48. Österreichische Mathematik-Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene — Lösungen

30. März 2017

Aufgabe 1. *Es seien x_1, x_2, …, x_9 nicht negative reelle Zahlen, für die gilt:*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_9^2 \geq 25$$

Man beweise, dass es drei dieser Zahlen gibt, deren Summe mindestens 5 ist.

(Karl Czakler)

Lösung 1. (Karl Czakler) Es sei o. B. d. A. $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_9 \geq 0$. Annahme: $x_1 + x_2 + x_3 < 5$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 25 \leq x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_9^2 \leq x_1(x_1 + x_2 + x_3) + x_2(x_4 + x_5 + x_6) + x_3(x_7 + x_8 + x_9) \\ \leq 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 < 25. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch und daher gibt es drei Zahlen, deren Summe größer als 5 ist. □

Lösung 2. (Karl Czakler) Es sei o. B. d. A. $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_9 \geq 0$. Annahme: $x_1 + x_2 + x_3 < 5$.
Dann folgt:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 < 25 \leq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_9^2,$$

also

$$2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 < x_4^2 + x_5^2 + \cdots + x_9^2.$$

Wegen $x_1 \geq x_4 \geq 0$ und $x_2 \geq x_4 \geq 0$ gilt $x_1x_2 \geq x_4^2$. Analog folgert man $x_1x_2 \geq x_5^2$, $x_2x_3 \geq x_6^2$, …, $x_1x_3 \geq x_9^2$,
Addiert man diese 6 Ungleichungen, so ergibt sich ein Widerspruch zur vorhergehenden Ungleichung. Es gibt daher drei Zahlen, deren Summe mindestens 5 ist.
Gleichheit gilt für $x_1 = x_2 = \cdots = x_9 = \frac{5}{3}$ und für $x_1 = 5$, $x_2 = x_3 = \cdots = x_9 = 0$. □

Lösung 3. (Gerhard Kirchner) Es sei o. B. d. A. $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_9 \geq 0$. Wir wollen zeigen, dass $x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$. Angenommen, es gibt ein Gegenbeispiel $(x_1, \ldots, x_9)$. Dann gilt also

$$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_9 \geq 0, \qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_9^2 \geq 25 \qquad \text{und} \qquad x_1 + x_2 + x_3 < 5.$$

Wir sehen nun, dass auch $(y_1, y_2, \ldots, y_9) := (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2}, x_3, x_3, \ldots, x_3)$ ein Gegenbeispiel ist. Offensichtlich gilt nämlich

$$\begin{gathered} y_1 \geq y_2 = y_3 = \ldots = y_9 \geq 0 \qquad (\text{beachte } y_1 \geq x_1 \geq x_3 = y_2), \\ y_1^2 + \ldots + y_9^2 = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) + 8x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 \geq x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_9^2 \geq 25 \\ \text{und} \qquad y_1 + y_2 + y_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2} + 2x_3 \leq x_1 + x_2 + x_3 < 5, \end{gathered}$$

wobei die letzte Zeile aus $x_1 + x_2 - x_3 \geq 0$ und

$$(x_1 + x_2 - x_3)^2 = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) + 2(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \geq x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

folgt. Wegen $y_2 = \ldots = y_9$ erhalten wir also

$$y_1 \geq y_2 \geq 0, \qquad y_1^2 + 8y_2^2 \geq 25, \qquad y_1 + 2y_2 < 5.$$

Daraus folgt

$$(y_1 + 2y_2)^2 < 25 \leq y_1^2 + 8y_2^2 \qquad \text{insb.} \qquad 4y_1y_2 < 4y_2^2$$

im Widerspruch zu $y_1 \geq y_2 \geq 0$. □

Lösung 3a. (Gerhard Kirchner) Wir gehen vor wie in Lösung 3, setzen aber $(y_1, y_2, \ldots, y_9) := (x_1+x_2-x_3, x_3, x_3, \ldots, x_3)$. Dann kann man nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} y_1 \geq y_2 = y_3 = \ldots = y_9 \geq 0, \\ y_1^2 + \ldots + y_9^2 \geq x_1^2 + \ldots + x_9^2 \geq 25 \\ \text{und} \qquad y_1 + y_2 + y_3 = x_1 + x_2 + x_3 < 5. \end{aligned}$$

