indem man die einzige verbleibende Murmel nimmt. Für $n = 2$ kann man nur $k = 1$ Murmeln nehmen, und dann gewinnt die Gegnerin im nächsten Zug.

Induktionsschritt von $n - 1$ auf $n$ für $n \geq 3$:

1. Falls $n$ ungerade ist, nimmt man alle $n$ Murmeln weg und gewinnt.

2. Falls $n$ gerade, aber nicht von der Form $2^a - 2$ ist, so liegt $n$ zwischen zwei Zahlen dieser Form, also gibt es ein eindeutiges ganzzahliges $b$ mit $2^b - 2 < n < 2^{b+1} - 2$. Wegen $n \geq 3$ gilt für dieses $b \geq 2$. Daher sind alle drei Zahlen in der obigen Ungleichungskette gerade, und somit folgt sogar $2^b \leq n \leq 2^{b+1} - 4$. Laut Induktion ist $2^b - 2$ eine Verlustsituation, und man kann sie durch Wegnehmen von
$$k = n - (2^b - 2) = n - \frac{2^{b+1} - 4}{2} \leq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$$
Murmeln der Gegnerin überlassen.

3. Falls $n$ gerade und von der Form $n = 2^a - 2$ ist, kann die Spielerin der Gegnerin keine Verlustposition mit $2^b - 2$ Murmeln hinterlassen (wobei $b < a$ ist, weil mindestens eine Murmel weggenommen werden muss, und $b \geq 2$ ist, weil nach einem legalen Zug für ein gerades $n$ mindestens eine Murmel übrig bleibt). Dazu müsste sie nämlich $k = (2^a - 2) - (2^b - 2) = 2^a - 2^b$ Murmeln wegnehmen. Wegen $b \geq 2$ ist aber $k$ gerade und strikt größer als $\frac{n}{2}$ wegen $2^a - 2^b \geq 2^a - 2^{a-1} = 2^{a-1} > 2^{a-1} - 1 = \frac{2^a - 2}{2} = \frac{n}{2}$; unmöglich.

Lösung der Aufgabe: Berta kann also dann und nur dann den Sieg erzwingen, wenn $N$ von der Form $2^a - 2$ ist. Die kleinste Zahl $N \geq 100\,000$ von dieser Form ist $N = 2^{17} - 2 = 131\,070$.

*(Gerhard Woeginger)* □

*Lösung 1a.* Jede ungerade Zahl ist eine Gewinnsituation, weil man einfach alle Murmeln vom Tisch nehmen kann.

Die Zahl 2 ist eine Verlustsituation, weil nur der Zug mit 1 auf 1 erlaubt ist.

Wenn eine gerade Zahl $2\ell$ Verlustsituation ist, so sind $2\ell + 2j$ für $1 \leq j \leq \ell$ Gewinnsituationen: Man kann von $2\ell + 2j$ jedenfalls $2j$ Murmeln wegnehmen und gelangt zur Verlustsituation $2\ell$.

Wenn eine gerade Zahl $2\ell$ Verlustsituation ist, so ist auch $4\ell+2$ Verlustsituation: Nimmt man von $4\ell+2$ eine ungerade Zahl an Murmeln, so erreicht man eine ungerade Zahl und damit eine Gewinnsituation; an geradzahligen Zügen kommen nur 2, 4, ..., $2\ell$ in Frage, die nach vorheriger Überlegung ebenfalls zu einer geraden Gewinnsituation führen.

Damit haben wir alle Verlustsituationen besimmt: es handelt sich um die rekursive Folge

$$v_m = 2v_{m-1} + 2, \qquad m \geq 1$$

mit $v_0 = 2$. Diese löst man mit Standardmethoden oder durch Addition von 2 auf beiden Seiten, also

$$v_m + 2 = 2(v_{m-1} + 2)$$

mit $v_0 + 2 = 4 = 2^2$. Durch Iteration sieht man daraus sofort $v_m + 2 = 2^{m+2}$, also $v_m = 2^{m+2} - 2$.

Gesucht ist also die kleinste Verlustposition $\geq 100\,000$, also die kleinste Zahl der Form $2^{m+2} - 2 \geq 100\,000$. Das ist $2^{17} - 2 = 131\,070$.

