1. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

2. Man zeige für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{x^2}{y} + x + y \geq 3x$$

3. Man zeige für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{a^3+b^6}{2} \geq 3ab^2 - 4$$

4. Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

5. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ mit $a+b+c=1$:

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$$

6. Man zeige für alle $a, b, c, \ldots, z \in \mathbb{R}$:

$$a^2+b^2+c^2+\cdots+z^2 \geq \frac{1}{26}(a+b+c+\cdots+z)^2$$

7. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)+a^2b^2c^2+1}{3} \geq 2abc$$

8. Man zeige für alle $k \in \mathbb{Z}^+, a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ mit $a+b+c+d=4$:

$$a^k+b^k+c^k+d^k \geq 4$$

9. Man zeige für alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$:

$$1a_1^4+2a_2^4+3a_3^4+\cdots+na_n^4 \geq \frac{(1a_1^2+2a_2^2+3a_3^2+\cdots+na_n^2)^2}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

   Wann gilt Gleichheit?

10. Man zeige für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$:

$$3 \leq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy$$

11. Man zeige für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x^2+y^2+1 > x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$$

12. Man zeige für alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}$$

   Wann gilt Gleichheit?

13. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) \leq 3(a^5+b^5+c^5)$$

14. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$$

15. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+, m, n \in \mathbb{Z}^+$:

$$\frac{a^n}{b^m} + \frac{b^n}{c^m} + \frac{c^n}{a^m} \geq a^{n-m} + b^{n-m} + c^{n-m}$$

16. Man zeige für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$:

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \sqrt[3]{\frac{x}{y}} + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} - \frac{2}{27}$$

Wann gilt Gleichheit?

17. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

$$a+b+c \leq \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b}$$

18. Man zeige für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{xy} \leq \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2 \leq \frac{x+y}{2}$$

Wann gilt Gleichheit?

19. Man zeige für alle $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+, x+y \geq 0$:

$$\frac{y}{x+y} + \frac{x}{y} \geq 1$$

20. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

$$ab + bc + ca \geq \sqrt{3abc(a+b+c)}$$

21. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^3}{3} + \frac{c^6}{6} \geq abc$$

Wann gilt Gleichheit?

22. Man zeige für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$:

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

23. Man zeige für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right) \leq \left(xy + \frac{1}{xy}\right)^2$$

24. Man zeige für alle $a \in \mathbb{R}$:
$$4a - a^4 \leq 3$$

25. Man bestimme die kleinste natürliche Zahl n, sodass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:
$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq n(x^4 + y^4 + z^4)$$

26. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass von den Zahlen $a - b^2, b - c^2, c - d^2, d - a^2$ nicht alle größer als $\frac{1}{4}$ sein können.

27. Man zeige für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$:
$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}$$

28. Man zeige für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a + b + c + d}$$

29. Man zeige für alle $a, b \in \mathbb{R}$:
$$a^4 + b^4 + 2 \geq 4ab$$

30. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}$$

31. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:
$$\frac{a + b + c}{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}} \leq \frac{ab + bc + ca}{a + b + c}$$

32. Man zeige für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 1}$:
$$a^3b^3 + 3a^2b^2 + 3ab + 1 \geq (a + b)^3$$

33. Man zeige für alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$:
$$\sin(x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \leq 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

34. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:
$$\sqrt{\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{6}} \geq \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{\sqrt{b}}{3} + \frac{\sqrt{c}}{6}$$

35. Man zeige für alle $a, b \in \mathbb{R}^+_{\geq 1}$:
$$[a]\,[b] + \{a\}\{b\} \geq \frac{ab}{2}$$

36. Man zeige für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$:
$$a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5 \leq 3\left(a^5 + b^5\right)$$

37. Man zeige für alle $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$ mit $xy + yz + zx = 1$:

$$\sum_{cyc} x(1-y^2)(1-z^2) \leq \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

38. Für reelle Zahlen a, b und c definiere man die Funktion $f(a,b,c) = a + b - |a-b| - |a + b + |a-b| - 2c|$. Man zeige, dass $f(a,b,c) > 0$ genau dann gilt, wenn $f(b,c,a) > 0$ gilt. Man zeige weiters, dass aus $f(a,b,c) > 0$ folgt, dass auch $f(c,a,b) > 0$ gilt.

39. Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl und seien $t_1, t_2, \ldots, t_n$ positive reelle Zahlen sodass

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right)$$

gilt. Man zeige, dass für alle $1 \leq i < j < k \leq n$ die Zahlen t_i, t_j und t_k die Seitenlängen eines Dreiecks sind.

40. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ mit $ab + bc + ca = 1$:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}$$

41. Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $n > 1$. Sei g_n deren geometrisches Mittel, und sei A_k das arithmetische Mittel der ersten k Zahlen, d.h. $A_k = \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k}$ (für $k = 1, \ldots, n$). Sei G_n das geometrische Mittel von $A_1, \ldots, A_n$. Man zeige:

$$n\sqrt[n]{\frac{G_n}{A_n}} + \frac{g_n}{G_n} \leq n + 1$$

Wann gilt Gleichheit?

42. Man zeige für alle $a_1, a_2, \ldots, a_{100} \in \mathbb{R}_0^+$ mit $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2 = 1$:

$$a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \cdots + a_{100}^2 a_1 < \frac{12}{25}$$

43. Man zeige für alle $m, n \in \mathbb{Z}^+$ mit $n \leq m$:

$$2^n n! \leq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leq (m^2 + m)^n$$

44. Seien a, b und c die Seitenlängen eines Dreiecks. Man zeige:

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Wann gilt Gleichheit?

45. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ mit $a^2 + b^2 - ab = c^2$:

$$(a-c)(b-c) \leq 0$$

46. Man finde alle Paare nicht-negativer reeller Zahlen x und y, die die Gleichung

$$(xy-7)^2 = x^2 + y^2$$

erfüllen.

47. Man finde das größtmögliche C und das kleinstmögliche D, sodass folgende Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist:

$$C < \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} < D$$

48. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ mit $abc = 1$:

$$\sum_{cyc(a,b,c)} \frac{ab}{a^5+b^5+ab} \leq 1$$

49. Man zeige für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x^2+y^2+z^2 = 2$:

$$x+y+z \leq xyz+2$$

50. Seien $x_1, \ldots, x_{1997}$ reelle Zahlen, die die beiden Bedingungen $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x_i \leq \sqrt{3}$ (für $i = 1, \ldots, 1997$) und $x_1 + \cdots + x_{1997} = -318\sqrt{3}$ erfüllen. Man bestimme den maximalen Wert des folgenden Ausdrucks:

$$x_1^{12} + x_2^{12} + \cdots + x_{1997}^{12}$$

51. Seien a, b und c verschiedene reelle Zahlen sodass $a^3 = 3(b^2+c^2) - 25$, $b^3 = 3(c^2+a^2) - 25$ und $c^3 = 3(a^2+b^2) - 25$. Man bestimme den Wert von abc.

52. Sei $\langle a_n \rangle_{n=1,2,\ldots}$ eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen, sodass $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ für alle m und n gilt. Man zeige für $n \geq m$:

$$a_n \leq ma_1 + \left(\frac{n}{m} - 1\right) a_m$$

53. Man zeige für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

54. Man zeige für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$:

$$\sum_{cyc(a,b,c,d)} \frac{a}{b+2c+3d} \geq \frac{2}{3}$$

55. Man zeige für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}_0^+$ mit $a+b+c+d = 1$:

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd$$

56. Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. Man zeige oder widerlege:
    a) Aus $x+y+z \geq 3$ folgt $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3$.
    b) Aus $x+y+z \leq 3$ folgt $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$.