Damit erhält man den selben Widerspruch wie in Lösung 3. □

Lösung 4. (Birgit Vera Schmidt) O. B. d. A. sei $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_9$.
Wir drehen die Bedingung um: Wir versuchen unter der Nebenbedinungen $x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$ den Wert von $A = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_9^2$ zu maximieren und werden sehen, dass das Maximum 25 beträgt und Gleichheit nur bei $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ eintritt. Daraus folgt sofort die zu zeigende Bedingung.
Wir maximieren den Wert von A in zwei Schritten: Zunächst bestimmen wir für jeden *fixen* Wert von x_3 den größtmöglichen Wert von A. Dann wählen wir jenen Wert von x_3, für den dieser am größten ist.
Sei also zunächst $x_3 = a$ fix vorgegeben, wobei wir nur die Fälle $0 \leq a \leq \frac{5}{3}$ zu betrachten brauchen (da $x_3 < 0$ laut Angabe nicht erlaubt ist, und $x_3 > \frac{5}{3}$ wegen $x_1 \geq x_2 \geq x_3 > a$ auf jeden Fall die Nebenbedingung $x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$ verletzen würde).
Wir können die Teile $x_1^2 + x_2^2$ und $x_4^2 + \cdots + x_9^2$ unabhängig voneinander maximieren. Der größtmögliche Wert von $x_4^2 + \cdots + x_9^2$ wird (wegen $a \geq x_4 \geq \cdots \geq x_9$) für $x_4 = \cdots = x_9 = a$ erreicht.
Um den größtmöglichen Wert von $x_1^2 + x_2^2$ erreichen, muss $x_1 + x_2 + a = 5$ gelten (weil man für $x_1 + x_2 + a < 5$ sofort eine der Zahlen x_1 oder x_2 größer machen und eine größere Summe der Quadrate erhalten kann).
Daher gilt in einer optimalen Lösung $x_1 = \frac{5-a}{2} + b$ und $x_2 = \frac{5-a}{2} - b$ für ein noch zu bestimmendes reelles b. Es ist bekannt (oder kann leicht gezeigt werden), dass die Summe dieser beiden Quadrate umso größer wird, je größer b ist. Wegen $x_1 \geq x_2 \geq x_3$ gilt daher, dass $x_1^2 + x_2^2$ dann maximal ist, wenn $x_2 = a$ und $x_1 = 5 - 2a$.
Für ein fixes a ist der größtmögliche Wert von A daher gleich $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_9^2 = (5-2a)^2 + a^2 + \cdots + a^2 = 25 - 20a + 12a^2$.
Nun gilt es nur noch, unter allen möglichen a jenes zu wählen, für das dieser Wert am größten wird. Wir erkennen, dass es sich um eine Parabel mit Minimum bei $a = \frac{5}{6}$ handelt. Somit kommen nur der kleinstmögliche und der größtmögliche Wert von a in Frage, um das Maximum von A zu erreichen.
Der kleinstmögliche Wert für a, der die Nebenbedingungen nicht verletzt, ist $a = 0$, d.h. $x_1 = 5$ und $x_2 = \cdots = x_9 = 0$. Daraus folgt $A = 25$ und $x_1 + x_2 + x_3 = 5$.
Der größtmögliche Wert von a, der die Nebenbedingungen nicht verletzt, ist $a = \frac{5}{3}$, d.h. $x_1 = x_2 = \cdots = x_9 = \frac{5}{3}$. Daraus folgt wieder $A = 25$ und $x_1 + x_2 + x_3 = 5$.
Für alle anderen erlaubten Werte von a gilt wegen der Eigenschaften der Parabel sicher $A < 25$, womit alles gezeigt ist. □

Aufgabe 2. *Es sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck mit dem Umkreismittelpunkt U, in dem die Diagonalen aufeinander normal stehen. Es sei g die Gerade, die man erhält, wenn man die Diagonale AC an der Winkelsymmetrale von $\sphericalangle BAD$ spiegelt.*
Man zeige, dass der Punkt U auf der Geraden g liegt.