*(Clemens Heuberger)* □

*Lösung 2.* Der folgende ans Chomp-Spiel angelehnte Lösungsweg ist für diese Aufgabe wohl ein wenig „overkill“, soll des gelegentlichen Blickes über den Tellerrand wegen aber nicht unerwähnt bleiben:

- Alle Situationen mit einer ungeraden Anzahl $n$ von Murmeln am Tisch sind Gewinnsituationen, indem man einfach alle Murmeln nimmt.

- Behauptung: Alle Situationen mit einer durch 4 teilbaren Anzahl von Murmeln sind Gewinnsituationen. Beweis: Bei genau 4 Murmeln nimmt man 2 Murmeln, danach muss die Gegnerin 1 Murmel nehmen, und danach nimmt man die letzte und gewinnt.

  Sei ab jetzt $n = 4m$ mit $m \geq 2$, und sei Anna die Spielerin am Zug. Nun stellen wir eine Überlegung an, die wir im Folgenden noch ein paar Mal wiederholen werden: Nehmen wir an, Anna nimmt genau 2 Murmeln, was sicher ein legaler Zug ist. Nun gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder, das war ein guter Zug, d.h. $n-2$ ist eine Verlustsituation für Berta. Dann ist dieses $n$ eine Gewinnsituation für Anna.

  Oder es war ein schlechter Zug, d.h. Berta hat nun einen Zug zur Verfügung, der zu einer Verlustsituation für Anna führt. Wir überlegen, welche von Bertas möglichen Zügen dafür in Frage kommen. Vor Bertas Zug liegen $4m - 2$ Murmeln am Tisch. Wir wissen bereits, dass eine ungerade Anzahl von Murmeln übrig zu lassen zur Niederlage führt, daher kommen diese Züge nicht in Frage. Falls es für Berta also einen Zug gibt, bei dem sie vielleicht gewinnen könnte, muss sie in diesem gerade viele Murmeln wegnehmen, und laut den Regeln sind dabei genau jene Züge erlaubt, wo am Ende noch mindestens $2m - 1$ Murmeln liegen bleiben. Da wir auch wissen, dass die übriggebliebene Anzahl gerade sein muss, sind es sogar mindestens $2m$ Murmeln. D.h. falls Berta einen Zug hat, mit dem sie gewinnt, sind nach diesem Zug noch $2m$, $2m + 2$, $2m + 4$, ..., oder $4m - 4$ Murmeln übrig (wobei diese Liste wegen $m \geq 2$ nicht leer ist).

  All diese Positionen wären aber auch bereits für Anna von der Situation mit $4m$ Murmeln aus mit legalen Zügen erreichbar gewesen. Also würde Anna statt ihrem schlechten ersten Zug gleich von Anfang an denjenigen Zug machen, der zu dieser Situation führt. Somit ist auch in diesem Fall das betrachtete $n$ eine Gewinnsituation, womit die Behauptung bewiesen ist.

  (Anmerkung: In der Literatur wird diese Taktik gelegentlich auch als „Strategiediebstahl“ bezeichnet: Falls Berta eine gute Strategie hätte, könnte Anna ihr diese Strategie „stehlen“, indem sie sie zuerst ausführt. Zu erwähnen ist, dass dieser Beweis *nicht* konstruktiv ist, d.h. wir können damit zwar nachweisen, dass Anna eine Gewinnstrategie hat, wissen aber nicht, wie diese aussieht.)

- Wir müssen nun noch die Zahlen betrachten, die kongruent 2 modulo 4 sind, wobei wir diese in zwei Gruppen teilen: kongruent 2 modulo 8 und kongruent 6 modulo 8.

  Behauptung: Alle Zahlen der Form $n = 8m + 2$ mit $m \geq 1$ sind Gewinnsituationen. Beweis: Wie zuvor überlegen wir, was passiert, wenn Anna in ihrem ersten Zug 2 Murmeln nimmt, also $8m$ Murmeln übrig lässt. Wie zuvor sind wir fertig, falls das bereits ein guter Zug war. Falls es ein schlechter Zug war, also Berta einen Zug hat, mit dem sie nun gewinnt, betrachten wir wieder, welche von Bertas Zügen dafür in Frage kommen. Wie zuvor können wir das Wegnehmen einer ungeraden Anzahl ausschließen. Diesmal können wir zusätzlich ausschließen, dass Berta genau die Hälfte nimmt, also $4m$ Murmeln übrig lässt, weil wir ja gerade gezeigt haben, dass $4m$ eine Gewinnsituation für Anna wäre. Also lässt Berta eine der Zahlen $4m + 2$, $4m + 4$, $\ldots$, $8m - 2$ an Murmeln übrig. All diese Zahlen wären von $8m + 2$ aus aber mit legalen Zügen erreichbar, womit mit derselben Argumentation wie zuvor die Behauptung gezeigt ist.

