ÖMO

Österreichische MathematikOlympiade

Grundlagen der Geometrie – Beispiele

Birgit Vera Schmidt

1. Man zeige: Der Schwerpunkt S eines Dreiecks teilt die Schwerlinien im Verhältnis 2:1.
2. Man zeige: Die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem Inkreisradius mal dem halben Umfang.
3. Man zeige: Wenn eine Diagonale ein Viereck in zwei flächengleiche Hälften teilt, halbiert sie auch die andere Diagonale. Man zeige, dass auch die Umkehrung der Aussage gilt.
4. Sei ABCD ein Quadrat der Seitenlänge 6cm und E der Mittelpunkt der Seite AD. Auf CE sei ein Punkt F so gelegen, dass die Flächen der Dreiecke AFE und BCF inhaltsgleich sind. Man ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks ABF.
5. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $\sphericalangle BAC = 45°$ und $\sphericalangle CBA = 30°$. D liegt auf AB so, dass $\overline{AD} = \overline{AC}$, und E liegt auf BC so, dass $\overline{BE} = \overline{BD}$ ist. Zeige, dass das Dreieck DEC gleichschenklig ist.
6. Gegeben seien eine Gerade g und zwei Punkte A und B, die beide auf der gleichen Seite neben der Geraden liegen. Man bestimme auf der Geraden g einen Punkt C so, dass der Umfang des Dreiecks ABC minimal ist.
7. Man zeige: Die drei Winkelsymmetralen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
8. Man zeige: Die drei Streckensymmetralen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
9. Man zeige: Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
10. Man zeige: Die drei Schwerlinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
11. Man zeige: Wenn in einem Dreieck Umkreis- und Inkreismittelpunkt in einem Punkt zusammenfallen, so ist das Dreieck gleichseitig.
12. Man zeige: Sind in einem Dreieck zwei Höhen gleich lang, so ist das Dreieck gleichschenkelig.
13. Man zeige: Sind in einem Viereck gegenüberliegende Seiten zueinander parallel, so sind auch die einander gegenüberliegenden Seiten jeweils gleich lang. Man zeige, dass auch die Umkehrung gilt.
14. Sei k ein Kreis und P ein Punkt außerhalb dieses Kreises. Von P gehen zwei Strahlen aus, von denen einer k in A und B schneidet, der andere in C und D. Man zeige: $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.
15. Der Punkt X teile die Strecke AB, der Punkt P liege nicht auf der Verlängerung von AB. Man zeige: $[AXP] : [XBP] = \overline{AX} : \overline{XB}$.
16. Sei ABCD ein konvexes Viereck und S der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Man zeige: $[\mathrm{ABS}] \cdot [CDS] = [BCS] \cdot [DAS]$.