(Theresia Eisenkölbl)

Lösung 1. (Gottfried Perz) Es sei X der Diagonalenschnittpunkt des Sehnenvierecks $ABCD$ und E der zweite Schnittpunkt der Geraden g mit dem Umkreis k von $ABCD$.
Die Gerade g erhält man durch Spiegelung der Diagonale AC an der Winkelsymmetrale w_α von $\sphericalangle BAD$. Daraus folgt

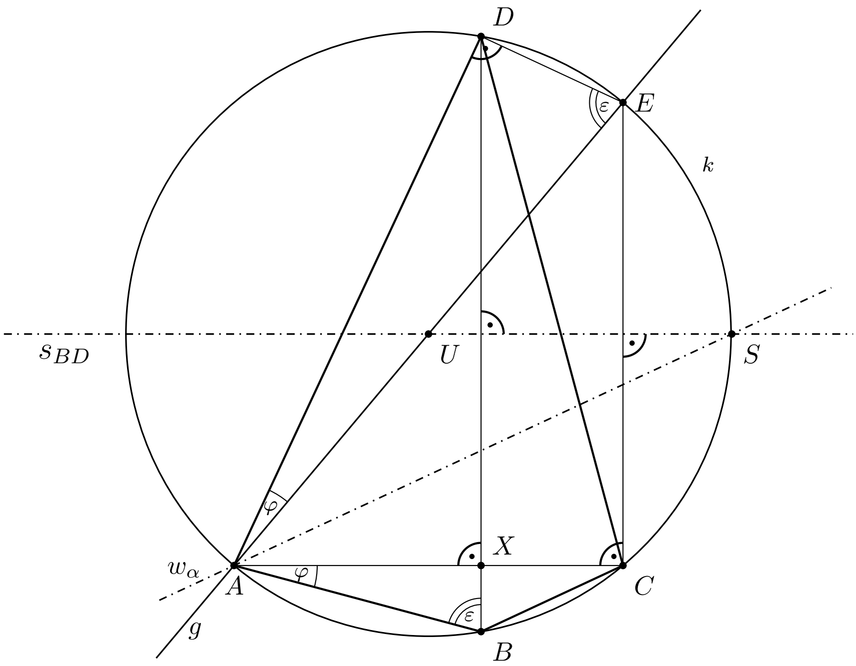
$$\sphericalangle EAD = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BAX = \varphi.$$

Nach Peripheriewinkelsatz gilt darüber hinaus

$$\sphericalangle DEA = \sphericalangle DBA = \sphericalangle XBA = \varepsilon.$$

Damit sind die Dreiecke AED und ABX ähnlich. Weil AC normal zu BD ist, ist ABX rechtwinklig mit Hypotenuse AB. Daher ist AED rechtwinklig mit Hypotenuse AE. Nach dem Satz von Thales ist also AE ein Durchmesser des Kreises k.
Somit liegt der Umkreismittelpunkt U des Sehnenvierecks $ABCD$ auf g. □

Lösung 2. (Gottfried Perz) Es sei S der Schnittpunkt des Umkreises k (Mittelpunkt U) des Sehnenvierecks $ABCD$ mit der Winkelsymmetrale von $\sphericalangle BAD$; E sei der zweite Schnittpunkt von k mit g.