- Damit haben wir alle Zahlen, die kongruent 2 modulo 8 sind, betrachtet, mit Ausnahme von 2 selbst, mit der wir uns am Schluss noch einmal näher befassen werden. Die Zahlen, die kongruent 6 modulo 8 sind, teilen wir wieder in zwei Gruppen: kongruent 6 modulo 16 und kongruent 14 modulo 16.

  Würden wir den nächsten Schritt für Zahlen der Form $n = 16m + 6$ mit $m \geq 1$ noch einmal im Detail ausarbeiten, würden wir sehen, dass wieder alles gleich ist, außer, dass diesmal die kleinste gerade Zahl für Berta deswegen nicht möglich ist, weil sie die im vorigen Schritt als Gewinnsituation identifizierte Form $8m + 2$ hätte.

  Nach dem gleichen Prinzip wie bisher setzen wir dies nun mit vollständiger Induktion fort. Die Basis haben wir bereits gezeigt. Induktionsannahme: Für eine positive ganze Zahl $a$ gilt, dass alle Zahlen der Form $2^{a+1}m+2^a-2$ für alle $m \geq 1$ Gewinnsituationen sind. Schritt: Dann sind auch alle Zahlen der Form $n = 2^{a+2}m + 2^{a+1} - 2$ Gewinnsituationen. Beweis: Wie bereits davor einige Male durchgeführt, nehmen wir an, Anna nimmt 2 Murmeln, d.h. es bleiben $2^{a+2}m + 2^{a+1} - 4$ Murmeln übrig. Wenn Berta eine ungerade Anzahl wegnimmt, verliert sie gemäß der ersten Überlegung, und wenn sie genau die Hälfte wegnimmt, also $2^{a+1}m + 2^a - 2$ Murmeln übrig lässt, verliert sie laut Induktionsannahme. Falls sie einen Zug hat, mit dem sie gewinnt, bleibt nach diesem also eine gerade Anzahl von Murmeln zwischen $2^{a+1}m + 2^a$ und $2^{a+2}m + 2^{a+1} - 6$ übrig, wobei diese Liste wegen $a \geq 1$ und $m \geq 1$ sicher mindestens eine Möglichkeit enthält. Weil die kleinste dieser Zahlen immer noch größer ist als die Hälfte von $n$, sind alle diese Situationen für Anna schon im ersten Zug erreichbar, womit – mit der restlichen Argumentation gleich wie oben etwas ausführlicher beschrieben – alles bewiesen ist.

- Damit haben wir für fast alle Zahlen gezeigt, dass sie Gewinnsituationen sind, mit Ausnahme einiger weniger Zahlen, nämlich jeweils jener, bei denen $m = 0$ gewesen wäre und die wir bisher nicht betrachtet haben, also 2, 6, 14, $\ldots$ und alle weiteren Zahlen der Form $2^a - 2$.

  Behauptung: Alle diese Zahlen sind Verlustsituationen. Beweis: Eine Zahl kann nur dann Gewinnsituation sein, wenn es von dort mindestens einen Zug geht, der zu einer Verlustsituation führt. Als Verlustsituationen kommen überhaupt nur mehr die oben beschriebenen Zahlen, also jene aus $R = \{2^a - 2 \mid a \in \mathbb{Z}^+\}$, in Frage (wobei wir noch gar nicht wissen, ob diese überhaupt Verlust- oder ebenfalls Gewinnsituationen sind). Es lässt sich aber leicht zeigen, dass es von keiner Zahl aus $R$ einen legalen Zug zu einer anderen Zahl aus $R$ gäbe (weil jede schon mehr als doppelt so groß ist wie die nächstkleinere), daher müssen alle diese Zahlen Verlustsituationen sein.

Somit brauchen wir nur noch die kleinste Zahl aus $R$, also die kleinste Zahl der Form $2^a - 2$, finden, die größer oder gleich 100 000 ist.