17. Man zeige: Wenn man die Seitenmittelpunkte eines konvexen Vierecks verbindet, entsteht ein Parallelogramm. (Dieses wird auch Varignon-Parallelogramm genannt.) Man zeige weiters, dass dieses Parallelogramm genau die Hälfte der Fläche des Vierecks bedeckt.
18. Man zeige: Spiegelt man den Umkreismittelpunkt eines Dreiecks an seinen Seiten, so erhält man ein zu dem ursprünglichen Dreieck kongruentes Dreieck.
19. Man zeige: In einem Trapez, in dem die Diagonalen aufeinander normal stehen, gilt immer $(a+c)^2 = e^2 + f^2$, wobei a und c die beiden parallelen Seiten des Trapezes und e und f seine Diagonalen sind.
20. In einer Ebene liege das Parallelogramm ABCD und die völlig außerhalb verlaufende Gerade g. Seien A', B', C' und D' die Fußpunkte der Höhen von A, B, C und D auf g. Man zeige: $\overline{AA'}+\overline{CC'}=\overline{BB'}+\overline{DD'}$.
21. Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Man konstruiere über der Seite BC ein gleichseitiges, nach innen gerichtetes Dreieck mit A' als drittem Eckpunkt. Analog erhalte man B' und C' als Eckpunkte der gleichseitigen Dreiecke über AC und AB. Man zeige, dass $\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}$.
22. Seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die sich nicht berühren, und seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte dieser Kreise. Man lege von M_1 die Tangenten an k_2. Diese schneiden k_1 den Punkten A und A'. Analog lege man von M_2 die Tangenten an k_1 und erhalte die Punkte B und B'. Man zeige: $\overline{AA'}=\overline{BB'}$.
23. Gegeben seien ein Punkt P und zwei parallele Geraden, die beide auf derselben Seite von P liegen. Von P gehen drei Strahlen aus. Der erste schneide die parallelen Geraden in A und A', der zweite in B und B', der dritte in C und C'. Sei X der Schnittpunkt von AB' und A'B, Y der von BC' und B'C und Z der Schnittpunkt von AC' und A'C. Man zeige: X, Y und Z liegen auf einer Geraden. Man zeige außerdem, dass diese Gerade parallel zu den bereits gegebenen parallelen Geraden ist. (GWB 2003)
24. Sei ABCD ein Quadrat. Man schreibe dem Quadrat einen Viertelkreis ein mit Mittelpunkt B und Radius $\overline{AB}$. Sei P ein Punkt auf diesem Viertelkreis, der weder mit A noch mit C zusammenfällt. Man lege die Tangente an den Viertelkreis durch P. Diese schneide die Seiten AD und DC in Q und R. Man zeige: Der Umfang des Dreiecks DQR beträgt genau die Hälfte des Umfanges des Quadrates ABCD.
25. Man zeige: In jedem rechtwinkeligen Dreieck mit verschieden langen Katheten ist die Höhe auf die Hypotenuse stets kürzer als die halbe Hypotenuse.
26. Sei ABCD ein Rechteck mit $\overline{BC}=a, \overline{AB}=a\cdot\sqrt{(2)}$. F sei der Mittelpunkt der Seite CD. Man zeige, dass die Strecken AC und BF normal aufeinander stehen.
27. Sei S ein Punkt, von dem zwei Strahlen ausgehen. Seien weiters zwei Kreise mit Mittelpunkten in S und unterschiedlichen Radien gegeben. Diese schneidend die Strahlen in insgesamt vier Punkten. Man zeige, dass diese vier Punkte ein Sehnenviereck bilden.
28. Sei ABCD ein Sehnenviereck mit den Seiten a, b, c und d und den Diagonalen e und f. Man zeige: ac + bd = ef. (Dies entspricht dem Satz von Ptolemäus.)
29. Sei ABC ein gleichseitiges Dreieck und P ein Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks. Man betrachte die Abstände AP, BP und CP und zeige, dass die Summe der beiden kürzeren davon gleich dem längsten ist. (Tipp: Ptolemäus)
30. Sei ABC ein Dreieck und seien X, Y und Z beliebige Punkte auf AB, BC und CA. Man konstruiere einen Kreis durch A, X und Z, einen Kreis durch B, X und Y und jenen Kreis durch C, Y und Z, und zeige, dass diese sich in einem Punkt schneiden.
31. Sei ABC ein beliebiges Dreieck und F der Fußpunkt der Höhe auf AB. Sei weiters h_a die Höhe auf BC und h_b die Höhe auf AC. Man projiziere F auf h_a und h_b (oder gegebenenfalls auf die Verlängerungen davon) und erhalte D und D'. Außerdem projiziere man F auf die Seiten AC und BC und erhalte die Punkte E und E'. Man zeige: D, D', E und E' liegen auf einer Geraden.
32. Sei ABC ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 3. Seien A', B' und C' Punkte auf den Strecken BC, CA und AB, sodass $\overline{BA'}=\overline{CB'}=\overline{AC'}=1$. Die drei Strecken AA', BB' und CC' schließen ein Dreieck ein. Man bestimme den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