Die Dreiecke ABD und ACE haben nun einerseits denselben Umkreis k, andrerseits aufgrund der Konstruktion von E dieselbe Winkelsymmetrale w_α im Eckpunkt A.
Laut Südpolsatz haben in jedem Dreieck die Winkelsymmetrale in einem Eckpunkt und die Seitensymmetrale der gegenüberliegenden Seite denselben Schnittpunkt mit dem Umkreis des Dreiecks. Das bedeutet, dass US gemeinsame Streckensymmetrale von BD und CE ist. Daher sind CE und BD parallel, und weil nach Voraussetzung $BD \perp AC$ gilt, gilt auch $CE \perp AC$.
Somit ist das Dreieck ACE rechtwinklig mit rechtem Winkel in C. Als Umkreismittelpunkt von ACE liegt U auf der Hypotenuse des Dreiecks ACE, also liegt U auf der Geraden g. □

Lösung 3. (Theresia Eisenkölbl) Es sei h jene Gerade, die man durch Spiegelung der Diagonale BD an der Winkelsymmetrale von $\sphericalangle CBA$ erhält. Der Schnittpunkt der Geraden g und h sei M. Weiters sei $\gamma_1 = \sphericalangle ACB$.
Aufgrund der Konstruktion der Geraden g und h gilt

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle DAC, \qquad \sphericalangle ABM = \sphericalangle DBC.$$

Dann gilt unter Verwendung des Peripheriewinkelsatzes für die Winkel über CD, dass

$$\begin{aligned}\sphericalangle AMB = 180^\circ - \sphericalangle MAB - \sphericalangle ABM = 180^\circ - \sphericalangle DAC - \sphericalangle DBC = \\ = 180^\circ - 2\sphericalangle DBC = 180^\circ - 2 \cdot (90^\circ - \gamma_1) = 2\gamma_1.\end{aligned}$$

Also ist der Punkt M Scheitel eines gleichschenkligen Dreiecks über AB mit demselben Winkel zwischen den Schenkeln wie der Mittelpunkt U des Kreises. Somit gilt $M = U$, und der Umkreismittelpunkt U des Sehnenvierecks $ABCD$ liegt auf g. □

Lösung 4. (Gerhard Kirchner) Es sei X der Diagonalenschnittpunkt, das heißt AX ist eine Höhe im Dreieck ABD. Nach dem Peripherie- und Zentriwinkelsatz gilt $\sphericalangle ABX = \frac{1}{2}\sphericalangle DUA$. Daraus folgt

$$\sphericalangle XAB = 90° - \sphericalangle ABX = \frac{1}{2} \cdot (180° - \sphericalangle DUA) = \sphericalangle UAD.$$

In der letzten Umformung wurde die Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck DAU verwendet. Da die Geraden AB und AD bezüglich der Winkelsymmetrale w_α zueinander symmetrisch liegen, gilt das also auch für die Geraden AX und AU. Daraus folgt die Behauptung. □

Lösung 5. (Elias Walder) Es seien X der Diagonalenschnittpunkt des Sehnenvierecks und t_A die Tangente an den Umkreis im Punkt A. Nach dem Sehnen-Tangenten-Winkelsatz (Sehne AB) muss der spitze Winkel zwischen AB und t_A gleich groß sein wie der Winkel $\sphericalangle BDA = \sphericalangle XDA$. Da AC an der Winkelsymmetrale w_α gespiegelt g ergibt, muss der spitze Winkel zwischen AB und g gleich groß sein wie $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DAX$. Da $\sphericalangle DAX + \sphericalangle XDA = 90°$ (rechtwinkliges Dreieck ADX), steht g im Punkt A normal zur Tangente t_A und somit ist g Durchmesser des Kreises. Also muss der Umkreismittelpunkt U auch auf g liegen. □

Aufgabe 3. *Auf der Tafel stehen die drei natürlichen Zahlen 2000, 17 und n. Anna und Berta spielen folgendes Spiel: Anna beginnt, dann sind sie abwechselnd am Zug. Ein Zug besteht darin, eine der drei Zahlen auf der Tafel durch den Betrag der Differenz der beiden anderen Zahlen zu ersetzen. Dabei ist kein Zug erlaubt, bei dem sich keine der drei Zahlen verändert. Wer an der Reihe ist und keinen erlaubten Zug mehr machen kann, hat verloren.*

