48. Österreichische Mathematik-Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

30. März 2017

---

1. Es seien x_1, x_2, $\ldots$, x_9 nicht negative reelle Zahlen, für die gilt:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_9^2 \geq 25$$

Man beweise, dass es drei dieser Zahlen gibt, deren Summe mindestens 5 ist.

(Karl Czakler)

2. Es sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck mit dem Umkreismittelpunkt U, in dem die Diagonalen aufeinander normal stehen. Es sei g die Gerade, die man erhält, wenn man die Diagonale AC an der Winkelsymmetrale von $\sphericalangle BAD$ spiegelt.

Man zeige, dass der Punkt U auf der Geraden g liegt.

(Theresia Eisenkölbl)

3. Auf der Tafel stehen die drei natürlichen Zahlen 2000, 17 und n. Anna und Berta spielen folgendes Spiel: Anna beginnt, dann sind sie abwechselnd am Zug. Ein Zug besteht darin, eine der drei Zahlen auf der Tafel durch den Betrag der Differenz der beiden anderen Zahlen zu ersetzen. Dabei ist kein Zug erlaubt, bei dem sich keine der drei Zahlen verändert. Wer an der Reihe ist und keinen erlaubten Zug mehr machen kann, hat verloren.

   - Man beweise, dass das Spiel für jedes n irgendwann zu Ende geht.
   - Wer gewinnt, wenn $n = 2017$ ist?

(Richard Henner)

4. Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$, für die

$$n = a^2 + b^2$$

gilt, wobei a der kleinste von 1 verschiedene Teiler von n und b ein beliebiger Teiler von n ist.

(Walther Janous)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.