48. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene, Teil 1

30. April 2017

1. Man bestimme alle Polynome $P(x)$, die reelle Koeffizienten haben und die folgenden zwei Bedingungen erfüllen:

   (a) $P(2017) = 2016$ und

   (b) $(P(x) + 1)^2 = P(x^2 + 1)$ für alle reellen Zahlen x.

   (Walther Janous)

2. Es sei $ABCDE$ ein regelmäßiges Fünfeck. Auf der Strecke zwischen dem Mittelpunkt M des Fünfecks und dem Punkt D wird ein Punkt $P \neq M$ gewählt. Der Umkreis von ABP schneidet die Seite AE in den Punkten A und Q und die Normale auf CD durch P in den Punkten P und R.

   Man zeige, dass AR und QR gleich lang sind.

   (Stephan Wagner)

3. Anna und Berta spielen ein Spiel, bei dem sie abwechselnd Murmeln vom Tisch nehmen. Anna macht den ersten Zug. Wenn zu Beginn eines Zuges $n \geq 1$ Murmeln am Tisch sind, dann nimmt die Spielerin, die am Zug ist, k Murmeln weg, wobei $k \geq 1$ entweder eine gerade Zahl mit $k \leq \frac{n}{2}$ oder eine ungerade Zahl mit $\frac{n}{2} \leq k \leq n$ ist. Eine Spielerin gewinnt das Spiel, wenn sie die letzte Murmel vom Tisch nimmt.

   Man bestimme die kleinste Zahl $N \geq 100\,000$, sodass Berta den Sieg erzwingen kann, falls anfangs genau N Murmeln am Tisch liegen.

   (Gerhard Woeginger)

4. Man bestimme alle Paare (a, b) nichtnegativer ganzer Zahlen, die

   $$2017^a = b^6 - 32b + 1$$

   erfüllen.

   (Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.