- *Man beweise, dass das Spiel für jedes n irgendwann zu Ende geht.*
- *Wer gewinnt, wenn $n = 2017$ ist?*

(Richard Henner)

Lösung. (Richard Henner) Wenn drei Zahlen auf der Tafel stehen und bei einem Zug eine der drei Zahlen durch die (positive) Differenz der anderen beiden Zahlen ersetzt wird, so stehen nach diesem Zug zwei Zahlen und die Summe der beiden Zahlen auf der Tafel. Es sei o. B. d. A. $b > a$ und a, b und $a + b$ stehen auf der Tafel. Dann gibt es wegen $a + b - b = a$ und $a + b - a = b$ nur einen möglichen Zug und es stehen nachher a, b und $b - a$ auf der Tafel. Auch dann ist eine der Zahlen (nämlich b) die Summe der anderen beiden und es gibt nur einen möglichen Zug.
Man erkennt also, dass es spätestens ab dem zweiten Zug keine Auswahl der Züge mehr gibt und alle Züge zwangsläufig sind. Weiters erkennt man, dass ab dem zweiten Zug bei jedem Zug die größte der drei Zahlen verkleinert wird, und, weil keine der Zahlen negativ werden kann, muss nach endlich vielen Zügen eine Zahl 0 sein. Da 0 die Differenz der anderen beiden Zahlen ist, müssen diese gleich sein, es steht also 0, a, a auf der Tafel. Wegen $a - 0 = a$ und $a - a = 0$ ist das der Endzustand, es ist kein Zug mehr möglich. Dieser Endzustand muss also jedenfalls erreicht werden. Sieger ist also, wer 0, a, a auf die Tafel schreibt.

Spielverlauf, wenn zu Beginn 2000, 17, 2017 auf der Tafel steht:
1. Zug (A): 2000, 17, 1983
2. Zug (B): 1966, 17, 1983
3. Zug (A): 1966, 17, 1949
usw. (wegen $2000 : 17 = 117{,}6\dots$)
117. Zug (A): $2000 - 116 \cdot 17 = 28$, 17, $2000 - 117 \cdot 17 = 11$
118. Zug (B): 6, 17, 11
119. Zug (A): 6, 5, 11
120. Zug (B): 6, 5, 1
121. Zug (A): 4, 5, 1

122. Zug (B): 4, 3, 1
123. Zug (A): 2, 3, 1
124. Zug (B): 2, 1, 1
125. Zug (A): 0, 1, 1
und A gewinnt. □

Aufgabe 4. *Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$, für die*

$$n = a^2 + b^2$$

gilt, wobei a der kleinste von 1 verschiedene Teiler von n und b ein beliebiger Teiler von n ist.

(Walther Janous)

Lösung 1. (Walther Janous) Wir unterscheiden für b drei Fälle.

1. $b = 1$. Dann ist $n = a^2 + 1$. Aus $a \mid n$, das heißt $a \mid a^2 + 1$, folgt $a \mid 1$, also der Widerspruch $a = 1$.

2. $b = a$. Dann ist $n = 2a^2$ mit a prim. Weil n gerade ist, muss $a = 2$ sein, was auf $n = 8$ führt.

3. $b > a$. Aus $n = a^2+b^2$ und $b \mid n$ ergibt sich $b \mid a^2$, also $b = a^2$ (weil a prim ist). Damit: $n = a^2(a^2+1)$ Als Produkt zweier aufeinander folgender Zahlen ist n gerade und es muss somit $a = 2$ sein. Daraus folgt $n = 20$. □

Lösung 2. (Walther Janous) Wir unterscheiden für n zwei Fälle.

1. n ist ungerade. Dann sind alle Teiler von n ungerade. Damit folgt aber der Widerspruch, dass $n = a^2 + b^2$ gerade ist.

2. n ist gerade. Dann ist $a = 2$, also $n = b^2 + 4$. Aus $b \mid n$ ergibt sich $b \mid 4$, also $b \in \{1, 2, 4\}$.