*(Birgit Vera Schmidt)* □

**Aufgabe 4.** *Man bestimme alle Paare $(a, b)$ nichtnegativer ganzer Zahlen, die*

$$2017^a = b^6 - 32b + 1$$

*erfüllen.*

(Walther Janous)

*Lösung 1.* Antwort: Die zwei Lösungspaare sind $(0, 0)$ und $(0, 2)$.

Weil $2017^a$ ungerade ist, muss $b$ gerade sein, also ist $b = 2c$, $c$ ganz. Folglich ist $2017^a = 64(c^6 - c) + 1$, also gilt $2017^a \equiv 1 \pmod{64}$. Es sind aber $2017 \equiv 33 \pmod{64}$ und $2017^2 \equiv (1+32)^2 = 1+2\cdot 32+32^2 \equiv 1 \pmod{64}$, sodass die Potenzen von 2017 modulo 64 zwischen 1 und 33 abwechseln. Deshalb muss $a$ gerade sein. Es gilt also, dass $2017^a$ eine Quadratzahl ist. Wir bezeichnen das Polynom auf der rechten Seite der Gleichung mit $r(b) = b^6 - 32b + 1$ und zeigen, dass es für $b > 4$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen liegt.

Sei also nun $b > 4$. Wir haben $r(b) < b^6 = (b^3)^2$ für $b > 0$. Außerdem gilt $r(b) > (b^3 - 1)^2$, denn $b^6 - 32b + 1 > b^6 - 2b^3 + 1 \Leftrightarrow b > 4$. Da die Quadratzahl $2017^a$ also zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen liegen soll, gibt es in diesem Fall keine Lösungen.

Da $b$ gerade ist, müssen wir nur mehr $b = 4$, $b = 2$ und $b = 0$ überprüfen.

Für $b = 4$ sehen wir sofort, dass die Gleichung modulo 3 zu $1 \equiv 1 - 2 + 1 = 0$ wird, also ergibt das keine Lösung.

Für $b = 2$ gilt $2017^a = 2^6 - 2^6 + 1$, also erhalten wird das Lösungspaar $(a, b) = (0, 2)$.

Für $b = 0$ gilt $2017^a = 1$, also erhalten wir das Lösungspaar $(a, b) = (0, 0)$.

Das sind also die einzigen Lösungen.

*(Walther Janous)* □

*Lösung 2.* Wir untersuchen zuerst $a = 0$ und erhalten $b^6 = 2^5 b$. Das ergibt die Lösungspaare $(a, b) = (0, 0)$ und $(a, b) = (0, 2)$. Nun untersuchen wir $b = 0$. Das ergibt $2017^a = 1$ und damit wieder $(a, b) = (0, 0)$.

Seien von nun an $a, b > 0$. Es ist $2017 = 1 + 32 \cdot 63$, also $2017^a \equiv 1 + 32 \cdot 63 \cdot a \pmod{64}$. Daraus folgt $2 \mid b^6 - 32b \Rightarrow 2 \mid b \Rightarrow 2^6 \mid b^6 - 32b$, woraus $2 \mid a$ folgt. Wir haben also $a = 2e$ mit $e > 0$.

Damit lässt sich die Gleichung umformen zu

$$(b^3 - 2017^e)(b^3 + 2017^e) = 32b - 1.$$

Wegen $b > 0$ ist die rechte Seite strikt positiv, was somit auch für die linke Seite gelten muss, und es gilt insbesondere $b^3 + 2017^e \mid 32b - 1$ und damit wegen $e > 0$, dass $b^3 + 2017 \leq 32b - 1 \Leftrightarrow b^3 + 2018 \leq 32b$. Es gilt aber für $b \geq 6$, dass $b^3 > 32b$, und für $b \leq 5$, dass $2018 > 32b$. Also ist diese Bedingung niemals erfüllt und wir erhalten keine weiteren Lösungen.

Bemerkung: Dass $a$ gerade ist, lässt sich auch mit dem LTE (Lifting the Exponent)-Satz zeigen:

Nach LTE gilt wegen $2017 \equiv 1 \pmod 4$, dass $v_2(2017^a - 1) = v_2(2017^a - 1^a) = v_2(2017 - 1) + v_2(a) = v_2(2016) + v_2(a) = 5 + v_2(a)$. Daraus folgt $2 \mid b^6 - 32b \Rightarrow 2 \mid b \Rightarrow 2^6 \mid b^6 - 32b$, also gilt $v_2(a) \geq 1$ und $a$ ist gerade.

*(Theresia Eisenkölbl, Clemens Heuberger)* □