33. Auf den Seiten eines Dreiecks ABC werden nach außen gleichseitige Dreiecke errichtet. Man zeige, dass ihre Mittelpunkte die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind.
34. Sei ABCD ein Quadrat. Auf der Seite AB wird ein Punkt E und auf der Seite BC ein Punkt F so gewählt, dass die Strecke BE und BF gleich lang sind. Der Punkt N sei der Normalenfußpunkt durch B auf die Gerade CE. Man zeige, dass der Winkel DNF ein rechter Winkel ist.
35. Es sei ABCD ein Sehnenviereck und k ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Seite AB liegt und der die anderen drei Seiten des Vierecks berührt. Man zeige: AD + BC = AB.
36. Durch den Mittelpunkt M einer Sehne PQ eines Kreises werden zwei weitere Sehnen AB und CD gezeichnet. Die Sehnen AD und BC schneiden PQ in den Punkten X und Y. Man zeige, dass M der Mittelpunkt von XY ist.
37. Sei ABCD ein Tangentenviereck. Man zeige: AB + CD = BC + DA.
38. Seien A und B zwei Punkte. Man wähle drei beliebige Punkte X, Y und Z, die jeweils gleich weit von A und B entfernt sind, und zeige, dass diese auf einer Geraden liegen.
39. Sei S ein Punkt, von dem zwei Strahlen g und h ausgehen, und A und B Punkte auf g bzw. h, sodass $\overline{SA}=\overline{SB}$. Man zeige: Die Winkelsymmetrale von $\sphericalangle ASB$ ist gleichzeitig die Streckensymmetrale von AB.
40. Sei ABCD ein Sehnenviereck und S der Schnittpunkt der Diagonalen. Man zeige, dass die Dreiecke ABS und CDS ähnlich sind.
41. Man zeige: U liegt genau dann außerhalb des Dreiecks ABC, wenn ABC stumpfwinkelig ist.
42. Man zeige: Ein Trapez hat genau dann einen Umkreis, wenn es gleichschenkelig ist.
43. Im gleichseitigen Dreieck ABC liegt der Punkt D auf der Seite BC mit $3\cdot\overline{CD}=\overline{BC}$. Weiters ist M der Mittelpunkt der Seite AB und CM die Höhe auf AB. Die Gerade AD schneidet CM im Punkt P. Man zeige, dass der Kreis um P durch C die Seite AB berührt. (LWB 1992)
44. Es sei I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Er wird an den Dreiecksseiten gespiegelt. Dabei entsteht ein Dreieck PQR. Man zeige: Das Dreieck PQR ist spitzwinkelig. Welcher besondere Punkt des Dreiecks PQR ist der Punkt I? (LWB 1993)
45. Zwei gleich große Kreise k_1 und k_2 schneiden einander in den Punkten P und Q. Für eine (beliebige) Gerade g durch P sei P_1 der zweite Schnittpunkt mit k_1 und P_2 der zweite Schnittpunkt mit k_2 . Man zeige, dass unabhängig von der Wahl von g, das Dreieck $P_1 Q P_2$ ein gleichschenkeliges Dreieck ist. (LWB 1994)
46. Von einem rechtwinkeligen Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C sind die Eckpunkte A und B sowie der Punkt P auf der Strecke AB, der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite AB, gegeben. Man konstruiere den Eckpunkt C und damit das Dreieck. (LWB 1996)
47. In einem Dreieck ABC schneidet die Winkensymmetrale des Winkels α die Höhe auf die Seite b im Punkt D, die Höhe auf die Seite c im Punkt E. Man zeige: Ist der Abstand des Punktes D von der Seite b gleich groß wie der Abstand des Punktes E von der Seite c, so ist das Dreieck ABC gleichschenkelig. (LWB 1998)
48. Von den beiden Rechtecken ABCD und AEFG (jeweils Reihenfolge der Ecken gegen den Uhrzeigersinn) liegen die Punkte B, D, E und G auf einer Geraden. Dabei soll B rechts von G liegen. Man zeige, dass GBCF ein Trapez ist. (LWB 1999)
49. Wir betrachten ein Parallelogramm ABCD, in dem der Mittelpunkt M der Seite CD auf der Winkelsymmetrale von $\sphericalangle BAD$ liegt. Man zeige, dass $\sphericalangle AMB$ ein rechter Winkel ist. (LWB 2007)
50. Über dem Durchmesser AB wird der Halbkreis h mit dem Mittelpunkt M errichtet. Über MB wird auf der selben Seite der Geraden AB der Halbkreis k errichtet. Seien X und Y Punkte auf k, sodaß der Bogen BX eineinhalb mal so groß wie der Bogen BY ist. Die Gerade MY schneidet die Gerade BX in D und den großen Halbkreis h in C.
    Man zeige, daß Y die Mittelpunkt der Strecke CD ist. (GWB 2005)