   - $b = 1$ führt zur ungeraden Zahl $n = 5$.
   - $b = 2$ liefert $n = 8$.
   - $b = 4$ ergibt $n = 20$. □

Lösung 3. (Walther Janous) Wir unterscheiden für a zwei Fälle.

1. $a = 2$. Damit ist n gerade und es muss wegen $n = a^2 + b^2$ auch der Teiler b gerade sein, also $b = 2c$ mit $c \geq 1$ und c ganzzahlig, samt $n = 4 + 4c^2$. Wegen $b \mid n$, also $2c \mid 4c^2 + 4$, hat $c \mid 2(c^2 + 1)$ zu gelten. Wir haben aber $\operatorname{ggT}(c, c^2 + 1) = \operatorname{ggT}(c, c^2 + 1 - c \cdot c) = \operatorname{ggT}(c, 1) = 1$. Deshalb muss c die Zahl 2 teilen, es kann also nur $c = 1$ oder $c = 2$ sein.

   - $c = 1$ liefert $b = 2$, also $n = 8$.
   - $c = 2$ ergibt $b = 4$, also $n = 20$.

2. $a \geq 3$. Dann kann 2 kein Teiler von n sein, das heißt n ist ungerade und es müsste auch b ungerade sein, womit aber $n = a^2 + b^2$ gerade wäre. □

Lösung 4. (Walther Janous) Es sei $d = \operatorname{ggT}(a, b)$. Weil a prim ist, folgt $d \in \{1, a\}$.

1. $d = 1$. Dann ist b nicht durch a teilbar. Wegen $\operatorname{ggT}(a, n) = \operatorname{ggT}(a, a^2+b^2) = \operatorname{ggT}(a, a^2+b^2-a\cdot a) = \operatorname{ggT}(a, b^2) = 1$ ist aber n nicht durch seinen Teiler a teilbar.

2. $d = a$. Mit $b = c \cdot a$, $c \geq 1$ und c ganz, haben wir $n = a^2 \cdot (1 + c^2)$. Weil b ein Teiler von n ist, ist $\frac{n}{b} = \frac{a(1+c^2)}{c}$ eine ganze Zahl. Wegen $\operatorname{ggT}(c, 1 + c^2) = \operatorname{ggT}(c, 1 + c^2 - c \cdot c) = \operatorname{ggT}(c, 1) = 1$ ist $\frac{n}{b}$ genau dann ganzzahlig, wenn $c \mid a$, das heißt $c \in \{1, a\}$.

- Für $c = 1$ ist $n = 2a^2$, das heißt $a = 2$, also $n = 8$.
- Für $c = a$ gilt $n = a^2(a^2 + 1)$, dies ist als Produkt von zwei aufeinander folgenden ganzen Zahlen gerade. Deshalb muss $a = 2$, also $n = 20$ sein. □

Lösung 5. (Walther Janous) Wir betrachten die allgemeine Fragestellung, in der wir den Exponenten '2' durch $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, ersetzen, also $n = a^k + b^k$ untersuchen.

1. $k = 1$. Aus $n = a + b$, $a \mid n$ und $b \mid n$ ergeben sich $a \mid b$ und $b \mid a$, also $a = b$ und damit $n = 2a$. Deshalb: $a = 2$ und damit $n = 4$.

2. $k \geq 2$. Wie zuvor (etwa in Lösung 2) schließt man aus, dass n ungerade sein kann. Für gerade n muss $a = 2$ sein und damit $n = b^k + 2^k$. Aus $b \mid n$ folgt $b \mid 2^k$, also $b = 2^j$, $j = 0, 1, \ldots, k$. Der Fall $j = 0$ führt auf die ungerade Zahl $n = 2^k + 1$. Die übrigen Exponenten j ergeben die k Lösungszahlen $n_j = 2^k + 2^{kj}$, das heißt $n_j = 2^k(2^{k(j-1)} + 1)$, $j = 1, 2, \ldots, k$. □